

1 Fonctions holomorphes. Etudes géométriques.

1.1 Domaines simplement connexes. Rappel topologique.

1.1.1 Ensembles étoilés

Soit U une partie du plan complexe \mathbb{C} . On appelle centre de U tout point $z_0 \in U$ vérifie la condition suivante : le segment $[z_0, z]$ est inclus dans U quelque soit $z \in U$. Si z_0 est un centre de U on dit que U est un ensemble étoilé par rapport à z_0 .

Définition 1.1. Un ensemble s'appelle étoilé s'il a au moins un centre.

Remarque 1. Un ensemble peut avoir plusieurs centres. Il existe des ensembles sans centres.

Un ensemble U est convexe si le segment $[z_1, z_2]$ est inclus dans U , $\forall z_1, z_2 \in U$. Il est évident qu'un ensemble est convexe si chacun de ses points est un centre. En particulier, tout ensemble convexe non-vidé est un exemple d'un ensemble étoilé.

Le plan complexe \mathbb{C} est étoilé et même convexe. L'ensemble $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0$ n'est pas étoilé. Le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ est étoilé et ses centres sont les nombres réels positifs.

1.1.2 Rappel : domaines

Définition 1.2. Le domaine est un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ de façon telle que deux points quelconques de U peuvent toujours être reliés par un chemin tracé dans U

Un ouvert étoilé U du centre z_0 est toujours un domaine. On peut toujours joindre deux points de U par un chemin passant par le centre z_0 .

L'ensemble ouvert \mathbb{C}^* n'est pas étoilé mais il est un domaine de \mathbb{C} .

1.1.3 Rappel : connexité

Soit $X \subseteq \mathbb{C}$ (ou de $\bar{\mathbb{C}}$). L'adhérence \bar{X} de X est la réunion de X et de sa frontière ∂X .

On dira qu'un ensemble X est connexe si on ne peut pas le diviser en deux parties non-vides X_1 et X_2 telles que les intersections $\bar{X}_1 \cap X_2$ et $X_1 \cap \bar{X}_2$ soient vides. Un ensemble fermé est dit connexe si on ne peut pas le partager en deux sous-ensembles disjoints fermés non-vides.

La propriété d'un domaine U (1.2) (la possibilité de relier deux points quelconques par un chemin contenu dans U) s'appelle la connexité par arcs. Tout ensemble X (pas forcément un domaine!) connexe par arc est connexe. La réciproque est fautive. Ces notions sont confondues dans le cas d'un domaine.

Soit X un ensemble non-connexe. Les parties de X qui ne sont strictement contenues dans aucune autre partie connexe de X s'appellent composantes connexes. Tout ensemble X est la réunion finie ou infinie de ses composantes connexes.

Définition 1.3. Un domaine $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ est simplement connexe si son bord ∂U est un ensemble connexe. Sinon, il s'appelle multiplément connexe.

Proposition 1.1. Les composantes connexes d'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ sont ouvertes.

Preuve : Considérons, pour démontrer cette proposition, une composante connexe V de U . Soit $z_0 \in V$. Il existe $r > 0$ tel que le disque ouvert $\dot{B}_r(z) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ est entièrement dans U . Un disque est un domaine, alors il est connexe. Le disque $\dot{B}_r(z_0)$ est inclus dans la composante connexe de z_0 , c'est-à-dire V . Alors, V est ouvert.

Rappelons qu'un complémentaire $C_X = \mathbb{C} \setminus X$ d'une partie bornée X est dit coborné.

Proposition 1.2. Toute partie cobornée dans \mathbb{C} a une seule composante connexe non bornée. Elle s'appelle la composante connexe de l'infini.

Preuve : Si X est une partie bornée elle peut être incluse dans un disque fermé $\bar{B}_R(0)$ pour un nombre R . Alors, la couronne $A = \{|z| > R\}$ est incluse dans C_X . En étant un domaine, A est connexe et puis, elle est contenue dans une composante connexe non bornée de C_X . Les autres composantes connexes de C_X (s'il y en a) sont disjointes de celle-ci et donc incluses dans le disque $\bar{B}_R(0)$ (et évidemment elles sont bornées!)

1.1.4 Trous

Soit $X \subset \bar{\mathbb{C}}$ un ensemble. Toute composante connexe de $\bar{\mathbb{C}} \setminus X$ qui ne contient pas le point à l'infini, s'appelle un trou de X .

Proposition 1.3. Soit X un ensemble borné. Ses trous sont des composantes connexes bornées de C_X .

Preuve : X admet une seule composante connexe de l'infini (1.2) notée par $C_{X\infty}$. Les autres composantes de $\bar{\mathbb{C}} \setminus X$ sont incluses dans un disque fermé $\bar{B}_R(0)$. Elles sont les composantes bornées de C_X .

D'autre côté,

Proposition 1.4. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Les trous de U sont compacts.

Preuve : Si T est un trou de l'ouvert U c'est à la fois une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus U$ et de $\bar{\mathbb{C}} \setminus U$. Le trou T est fermé dans \mathbb{C} et dans $\bar{\mathbb{C}}$ mais $\bar{\mathbb{C}}$ est un compact (la sphère de Riemann!) alors T est un sous-espace fermé d'un compact et puis est un compact.

Exemple 1. Soit $A = \{r < |z| < R\}$ une couronne. Son complémentaire $C_A = \mathbb{C} \setminus A$ se compose de deux types : l'ensemble non-borné $|z| \geq R$ et un disque $\bar{B}_R(0)$ qui est le trou de la couronne A .

Exemple 2. Soit la bande $X = \{r < \Re z < R\}$. Son complémentaire $C_X = \mathbb{C} \setminus X$ se compose de deux demi-plans fermés. Considérons le complémentaire de X dans le plan compactifié $\bar{\mathbb{C}}$. Il est connexe parce que le point à l'infini appartient à chaque demi-plan de C_X . Alors ce complémentaire dans $\bar{\mathbb{C}}$ n'a pas de trou.

1.1.5 Connexité simple des ouverts dans \mathbb{C} .

Définition 1.4. Un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ s'appelle simplement connexe s'il est connexe et U n'a pas de trous.

La proposition (1.4) montre qu'un ouvert U est simplement connexe si U est connexe et son complémentaire $C_U = \mathbb{C} \setminus U$ n'a pas de composante connexe bornée.

L'exemple 2 fournit aussi un exemple d'un ouvert simplement connexe.

Un ouvert connexe et non simplement connexe s'appelle multiplement connexe.

1.1.6 Rappel : Homotopie des chemins

Soit $I = [0, 1]$ et $U \subset \mathbb{C}$ un domain.

Définition 1.5. On dit que deux chemins $\gamma_0 : I \mapsto U$ et $\gamma_1 : I \mapsto U$ des extrémités communes $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$ sont *homotopes* dans le domaine U s'il existe une application continue

$$\gamma(s, t) : I^2 = I \times I \mapsto U \quad (1)$$

telle que $\gamma(0, t) \equiv \gamma_0(t)$, $\gamma(1, t) \equiv \gamma_1(t)$, $t \in I$ et aussi $\gamma(s, 0) \equiv a$, $\gamma(s, 1) \equiv b$, $s \in I$.

Pour $s = s_0 \in I$ fixe, la fonction $\gamma(s_0, t) : I \mapsto U$ définit un chemin dans le domaine U . Les chemins varient continûment lorsque s_0 varie. Donc, dire que les deux chemins sont homotopes dans U signifie qu'on peut les déformer l'un vers l'autre à l'intérieur de U .

Remarque 1. Par un changement des variables, on peut facilement généraliser cette notion pour un rectangle $[a, b] \times [a', b']$.

Si les chemins γ_1 et γ_2 ont la même "source" : $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et la même "cible" : $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, et soit de plus qu'ils satisfont à la définition (1), alors, on dit, dans ce cas, que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ dans la classe des chemins aux extrémités fixes.

Il faut légèrement modifier les conditions de (1) ($\gamma(s, 0) \equiv \gamma(s, 1)$, $s \in I$) pour avoir l'homotopie des courbes fermées.

Maintenant, on va reformuler la définition (1.4) :

Définition 1.6. Un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ s'appelle simplement connexe si toute courbe fermée dans U est homotope à un chemin constant (= à un point).

L'équivalence des deux définitions est un énoncé des TD.

1.2 Rappel : Dérivation complexe

Soit f une fonction complexe définie dans un ouvert U du plan complexe \mathbb{C} . Etant donné un point $z_0 \in U$, pour tout z dans un voisinage de z_0 on peut considérer la ratio :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (2)$$

Définition 1.7. On dit que f est dérivable au point z_0 si l'expression (2) admet une limite finie lorsque z tend vers z_0 . Cette limite s'appelle la dérivée de f en z_0 .

On peut définir une nouvelle fonction sur U , appelée ainsi dérivée de f . Cette fonction associe à tout point $z \in U$ la valeur de la dérivée en ce point. La fonction dérivée de f se note f' ou $\frac{df}{dz}$.

Définition 1.8. On dit que f est holomorphe dans U si elle est dérivable en tout point de U et que f est holomorphe en z_0 si elle est holomorphe dans un voisinage ouvert de z_0 .

Soit $f : U \mapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable en $z_0 \in U$ alors son accroissement en ce point se représente sous la forme

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \kappa(\Delta z) + o(\Delta z),$$

où κ est une fonction \mathbb{C} -linéaire d'argument Δz et $o(\Delta z)$ un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δz , autrement dit

$$\frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \Delta z \rightarrow 0.$$

Soit f une fonction complexe définie au voisinage d'un point z_0 . Nous pouvons la regarder comme une application $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ et alors on peut parler d'une application différentiable en $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Dans ce cas la différentielle $df(z_0)$ de la fonction f au point z_0 est une application \mathbb{R} -linéaire qui s'exprime par la formule standard :

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy.$$

La proposition suivante met en évidence le fait que la condition de dérivabilité implique nécessairement la condition de différentiabilité :

Proposition 1.5. Si f est dérivable en un point $z_0 \in U$, alors f est différentiable en z_0 et sa différentielle est \mathbb{C} -linéaire.

Soit $f'(z_0)$ la dérivée de f en z_0 . On a donc :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z} - f'(z_0) \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + z) - f(z_0) - f'(z_0)z|}{|z|} = 0.$$

Ce qui montre que la fonction f est différentiable en z_0 et que sa différentielle $df(z_0) = f'(z_0)dz$ est l'application \mathbb{C} -linéaire : $z \mapsto f'(z_0)z$. On peut donner aussi des conditions suffisantes de forme différentielle :

Proposition 1.6. *Soit f une fonction complexe définie au voisinage d'un point z_0 et différentiable en z_0 . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) f est dérivable en z_0 ;
- (2) $df(z_0)$ est \mathbb{C} -linéaire ;
- (3) $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.

Supposons (1). D'après la proposition précédente, $df(z_0)$ est \mathbb{C} -linéaire. Nous considérons $dz = dx + idy$ comme l'application identique de \mathbb{C} , alors on a :

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy = Adx + Bdy.$$

Si $F(z) = Ax + By$ est l'application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui est aussi \mathbb{C} -linéaire, on a en particulier :

$$F(1) = A, F(i) = B = F(i \cdot 1) = iF(1) = iA.$$

D'où $B = iA$ et, par conséquence, (3). Inversement, la condition (3) implique (2). Supposons (2). On peut écrire

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + df(z_0)(z) + |z|\epsilon(z),$$

où $\epsilon(z)$ est une fonction complexe définie au voisinage de 0 et vérifiant la condition $\lim_{z \rightarrow 0} \epsilon(z) = 0$.

La différentielle $df(z_0)$ étant \mathbb{C} -linéaire, il existe un scalaire complexe c tel que $df(z_0)(z) = c \cdot z$, d'où

$$c = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z}.$$

1.3 Rappel : Equations de Cauchy - Riemann

Parfois, on dit qu'une fonction dérivable dans un point $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -différentiable dans ce point. De l'autre côté, il existe un analogue réel de cette notion :

Définition 1.9. On dit qu'une fonction complexe $f : U \mapsto \mathbb{C}$ est \mathbb{R} -différentiable au point z_0 si pour $|\Delta z|$ assez petit son accroissement en ce point se représente sous la forme

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z) = \kappa(\Delta z) + o(\Delta z),$$

où κ est une fonction \mathbb{R} -linéaire et $\frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \rightarrow 0$ lorsque $\Delta z \rightarrow 0$.

L'accroissement d'une fonction \mathbb{R} -différentiable est donc de la forme

$$\Delta f = A\Delta z + B\bar{\Delta}z + o(\Delta z).$$

En posant $\Delta z = \Delta x = \bar{\Delta}z$, on obtient

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = A + B.$$

De façon similaire, en posant $\Delta z = i\Delta y$ et tenant compte que $\bar{\Delta}z = -i\Delta y$, on obtient

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{i\Delta y} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = A - B,$$

d'où

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (3)$$

On va noter le coefficient A (resp. B) par $\frac{\partial f}{\partial z}$ (resp. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$), alors, on a pour la différentielle d'une fonction \mathbb{R} -différentiable :

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \quad (4)$$

On voit sur la formule 4 que les fonctions \mathbb{C} -différentiables (= dérivables) sont des fonctions \mathbb{R} -différentiables telles que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (5)$$

Soit $f = u(x, y) + iv(x, y)$. Les formules (3) nous donnent une autre forme de la condition (5) :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0,$$

d'où on obtient deux égalités réelles (**conditions de Cauchy-Riemann**) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6)$$

Proposition 1.7. *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine $U \subset \mathbb{C}$ et $f = u + iv$. Alors les fonctions u et v sont harmoniques dans U : chacune d'entre elles satisfait l'équation de Laplace :*

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

En effet, les conditions de Cauchy-Riemann (6) donnent :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

et de même pour $v(x, y)$.

1.4 Interprétation géométrique

Selon notre discussion dans 1.1 nous considérons une fonction complexe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ comme une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 :

$$f = u(x, y) + iv(x, y), (x, y) \mapsto (u, v).$$

Si f est \mathbb{R} -différentiable en voisinage d'un point $z = x + iy$ son jacobien J_f est défini par $du \wedge dv = J_f dx \wedge dy$. Ici le produit extérieur est défini sur les différentielles de variables indépendantes de façon suivante :

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0, dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

et

$$\begin{aligned} du \wedge dv &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy = \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} dx \wedge dy = J_f dx \wedge dy. \end{aligned}$$

D'où le jacobien d'une fonction \mathbb{R} -différentiable s'écrit comme

$$J_f = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \quad (7)$$

Pour une fonction holomorphe f son jacobien s'exprime par la formule

$$J_f(z) = |f'(z)|^2. \quad (8)$$

Nous supposons maintenant que $J_f(z) \neq 0$, autrement dit, z n'est pas un point critique de f . Alors le théorème des fonctions implicites est applicable et f est un homéomorphisme local de U , c'est-à-dire, f est biunivoque et bicontinue (= continu avec son inverse).

On voit sur la formule 7 que J_f peut avoir n'importe quel signe si f est \mathbb{R} -différentiable. Par contre, la formule 8 montre que si f est holomorphe, son jacobien est toujours positif dans un point non-critique.

Définition 1.10. Une fonction f \mathbb{R} -différentiable en un point $z \in \mathbb{C}$ définit une application conforme en z si l'application linéaire associée à sa différentielle df en z est une similitude.

Cette définition conduit à une interprétation géométrique de la \mathbb{C} -différentiabilité : il y a équivalence entre la conformité d'une application f en un point z , $f'(z) \neq 0$ et la \mathbb{C} -différentiabilité de f en z .

Définition 1.11. Une application $f : U \mapsto \mathbb{C}$ conforme dans chaque point z de U s'appelle application conforme de U .

Une telle application associée à une fonction holomorphe sans points critiques dans U . En chaque point du domaine U la différentielle de cette application définit une similitude : en particulier, elle conserve les angles.

Plus précisément, soit f une fonction holomorphe dans un domaine U . On suppose que f' ne s'annule pas dans U . Considérons deux chemins γ_i , $i = 1, 2$, $\gamma_i : [a, b] \mapsto U$ tracés dans U . Notons $\delta_i = f \circ \gamma_i$ les images des chemins γ_i par f .

Soit $t_0 \in [a, b]$ une valeur du paramètre telle que $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ est un point commun. Nous supposons aussi que z_0 est un point "ordinaire" de γ_1 et de γ_2 , c'est-à-dire que $\gamma_1'(t_0)$ et $\gamma_2'(t_0)$ existent et sont différents de zéro. Ce sont alors les affixes complexes de vecteurs X_1 et X_2 tangents en z_0 à γ_1 et γ_2 respectivement. Les vecteurs $Y_1 = df(z_0)(X_1)$ et $Y_2 = df(z_0)(X_2)$ sont les vecteurs tangents à δ_1 et δ_2 respectivement au point correspondant $f(z_0)$.

La différentielle $df(z_0)$ est une similitude donc l'angle $(\widehat{X_1, X_2})$ avec son orientation est égale à l'angle $(\widehat{Y_1, Y_2})$ avec son orientation.

Remarque 2. Les considérations géométriques conduites vers la notion d'une application f préservant des angles mais avec l'orientation inverse. Cette application associée avec une fonction f anti-holomorphe dans un domaine U . Cette notion est définie par une condition **duale** à 5 :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (9)$$

1.5 Propriétés géométriques des fonctions holomorphes

Soit f une fonction holomorphe de la variable $z = x + iy$ sur un ouvert U de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

On va noter $f'(z)$, $f''(z)$ etc. ces dérivées premières, secondes etc. par rapport à la variable z .

Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ la même fonction en regardant comme une fonction réelle de classe C^1 . Soit $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ un tel point que $\nabla f(\mathbf{h}) \neq 0$. Alors pour un nombre réel $c \in \mathbb{R}$ la courbe de niveau γ_c est un image géométrique de l'équation $f(\mathbf{h}) = f(x, y) = c$.

Le gradient ∇f est orthogonale à la ligne de niveau.

Les lignes de niveau γ_1 et γ_2 de la partie réelle sont orthogonales à celles de la partie imaginaire :

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | u(x, y) = c_1\};$$

$$\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | v(x, y) = c_2\}.$$

Ce résultat est un corollaire simple des conditions de Cauchy-Riemann (6) sur u et v :

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$-\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Soit $f(x, y)$ une fonction de classe C^2 . Si $z_0 = \mathbf{h}_0 = (x_0, y_0)$ est un point critique, alors $\nabla f(\mathbf{h}_0) = 0$.

La matrice Hessienne des dérivées secondes est définie par

$$Hess f(\mathbf{h}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{h}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{h}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{h}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{h}_0) \end{pmatrix}.$$

On suppose que la matrice Hessienne est non-dégénérée dans $\mathbf{h}_0 = (x_0, y_0)$. Soit $d\mathbf{h}$ un vecteur du petit "déplacement" autour de \mathbf{h}_0 . On obtient, en utilisant le développement de Taylor au seconde ordre que

$$f(\mathbf{h}_0 + d\mathbf{h}) = f(\mathbf{h}_0) + \langle \nabla f, d\mathbf{h} \rangle + \langle d\mathbf{h}, Hess f(\mathbf{h}_0) d\mathbf{h} \rangle + o(\|d\mathbf{h}\|^2).$$

Si le point h_0 est un point critique de la fonction f on a

$$f(\mathbf{h}_0 + d\mathbf{h}) \cong f(\mathbf{h}_0) + \langle d\mathbf{h}, Hess f(\mathbf{h}_0) d\mathbf{h} \rangle.$$

Le comportement local d'une fonction autour d'un point \mathbf{h}_0 où ses dérivées s'annulent est donné par sa matrice Hessienne :

- a) si la matrice $Hess f(\mathbf{h}_0)$ est définie positive (= possède 2 valeurs propres positives), la fonction f admet un minimum au point \mathbf{h}_0 ;
- b) si la matrice $Hess f(\mathbf{h}_0)$ est définie négative (= possède 2 valeurs propres négatives), la fonction f admet un maximum au point \mathbf{h}_0 ;
- c) si la matrice $Hess f(\mathbf{h}_0)$ possède une valeur propre positive et une valeur propre négative, alors la fonction f admet un col au point \mathbf{h}_0 .

Il en résulte notamment que les surfaces - graphes de $u(x, y)$ et de $v(x, y)$ ne peuvent avoir de maximum ou de minimum, mais seulement des points-col. En effet, comme $\Delta u = 0$, les dérivées secondes sont de signes opposés en tout point de holomorphicité de $f = u + iv$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} > 0, \text{ ou } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} < 0.$$

L'étude de la matrice $Hess u$ dans un point minimum (resp. maximum) montre que les dérivées sont toutes deux positives (resp. négatives). Ainsi, tout point critique de u :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

est forcément un col. Les mêmes arguments valent pour v . De plus, les conditions de Cauchy-Riemann (6) montrent que les graphes de u et de v admettent les mêmes points critiques z_0 . La dérivée de f est nulle en ces points : $f'(z_0) = 0$.

1.6 Lignes de niveau en voisinage d'un point critique d'une fonction holomorphe

On considère un exemple simple.

Soit $f(z) = z^2$, alors les lignes de niveau

$$\gamma_1 = \{u(x, y) = x^2 - y^2 = c_1\}, \gamma_2 = \{v(x, y) = 2xy = c_2\}$$

forment une famille des hyperboles orthogonales centrées sur le point critique $z = 0$.

On peut aisément calculer les matrices Hessiennes de u et de v :

$$Hess u(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$Hess v(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vient de voir que le point d'origine $z = 0$ est un point col (aussi appelé le point selle) des fonctions $u(x, y) = x^2 - y^2 = \Re(z^2)$ et $v(x, y) = 2xy = \Im(Z^2)$. Regardons le cas général d'une fonction holomorphe. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe possédant un point critique $z = z_0$, c'est-à-dire, $f'(z_0) = 0$, mais $f''(z_0) \neq 0$, alors, on a un développement $f(z)$ au seconde ordre autour de z_0 :

$$f(z) \cong f(z_0) + 1/2(z - z_0)^2 f''(z_0)$$

On va calculer la matrice Hessienne de la partie réelle et imaginaire de f au point $z = z_0 = x_0 + iy_0$, en posant $f''(z_0) = \alpha + i\beta$. Soit $f(z_0) = u_0 + iv_0$, alors

$$\Re f(x, y) = u_0 + 1/2((x - x_0)^2 - (y - y_0)^2)\alpha - (x - x_0)(y - y_0)\beta;$$

$$\Im f(x, y) = v_0 + 1/2((x - x_0)^2 - (y - y_0)^2)\beta + (x - x_0)(y - y_0)\alpha,$$

d'où les matrices Hessiennes de $\Re f$ et de $\Im f$ au point (x_0, y_0) s'écrivent comme

$$Hess \Re f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix},$$

$$Hess \Im f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres des matrices Hessiennes sont $\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \pm\|f''(z_0)\|$, alors le point critique $z = z_0$ est toujours un point col des parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe.

Remarque 2. On peut utiliser le théorème de la moyenne pour montrer que $\Re f$ (ainsi que $\Im f$) ne peut admettre de maximum ou minimum local en tout point de l'ouvert U . Ce résultat constitue aussi le principe de maximum : la surface $\Re f = u(x, y)$ ne possède jamais de maximum à l'intérieur de l'ouvert U . Les seuls extremas possibles sont les points des bords $\partial\bar{U}$ de son domaine d'existence. Voir Chapitre 2, 2.2

1.7 Principe d'unicité de Riemann

1.7.1 Zéros d'une fonction holomorphe

Définition 1.12. On appelle zéro d'une fonction f tout point $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ tel que $f(z_0) = 0$.

Les zéros d'une fonction holomorphe sont toujours isolés. Contrairement à la situation réelle, ils ne peuvent avoir de points d'accumulation (voir ci-dessous) que sur la frontière du domaine d'holomorphie.

Théorème 1.8. Soit f une fonction holomorphe en z_0 et $f(z_0) = 0$ mais non identiquement nulle dans aucun voisinage de z_0 . Alors il existe un nombre $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ et $g(z)$ est holomorphe en z_0 et non nulle dans un voisinage de z_0 .

Démonstration : La fonction f admet un développement dans un voisinage de z_0 en série de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

avec $a_0 = 0$ mais les autres coefficients a_n ne peuvent être tous nuls (sinon, $f \equiv 0$ dans ce voisinage de z_0). Il existe un nombre m tel que le coefficient $a_m \neq 0$ et

$$f(z) = a_m (z - z_0)^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On pose $g(z) = a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}$. C'est une série convergente dans un voisinage de z_0 et sa somme $g(z)$ est une fonction holomorphe dans ce voisinage. $g(z_0) = a_m \neq 0$ et puis $g(z) \neq 0$ dans un voisinage de z_0 . c.q.f.d.

1.7.2 Théorème d'unicité.

Rappelons la notion d'un point d'accumulation.

Définition 1.13. Un point $z_0 \in \mathbb{C}$ (ou $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$) est un point d'accumulation pour un ensemble $X \subset \mathbb{C}$ (ou $X \subset \bar{\mathbb{C}}$) si tout voisinage coupé de z_0 $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ de \mathbb{C} ($0 < \rho(z, z_0) < \varepsilon$) pour la métrique de la sphère de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$) au moins un point de X .

Théorème 1.9. Soient f, g deux fonctions holomorphes dans un domaine D et elles sont confondues sur un ensemble X qui possède au moins un point d'accumulation $z_0 \in D$, alors $f \equiv g$ dans D .

Démonstration : Soit $F = f - g$. C'est une fonction holomorphe dans D . Désignons par $\text{Ker}F$ l'ensemble

$$\text{Ker}F = \{z \in D : F(z) = 0\} \supset X.$$

Le point d'accumulation $z_0 \in X$ est donc un point de $\text{Ker}F$ et aussi un zéro de F par continuité. Le théorème (1.8) dit que $F \equiv 0$ dans un voisinage de z_0 (sinon z_0 ne serait pas un point d'accumulation de l'ensemble des zéros de F).

Soit Ker_0F l'ensemble de ses points inférieurs. Il contient (au moins) le point z_0 . Cet ensemble est ouvert par sa construction. De l'autre côté, si $z' \in D$ est un autre point d'accumulation de Ker_0F , la fonction $F \equiv 0$ dans un voisinage du point z' par le théorème (1.8), alors $z' \in \text{Ker}_0F$. Le domaine D est connexe par définition, alors $\text{Ker}_0F \subset D$ est à la fois ouvert et fermé. Donc, $D = \text{Ker}_0F$. c.q.f.d.

1.8 Principe de l'argument

1.8.1 Résidu logarithmique d'une fonction méromorphe

Nous considérons f holomorphe non nulle dans un voisinage coupé d'un point $z_0 \in \mathbb{C} : U_r(z_0) = 0 < |z - z_0| < r$ (on dit parfois que $U_r(z_0)$ est le disque $B_r(z_0)$ avec un point "marqué" $z = z_0$.)

Définition 1.14. On appelle résidu logarithmique de f en z_0 le résidu

$$\text{Res}_{\log z_0} f(z) = \text{Res}_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi} \oint_{S_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

où $S_r = |z - z_0| = r$.

Cette notion du résidu logarithmique permet de généraliser le calcul des résidus en cas des zéros de la fonction f . Une telle classe de fonctions forme les fonctions dites *méromorphes* :

Définition 1.15. On dit qu'une fonction f est méromorphe dans un domaine D si f est holomorphe partout dans D sauf singularités isolés qui sont des pôles.

Soit f une fonction méromorphe dans un domaine D avec un zéro z_0 d'ordre m : $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, où $g(z)$ est une fonction holomorphe non nulle en voisinage de z_0 . Alors un calcul simple montre

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{mg(z) + (z - z_0)g'(z)}{g(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1}$$

d'où le résidu logarithmique en un zéro est égal à l'ordre de ce zéro :

$$\text{Res}_{\log z_0} f(z) = m. \tag{10}$$

Soit z_0 un pôle d'ordre k d'une fonction f , alors $\frac{1}{f}$ possède en ce point un zéro de même ordre k et la formule évidente

$$\frac{f'}{f} = - \left(\log \frac{1}{f} \right)'$$

montre que

$$\text{Res}_{\log z_0} f(z) = -k. \tag{11}$$

1.8.2 Sens géométrique du résidu logarithmique.

Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine. Un lacet, tracé dans D est un chemin continu fermé $\gamma : [a, b] \rightarrow D$, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Supposons que le lacet γ est la frontière d'un domaine $U \Subset D$, $\gamma = \partial U$.

Nous supposons qu'une fonction f est méromorphe dans D telle que le lacet γ ne contient ni pôles ni zéros de f .

Considérons l'intégrale de la dérivée logarithmique de f

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_{\gamma} d \log f(z) = \text{Log } f(\gamma(a)) - \text{Log } f(\gamma(b)),$$

où $\text{Log } f(\gamma(t))$, $a \leq t \leq b$ est la primitive de la fonction $\frac{f'}{f}$ le long de γ et Log est une valeur quelconque du logarithme, variant continûment sur le lacet.

On a :

$$\text{Log } f(\gamma(t)) = \text{Log} (|f(\gamma)| \exp(i \text{Arg } f(\gamma))) = \log |f(\gamma)| + i \text{Arg } f(\gamma).$$

La fonction $\log f$ est univalente, alors nous avons besoin de déterminer l'argument $\text{Arg } f$ le long γ . Soit $\arg f$ une détermination de $\text{Arg } f$ variant continûment le long γ . Alors,

$$\text{Log } f(\gamma(a)) - \text{Log } f(\gamma(b)) = \log |f(\gamma(b))| - \log |f(\gamma(a))| + i(\arg f(\gamma(b)) - \arg f(\gamma(a))) =$$

$$i(\arg f(\gamma(b)) - \arg f(\gamma(a))) = i \Delta_{\gamma} \arg f,$$

où $i \Delta_{\gamma} \arg f$ est, par définition, l'accroissement de l'argument (plus précisément, de sa détermination retenue), le long du lacet γ .

Exemple 3. Sous les conditions et notations de la définition (1.14) on a

$$\text{Res}_{\log z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{S_r} \arg f.$$

1.8.3 Nombres de pôles et de zéros d'une fonction méromorphe.

Théorème 1.10. Soient $Z = \# \mathcal{Z}$ et $P = \# \mathcal{P}$ les nombres de zéros et de pôles respectivement d'une fonction f (en comptant avec leurs ordres). La fonction f est méromorphe dans un domaine U tel que $U \Subset D$ pour un autre $D \subset \mathbb{C}$. Supposons qu'un lacet orienté γ est la frontière du U , $\gamma = \partial U$ et que γ ne contient ni pôles ni zéros de f . Alors

$$Z_f - P_f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Démonstration : Tout d'abord, remarquons, que f possède un nombre fini de zéros et de pôles dans $U \Subset D : \mathcal{Z} = \{a_i, 1 \leq i \leq q\}$ et $\mathcal{P} = \{b_i, 1 \leq i \leq p\}$. La

fonction $\frac{f'}{f}$ est holomorphe en voisinage de γ et le théorème de Cauchy (dit des résidus) est applicable à cette fonction :

$$\oint_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = 2\pi i \sum_l \text{Res}_{z=z_l} \frac{f'}{f},$$

où z_1, z_2, \dots sont les pôles de $\frac{f'}{f}$.

Mais, après l'observation à la fin de (1.7.1) les pôles de $\frac{f'}{f}$ sont les zéros et les pôles de f , alors

$$\sum_l \text{Res}_{z=z_l} \frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^q \text{Res}_{z=a_i} \frac{f'}{f} + \sum_{i=1}^p \text{Res}_{z=b_i} \frac{f'}{f}.$$

Soient m_i et k_i les ordres respectifs du zéro a_i et du pôle b_i . Donc, on a, grâce à (10) et à (11)

$$\sum_l \text{Res}_{z=z_l} \frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^q m_i - \sum_{i=1}^p k_i = Z_f - P_f,$$

c.q.f.d.

Corollaire 1.1. ("Le principe de l'argument")

L'accroissement (divisée par 2π) de l'argument d'une fonction f , (méromorphe dans un domaine D), le long d'un lacet orienté γ est égal à la différence entre le nombre Z_f de zéros et le nombre P_f de pôles de f dans un domaine U , $\gamma = \partial U$, $U \Subset D$:

$$Z_f - P_f = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f.$$

1.9 Théorème de Rouche

C'est une application la plus importante du principe de l'argument de (1.1).

Théorème 1.11. Soient f et g deux fonctions holomorphes dans un domaine D tel que sa frontière $\gamma = \partial D$ est un lacet continu. Soit $|f| > |g|, \forall z \in \gamma$, alors f et $f + g$ possèdent le même nombre de zéros dans D .

Démonstration : Il est clair que f et $f + g$ n'ont pas de zéros sur $\gamma : |f| > |g| \geq 0$ sur γ et si $g = 0$ sur γ on a $|f| = |f + g| \geq |f| - |g| = |f| > 0$. Etant holomorphes elles n'ont pas de pôles non plus, alors le corollaire (1.1) est applicable :

$$\Delta_{\gamma} \arg (f + g) = \Delta_{\gamma} \arg f + \Delta_{\gamma} \arg \left(1 + \frac{g}{f}\right)$$

car $f + g = f(1 + \frac{g}{f})$ puisque $f \neq 0$ sur γ . Soit $\alpha = \frac{g}{f}$ et $\beta = 1 + \alpha$.

On a $\left|\frac{g}{f}\right| = \left|\frac{g}{f}\right| = |\alpha| < 1$ sur γ . L'accroissement divisé $\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg(1 + \alpha)$ est le nombre total de rotations du vecteur $\beta = 1 + \alpha(z)$ autour du point $\beta = 0$ lorsque z parcourt le lacet γ . La condition $|\alpha(z)| < 1, \forall z \in \gamma$ garantit qu'il n'y a pas de rotation du vecteur β et l'accroissement de l'argument est nul. Donc

$$\Delta_\gamma \arg(f + g) = \Delta_\gamma \arg f$$

et $Z_{f+g} = Z_f$ dans D c.q.f.d.

1.10 Théorème de Riemann de l'image ouvert.

C'est une caractérisation géométrique importante des fonctions holomorphes parfois appelée "conservation de domaine".

Théorème 1.12. *Soit D un domaine et f une fonction holomorphe non-constante dans D . Alors l'image $f(D)$ est aussi un domaine.*

Démonstration : Nous démontrerons que $f(D)$ est connexe et ouvert. Soient $z_i, i = 1, 2$ deux points du domaine D et $w_i = f(z_i), i = 1, 2$ leurs images dans $f(D)$. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ un chemin paramétré dans D tel que $z_1 = \gamma(a), z_2 = \gamma(b)$. Un tel chemin existe car D est connexe par arcs (1.2). Par la continuité de f on a un chemin $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow f(D)$ reliant les points w_1 et w_2 , ce qui montre connexité par arcs de l'image $f(D)$.

Soit $w_0 \in f(D)$ et $z_0 \in D$ une pré-image de w_0 . Considérons un tel disque fermé $\bar{B}_r(z_0)$ dans D qui ne contient pas d'autres points antécédents de w_0 . C'est toujours possible, en faisant le rayon r d'être assez petit et car les points antécédents de w_0 sont séparés ou isolés. Sinon, la fonction $f \equiv \text{const}$ par le théorème d'unicité de Riemann (1.9).

Soit $S_r = \partial \bar{B}_r(z_0) = |z - z_0| = r$ et posons

$$m_f = \min_{z \in \gamma} |f(z) - w_0|.$$

La fonction continue $f(z) - w_0$ admet son minimum sur le compact S_r et $m_f > 0$ ($m_f \neq 0$ car z_0 une seule pré-image de w_0 par choix de r et par construction du disque $B_r(z_0)$).

Soit $w_1 \in \bar{B}_r(z_0)$, alors $|w_1 - w_0| < m_f$ et $f(z) - w_1 = (f(z) - w_0) + (w_0 - w_1)$. Sur le cercle S_r on a : $|f(z) - w_0| \geq m_f$. Le théorème de Rouché (1.11) nous dit que la fonction $f(z) - w_1$ possède le même nombre de zéros que la fonction $f(z) - w_0$ (au moins un lorsque z_0 peut être un zéro multiple).

La fonction f prend la valeur w_1 à l'intérieur de S_r et donc, $w_1 \in f(D)$. Le point w_1 est arbitraire du disque $B_{m_f}(w_0)$ alors le disque entier appartient à $f(D)$ et l'image est ouverte.

Remarque 3. Cette démonstration utilise la continuité de f pour la connexité par arc de $f(D)$ et les théorèmes de Rouché (1.11) et de l'unicité (1.9) pour prouver que $f(D)$ était ouvert. L'exemple suivant montre que la continuité de f n'est pas suffisante pour le principe de conservation des domaines :

Soit $f = x^2 + iy, D = B_1(0) = |z| < 1$. La fonction f n'est pas holomorphe : les conditions de Cauchy-Riemann (6) sont violées car $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 1$, alors $f(D)$ n'est pas ouvert puisque les images du diamètre verticale $-1 < y < 1$ (les points intérieurs de D) sont des points de $\partial f(D)$.

2 Principe du maximum

Le principe du maximum est un des résultats fondamentaux de la théorie géométrique des fonctions d'une variable complexe. Nous l'exprimons dans la forme du

2.1 Théorème du maximum

Théorème 2.1. *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D et son module $|f|$ admet un maximum local en un point $z_0 \in D$, alors $f \equiv \text{const}$.*

Démonstration : Soit $f \neq \text{const}$ et $f(D)$ -l'image du domaine D qui est aussi un domaine, car f est holomorphe non constante. Notre fonction f transforme z_0 en un point $w_0 = f(z_0) \in f(D)$. Considérons un disque ouvert

$$B_r(w_0) : |w - w_0| < r, \quad B_r(w_0) \subset f(D)$$

et un point $w_1 \in B_r(w_0)$ tel que $|w_1| > |w_0|$. Mais notre fonction f prend cette valeur w_1 dans le voisinage de z_0 et ce fait contredit l'assertion que $|f|$ admet son maximum en z_0 . c.q.f.d.

On peut préciser l'énoncé du théorème du maximum en supposant que notre fonction a un "bon" comportement dans la frontière ∂D du domaine D d'holomorphicité :

Théorème 2.2. *Soit f holomorphe dans un domaine D et continue dans \bar{D} alors son module $|f|$ admet sa valeur maximale sur ∂D .*

Démonstration : Soit $f \neq \text{const}$ alors, (selon le théorème 2.1), $|f|$ ne peut atteindre sa valeur maximale dans D . Etant continue dans \bar{D} elle admet son maximum dans \bar{D} et donc sur ∂D . Si f est une constante le résultat est une banalité.

Remarque 4. La condition de continuité sur ∂D est nécessaire. Pour l'illustrer, on prend comme D le disque ouvert $z = x + iy : x^2 + y^2 < x$ et $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ comme la fonction. Elle est holomorphe dans D et continue dans \bar{D} sauf $z = 0$. Son module $|\exp(\frac{1}{z})| = \exp(\frac{x}{x^2+y^2}) = x$ sur $\partial D \setminus \{0\}$ et il prend toute valeur assez grande à l'intérieur de D .

Il faut souligner que le résultat parallèle pour le minimum du module généralement est faux :

Exemple 4. Soit $f(z) = z$ et D le disque ouvert $B_1(0) = |z| < 1$. Le module $|z|$ admet son minimum à l'origine $z = 0$.

En ajoutant une condition naturelle (f ne s'annule pas dans D) on a un "théorème-homologue" de 2.1

Théorème 2.3. *Soit f une fonction holomorphe non nulle dans un domaine D , alors son module $|f|$ admet sa valeur locale minimale à l'intérieur de \bar{D} si et seulement si $f \equiv \text{const}$.*

Démonstration : Si f admet un minimum et est holomorphe non nulle dans D , alors la fonction $\frac{1}{f}$ est holomorphe et satisfait aux conditions du théorème 2.1.

Nous proposons encore une démonstration "analytique" du théorème 2.1 pour une fonction f holomorphe dans un ouvert U .

Théorème 2.4. *Soit f holomorphe dans un ouvert U et $|f|$ admet son maximum local en $z_0 \in U$, alors f est constante en voisinage de z_0 .*

Démonstration : Soit $r > 0$ tel que le disque fermé $\bar{B}_r(z_0) \subset U$. Si z_0 est un maximum local on peut choisir r tel que sur le cercle $S_r = \partial \bar{B}_r(z_0) = |z - z_0| = r$ on a :

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|.$$

La fonction f admet un développement de Taylor en z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (12)$$

où les coefficients a_n admettent une autre représentation (dite intégrale) :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (13)$$

ou, en passant vers la forme exponentielle $\xi = z_0 + r \exp(i\phi)$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r \exp(i\phi)) \exp(-in\phi)}{r^n} d\phi.$$

Donc, l'expression $a_n r^n$ n'est qu'un coefficient de Fourier pour la fonction périodique $f(z_0 + r \exp(i\phi))$ d'une variable réelle ϕ à valeur complexe.

Nous observons que les coefficients de Fourier d'exponentielle "positive" s'annulent, car

$$a_n = \frac{r^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r \exp(i\phi)) \exp(in\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_r} f(\xi) (\xi - z_0)^{n-1} d\xi = 0$$

(la fonction $f(z)(z - z_0)^{n-1}$ est holomorphe pour $n \geq 1$ dans le disque contenant S_r !)

Donc, nous pouvons utiliser l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r \exp(i\phi))|^2 d\phi = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

d'où la condition du théorème implique

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r \exp(i\phi))|^2 d\phi \leq |f(z_0)|^2$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq |f(z_0)|^2 = |a_0|^2$$

ce qui résulte $a_n = 0$, $n \geq 1$ et $f(z) = a_0$ pour $z \in \bar{B}_r(z_0)$ c.q.f.d.

Le théorème suivant nous permet de faire une estimation (dite *l'estimation de Cauchy*) des dérivées d'une fonction holomorphe dans un disque $\bar{B}_r(z_0)$ fermé :

Théorème 2.5. *Si f est holomorphe dans $\bar{B}_r(z_0)$ et $|f(z)| \leq M$ sur le cercle $S_r = \partial\bar{B}_r(z_0)$ alors les coefficients a_n de la série (12) satisfont aux inégalités :*

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}. \quad (14)$$

Démonstration : Après la représentation intégrale (13) de a_n on a :

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^n}, \quad (n = 0, 1, \dots)$$

c.q.f.d.

Corollaire 2.1.

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}, \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Corollaire 2.2. ("Théorème de Liouville") Toute fonction entière bornée est constante.

Preuve : Soit $r < \infty$ et $\bar{B}_r(0)$ un disque fermé. La fonction f se représente par $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Soit $|f(z)| \leq M$, alors $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ après (14). Soit r aussi grand que l'on veut. Alors on a (pour $n = 1, 2, \dots$) $a_n = 0$ (le second terme tend vers 0 lorsque $r \rightarrow \infty$ et le premier terme ne dépend pas de r). D'où $f(z) \equiv a_0$.

Une autre formulation du théorème de Liouville (2.2) est

Théorème 2.6. *Si f est holomorphe sur $\bar{\mathbb{C}}$ elle est constante.*

2.1.1 Etude géométrique de la surface $|f(z)|$.

Soit $f = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction holomorphe dans un domaine D des coordonnées réelles $(x, y) \in D$, $z = x + iy$. Etudions les maximums et minimums locaux de la fonction $|f(z)|$ en calculant les points critiques où les dérivées $\frac{\partial|f|}{\partial x}$ et $\frac{\partial|f|}{\partial y}$ ou, ce qui est la même chose, les dérivées $\frac{\partial|f|}{\partial z}$, $\frac{\partial|f|}{\partial \bar{z}}$.

Proposition 2.7. *Les points critiques d'une fonction holomorphe f sont soit ses zéros soit les zéros de f' , donc, soit les minimums de $|f|$ sur le niveau $|f| = 0$ soit points-cols.*

Preuve : En calculant les dérivées par z et \bar{z} on a :

$$\frac{\partial|f|}{\partial z} = \frac{\partial(\sqrt{f\bar{f}})}{\partial z} = \frac{\bar{f}}{2|f|} \frac{\partial(f\bar{f})}{\partial z} = \frac{\bar{f}}{2|f|} f'(z)$$

et

$$\frac{\partial|f|}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(\sqrt{f\bar{f}})}{\partial \bar{z}} = \frac{f}{2|f|} \frac{\partial(f\bar{f})}{\partial \bar{z}} = \frac{f}{2|f|} \bar{f}'(z)$$

d'où le résultat. Pour voir que points critiques où $f'(z) = 0$ sont des points-cols rappelons (Chapitre 1 1.5).

Finalement, nous établirons un lien entre les extremas de $|f|$ d'une fonction holomorphe et les extremas de ses parties réelle $u(x, y)$ et imaginaire $v(x, y)$.

Proposition 2.8. *Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe dans un domaine D . Soit $u \equiv \text{const}$ (ou $v \equiv \text{const}$) dans D . Alors la fonction f est constante dans D .*

Preuve : Soit $u \equiv \text{const}$. Considérons une autre fonction holomorphe $\exp(f(z))$ sur D . Son module $|\exp(f(z))| = \exp(u)$ est une constante dans D . Alors, d'après le théorème (2.1) cette fonction est constante. La dérivée $(\exp(f))' = \exp(f)f'(z) \equiv 0$ d'où $f'(z) \equiv 0$ et $f \equiv 0$ dans D .

2.2 Lemme de Schwarz

Théorème 2.9. *Soit f une fonction holomorphe dans le disque ouvert $B_1(0)$ telle que $|f(z)| \leq 1$, $\forall z \in B_1(0)$ et $f(0) = 0$. Alors*

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in B_1(0).$$

L'égalité est achevée au moins en un point $z \neq 0$.

Remarque 5. Si $f(z) = \exp(i\phi)z$ avec une constante $\phi \in \mathbb{R}$, alors $|f| = |z|$ partout dans $B_1(0)$.

Démonstration : Soit $F(z) := \frac{f(z)}{z}$. C'est une fonction holomorphe dans $B_1(0)$ (on n'a pas de singularité à l'origine en vue $f(0) = 0$). Considérons un autre disque ouvert

$$B_r(0) \subset B_1(0), \quad (r < 1).$$

Le module $|F(z)|$ admet son maximum local sur le cercle $C_r = \partial B_r(0)$, et, de plus, sur C_r , en vue de la condition $|f(z)| \leq 1$ on obtient (par le théorème 2.2)

$$|F(z)| = \frac{|f|}{|z|} = \frac{|f|}{r} \leq \frac{1}{r} \quad (15)$$

d'où $|F(z)| \leq \frac{1}{r}$, $\forall z \in B_r(0)$.

Si r tend vers 1 et z reste fixé, l'inégalité (15) implique $|F(z)| \leq 1$ ou $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in B_r(0)$. L'inégalité du théorème est démontrée puisque dans chaque point du disque $B_1(0)$ nous pouvons considérer dans un disque $B_r(0)$, $r < 1$.

Discutons le cas d'égalité. Soit $z_0 \in B_1(0)$ un point où l'égalité $f(z) = |z|$ est réalisée. Alors, $F(z)$ admet son maximum $F(z_0) = 1$. La fonction $F(z)$ est une constante avec $|F| = 1$ d'où $F(z) = \exp(i\phi)$ et $f(z) = \exp(i\phi)z$.

2.3 Principe de Phragmen-Lindelöf

Une généralisation du principe du maximum est possible si la fonction f admet une croissance "contrôlée" lorsque z s'approche d'un point singulier de la frontière.

Pour cela, considérons un angle $D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}\}$. On suppose que ∞ est un point singulier de la frontière ∂D_α . Nous introduisons deux paramètres numériques qui caractérisent la croissance de f au voisinage de l'infini : soit $\gamma_r = \{|z| = r, z \in D_\alpha\}$ un arc de l'angle et

$$M_f(r) = \max_{z \in \gamma_r} |f(z)|.$$

Définition 2.1. On dit que ρ est l'ordre angulaire de f si

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}$$

et que σ dit de type angulaire de f si

$$\sigma = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M_f(r)}{r^\rho}.$$

Théorème 2.10. Soit f une fonction holomorphe dans l'angle D_α , continue aux points finis de la frontière ∂D_α et telle que $|f(z)| \leq M$ dans tout point fini de ∂D_α . Si l'ordre angulaire ρ de f satisfait à $\rho < \alpha$ alors $|f(z)| \leq M$ partout dans D_α .

Démonstration : Soient deux nombres $\varepsilon > 0$ et $\rho < \rho' < \alpha$. Etudions la fonction

$$f_\varepsilon(z) = f(z) \exp(-\varepsilon z^{\rho'}),$$

telle que la branche de $\exp(-\varepsilon z^{\rho'})$ est définie par $|\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}$. Nous prenons $z = r \exp(i\phi)$:

$$|f_\varepsilon(z)| = |f(z)| \exp(-\varepsilon r^{\rho'} \cos(\rho'\phi)).$$

Sur la frontière ∂D_α on a : $\phi = \pm \frac{\pi}{2\alpha}$ et $|\rho'\phi| = \frac{\pi\rho'}{2\alpha} < \frac{\pi}{2}$. On obtient $|f_\varepsilon(z)| \leq M$ et (en utilisant la notion et la définition (2.1) de l'ordre angulaire) que

$$|f_\varepsilon(z)| < C_1 \exp(C_2 r^\rho - \varepsilon r^{\rho'} \cos(\rho'\phi)).$$

Puisque

$$\cos(\rho'\phi) \geq \cos\left(\frac{\pi\rho'}{2\alpha}\right) > 0 \quad \rho < \rho'$$

sur l'arc, on obtient

$$\lim_{r \rightarrow \infty} C_1 \exp(C_2 r^\rho - \varepsilon r^{\rho'} \cos(\rho'\phi)) = 0,$$

et, alors, pour r assez grands $|f_\varepsilon(z)| \leq M$ sur cet arc. Le principe du maximum s'appliquant au secteur $\partial D_\alpha \cup \gamma_r$ dit que $|f_\varepsilon(z)| \leq M$ pour tout z du secteur. En faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, (vue que $\varepsilon > 0$ est arbitraire), on obtient $|f(z)| \leq M$ en tout $z \in D_\alpha$ c.q.f.d.

2.4 Formule de Poisson

Tout d'abord, nous démontrerons un corollaire utile de la formule de Cauchy :

Théorème 2.11. Soit f une fonction holomorphe dans le disque $B_r(0)$, prolongeable par continuité dans le disque fermé $\bar{B}_r(0)$. Alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) P(\xi, z) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \frac{r^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} d\theta, \quad (16)$$

Ici $\xi = r \exp(i\theta)$.

Remarque 6. L'intégrale (16) s'appelle l'intégrale de Poisson et la fonction

$$P(\xi, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} = \frac{1}{2\pi} \Re \frac{\xi + z}{\xi - z}$$

s'appelle le noyau de Poisson.

Preuve : Soit $z \in B_r(0)$, alors d'après la formule de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{f(\xi)\xi}{\xi - z} d\theta. \quad (17)$$

En tenant compte du fait que par le théorème de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi)\xi\bar{z}}{\xi\bar{z} - r^2} d\theta = 0,$$

parce qu'un seul pôle de la fonction sous l'intégrale est $\xi = \frac{r^2}{\bar{z}}$ et il est en dehors du disque $B_r(0)$ car il est symétrique de $z \in B_r(0)$ par rapport à S_r , on obtient (16), en utilisant la représentation

$$\frac{\xi}{\xi - z} - \frac{\xi\bar{z}}{\xi\bar{z} - r^2} = \frac{r^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2}.$$

Remarque 7. Comme f est holomorphe (on a $\bar{\partial}f = 0$ dans $B_r(0)$) elle est aussi *harmonique*, c'est-à-dire, $\Delta f = 0$ car $\Delta = 4\partial\bar{\partial}$. Il est évident que les parties réelle et imaginaire de f sont harmoniques (les conditions de Cauchy-Riemann du Chapitre 1 (6)).

Réciproquement, si $u(x, y)$ est une fonction à valeur réelle $u : B_r(0) \mapsto \mathbb{R}$ définie comme la partie réelle d'une fonction complexe f par la formule

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{\xi + z}{\xi - z} d\theta$$

dans $B_r(0)$ alors u est harmonique dans $B_r(0)$ car f est holomorphe (voir TD2).

2.5 Fonction de Schwarz

On peut déduire de la formule de Poisson en utilisant une fonction $u_0(\zeta)$ sur le cercle $S_r = |\zeta| = r$. On pose $\zeta = r \exp(it)$, alors $u_0(\zeta) = u_0(r \exp(it)) = \tilde{u}_0(t)$ et $\tilde{u}_0(0) = \tilde{u}_0(2\pi)$.

Définition 2.2. L'intégrale suivante

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{S_r} u_0(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(r \exp(it)) \frac{r \exp(it) + z}{r \exp(it) - z} dt \quad (18)$$

est dite *l'intégrale de Schwarz* (ou la *fonction de Schwarz*)

Les propriétés de la fonction de Schwarz :

1. $f(z)$ est une fonction holomorphe dans tout le domaine U qui ne contient pas de points de la courbe S_r . Par exemple, f est holomorphe dans le disque ouvert $B_r(0)$.

Pour le vérifier il suffit de représenter la formule 2.2 comme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{S_r} u_0(\zeta) \frac{2d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi} \oint_{S_r} \frac{u_0(\zeta)}{\zeta} d\zeta. \quad (19)$$

La première intégrale dans (19) est une intégrale du type Cauchy, le second terme est une constante.

2. Soit $z \in B_r(0)$, $u_0(\zeta) \equiv 1$ alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{S_r} \frac{2d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi} \oint_{S_r} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2 - 1 = 1. \quad (20)$$

3. Soit $f = u + iv$ et $z = |z| \exp(i\theta) \in B_r(0)$. On peut calculer (en utilisant (2.2)) la valeur de $u(|z| \exp(i\theta))$:

$$\Re f(z) = \Re \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(r \exp(it)) \frac{r \exp(it) + |z| \exp(i\theta)}{r \exp(it) - |z| \exp(i\theta)} dt =$$

$$\begin{aligned} & \Re \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(r \exp(it)) \frac{(r \exp(it) + |z| \exp(i\theta))(r \exp(-it) - |z| \exp(-i\theta))}{(r \exp(it) - |z| \exp(i\theta))(r \exp(-it) - |z| \exp(-i\theta))} dt = \\ & \Re \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(r \exp(it)) \frac{r^2 - |z|^2 + r|z|(\exp(i(\theta - t)) - \exp(-i(\theta - t)))}{r^2 + |z|^2 - r|z|(\exp(i(t - \theta)) + \exp(-i(t - \theta)))} dt = \\ & \Re \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(r \exp(it)) \frac{r^2 - |z|^2 + 2ir|z| \sin(\theta - t)}{r^2 + |z|^2 - 2ir|z| \cos(t - \theta)} dt = \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(r \exp(it)) \frac{r^2 - |z|^2}{r^2 + |z|^2 - 2r|z| \cos(t - \theta)} dt = u(|z| \exp(i\theta)). \end{aligned}$$

Nous reconnaitre dans cette formule une version de la formule (16).

4. On utilise la propriété 2 et obtient $\forall z = |z| \exp(i\theta) \in B_r(0)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{r^2 + |z|^2 - 2r|z| \cos(t - \theta)} dt = 1. \quad (21)$$

La fonction $u(|z|, \theta) = \Re f$ est bien définie et continue dans $B_r(0)$.

En fait, elle est aussi continue dans l'adhérence $\bar{B}_r(0)$, et plus précisément, on peut démontrer le

Théorème 2.12. La fonction $u_0(r, t)$ est une limite uniforme de la fonction $u(|z|, \theta)$ lorsque $z = |z| \exp(i\theta) \rightarrow \zeta = r \exp(it)$ le long de tout chemin appartenant à $B_r(0)$.

Démonstration : On considère une fonction $F(z, \zeta) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\zeta = r \exp(it), \quad z = |z| \exp(i\theta), \quad 0 \leq |z| < r, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Soit :

1. $F(z, \zeta)$ continue et non-négative ;

- 2.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z, \zeta) dt = 1, \quad \forall z;$$

3. $F(z, \zeta) \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow \zeta_0$, $\zeta_0 = r \exp(it_0) \in S_r$ et $\zeta \neq \zeta_0$ uniformément par ζ .

Alors $\forall u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, où $u(\zeta)$ est continue par morceaux et n'ayant que des points de discontinuité de première espèce, pour tout point de continuité ζ_0 la limite

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) F(z, \zeta) dt = u(\zeta_0). \quad (22)$$

Pour vérifier cette assertion on remarque que (en vue de 2)

$$u(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta_0) F(z, \zeta) dt. \quad (23)$$

La fonction u est continue en ζ_0 et l'accroissement

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(\zeta) - u(\zeta_0))F(z, \zeta)dt$$

se développe comme

$$\Delta = I_1 + I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{|t-t_0| < 2\delta} (u(\zeta) - u(\zeta_0))F(z, \zeta)dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t-t_0| > 2\delta} (u(\zeta) - u(\zeta_0))F(z, \zeta)dt,$$

où I_1 et I_2 se calculent le long des morceaux des arcs du cercle S_r avec les arguments satisfaisant les conditions correspondantes : $|t-t_0| < 2\delta$ et $|t-t_0| > 2\delta$. Maintenant, $\forall \epsilon > 0$ il existe un tel nombre $\delta > 0$ tel que la condition $|t-t_0| < 2\delta$ implique $|u(\zeta) - u(\zeta_0)| < \epsilon$ alors

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t-t_0| < 2\delta} |u(\zeta) - u(\zeta_0)|F(z, \zeta)dt < \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi F(z, \zeta)dt = \epsilon.$$

Soit $|\theta - t_0| < \delta$ alors si $|t - t_0| > 2\delta$ on a $|\theta - t| > \delta$ et (en vue de 3) il existe un tel nombre $\rho < r$ tel que pour $|z| > r - \rho$ on a $F(z, \zeta) < \epsilon$.

Alors pour tout z tel que $|\theta - t_0| < \delta$ et $|z| > r - \rho$ on obtient

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{|t-t_0| > 2\delta} (u(\zeta) - u(\zeta_0))F(z, \zeta)dt \right| < \frac{\epsilon}{2\pi} 2M(2\pi - 2\delta) < 2M\epsilon,$$

où $M = \sup_{\zeta \in S_r} |u(\zeta)|$, donc, $|\Delta| < (1 + 2M)\epsilon$

Mais ϵ est arbitraire et puis

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta)F(z, \zeta)dt = u(\zeta_0).$$

Si on prend $F(z, \zeta) = \frac{r^2 - |z|^2}{r^2 + |z|^2 - 2r|z|\cos(\theta - t)}$, $u(\zeta) = u_0(\zeta)$ on obtient le théorème.

2.6 Réciproque du théorème du maximum

Nous proposons ici un argument qui affirme que les propriétés des fonctions formalisées dans le théorème du maximum caractérisent toute fonction holomorphes.

Théorème 2.13. Soit $\bar{B}_1(0)$ le disque unité fermé, $S_1 = \partial B_1(0)$ son cercle unitaire et $C(B_1(0); \mathbb{C})$ - l'ensemble de fonctions complexes continues telles que $1 \in C(\bar{B}_1(0); \mathbb{C})$ et si $f \in C(\bar{B}_1(0); \mathbb{C})$ on a $id(f)$ est aussi une fonction de $C(\bar{B}_1(0); \mathbb{C})$ où $id : z \rightarrow z$ est la fonction identité. Si encore

$$\|f\|_{B_1(0)} = \|f\|_{S_1} \quad (24)$$

alors toute fonction $f \in C(\bar{B}_1(0); \mathbb{C})$ est holomorphe dans $B_1(0)$.

Démonstration : Les conditions que $1 \in C(\bar{B}_1(0); \mathbb{C})$ et que $id(f) \in C(\bar{B}_1(0); \mathbb{C})$ si $f \in C(\bar{B}_1(0); \mathbb{C})$ garantissent que $C(\bar{B}_1(0); \mathbb{C})$ contient les polynômes. La condition (24) nous assure (avec les théorèmes de Riesz et de Hahn-Banach) qu'il existe une mesure positive μ_z (pour chaque $z \in B_1(0)$) tel que

$$f(z) = \oint_{S_1} f d\mu_z \quad (25)$$

pour $f \in C(\bar{B}_1(0); \mathbb{C})$.

Soit $f(z) = f_n(z) = z^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, alors grace (25) on obtient

$$z^n = |z|^n \exp(-i\theta) = \oint_{S_1} f_n d\mu_z.$$

Mais $f_{-n} = \bar{f}_n$ sur S^1 alors

$$|z|^{|n|} \exp(-in\theta) = \oint_{S_1} f_n d\mu_z, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Cette intégrale est réelle et la série réelle suivante

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |z|^{|n|} \exp(in(\theta - t)), \quad t - \text{réel}, \quad (26)$$

est convergente (elle est majorée par la série $\sum_n |z|^{|n|}$ et $|z| < 1$).

Pour calculer sa somme il suffit d'observer que (26) est la partie réelle de la série

$$1 + 2 \sum_1^{\infty} z^n \exp(-int) = \frac{\exp(it) + z}{\exp(it) - z}$$

d'où (après (6))

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |z|^{|n|} \exp(in(\theta - t)) = P(\xi, z) = P(\theta - t) = \frac{1 - |z|^2}{1 - 2|z|\cos(\theta - t) + |z|^2}, \quad \xi = \exp(i\theta) \in S_1.$$

On a :

$$\int_0^{2\pi} P(\theta - t) \exp(int) dt = |z|^{|n|} \exp(in\theta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

et puis

$$\int_0^{2\pi} P(\theta - t) f(\exp(int)) dt = \oint_{S_1} f d\mu_z$$

pour tout polynôme trigonométrique f et donc pour toute $f \in C(S_1)$.

La formule de Poisson (23) avec (2) et (21) nous assure que pour tout $z = |z|\exp(i\theta)$ toute $f \in C(\bar{B}_1(0); \mathbb{C})$ s'écrit comme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{1 - 2|z|\cos(\theta - t) + |z|^2} f(\exp(it)) dt$$

et donc est une fonction harmonique (comme prolongation unique d'une fonction harmonique donnée par sa partie réelle).

Montrons que f est, en fait, holomorphe dans $\bar{B}_1(0)$. Soit $id(z) =$ la fonction définie au-dessus. Si $f \in C(\bar{B}_1(0), \mathbb{C})$ la composée $f \circ id$ est aussi dans cet ensemble et puis elle est harmonique $\Delta(f \circ id) = 0$. Alors, la règle de Leibniz pour $f \circ id$ montrer que

$$0 = \Delta(f \circ id) = f\Delta(id) + id\Delta(f) + \partial f \bar{\partial} id + \partial id \bar{\partial} f = 0 + 0 + \partial f \cdot 0 + \bar{\partial} f.$$

C.q.f.d.

3 Prolongement analytique

3.1 Prolongement le long d'une courbe

3.1.1 Prolongement analytique : la notion générale.

Définition 3.1. Le prolongement analytique d'une fonction f définie sur un ensemble $X \subset \mathbb{C}$ s'appelle une fonction \tilde{f} définie sur un domaine D tel que $X \subset D$ et $\tilde{f}|_X = f$.

3.1.2 Notion d'un élément canonique.

Grosso modo, un *élément canonique* est un couple $(B_r(z_0), f)$ composé d'un disque ouvert $B_r(z_0) : \{|z - z_0| < r\}$ et d'une fonction f telle que le disque $B_r(z_0)$ est le plus grand disque où f est holomorphe à l'intérieur.

Un élément canonique se note par $F = (B_r(z_0), f)$ avec la terminologie suivante : z_0 est le centre de l'élément F , la valeur $f(z)$, $z \in B_r(z_0)$ s'appelle valeur de F en z .

Nous appelons F un élément (dit parfois non canonique) si le disque $B_r(z_0)$ n'est pas maximal d'holomorphie de f .

Soient $F = (B_r(z_0), f)$ et $G = (B_{r'}(z'_0), g)$ deux éléments tels que $B_r(z_0) \cap B_{r'}(z'_0) \neq \emptyset$. On dit que F et G sont le prolongement analytique l'un de l'autre si $f \equiv g$ sur $B_r(z_0) \cap B_{r'}(z'_0)$.

Définition 3.2. Soient $F_\alpha = (B_{r_\alpha}(z_{0,\alpha}), \alpha = 1, \dots, n)$ des éléments. On dit que F_α est une chaîne (ou F_α sont enchaînés) si $F_{\alpha+1}$ et F_α sont le prolongement analytique l'un de l'autre, $\alpha = 1, \dots, n-1$.

Cette définition donne une motivation de la notion d'un prolongement analytique entre deux éléments F et G :

Définition 3.3. L'élément $G = (B_{r'}(z'_0), g)$ est un prolongement analytique de l'élément $F = (B_r(z_0), f)$ s'il existe une chaîne finie F_α , $\alpha = 1, \dots, n$ telle que $F_1 = F$, $f_1 = f$ et $F_n = G$, $f_n = g$.

3.1.3 Prolongement le long d'un chemin.

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin continu tel que $\gamma(a) = z_{0,0}$ pour le centre $z_{0,0}$ d'un élément canonique $F_0 = (B_{r_0}(z_{0,0}), f_0)$.

Définition 3.4. L'élément canonique $F_0 = (B_{r_0}(z_{0,0}), f_0)$ est prolongeable le long du chemin γ s'il existe une famille d'éléments

$$F_t = (B_{r_t}(z_{0,t}), f_t), \quad z_{0,t} = \gamma(t), \quad r_t \neq 0, \quad t \in [a, b],$$

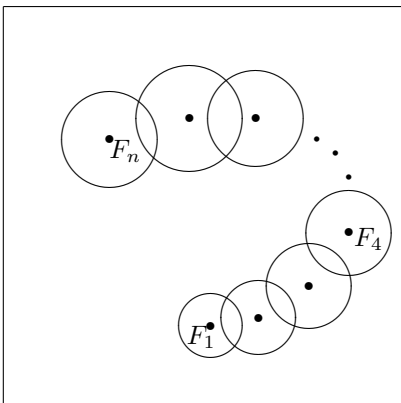


FIG. 1 –

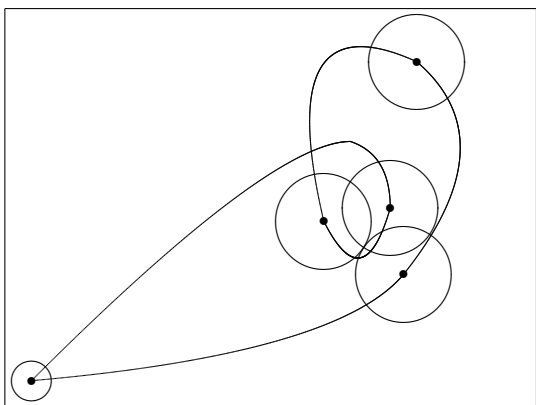


FIG. 2 –

telle que $\forall \varepsilon > 0$ et quelque soit $t_0 \in [a, b]$, $\gamma(t_0) = z_{0,t_0} \in B_{r_{t_0}}$ d'un élément F_{t_0} de cette famille la condition suivante est satisfaite : $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ tel que $\gamma(t) \in B_{r_{t_0}}$ les éléments F_t et F_{t_0} sont les prolongements analytiques l'un de l'autre.

Remarque 8. Il faut noter dans cette définition que $\varepsilon > 0$ soit petit : F_t et F_{t_0} sont les prolongements l'un de l'autre pour seuls t "proches" de t_0 .

Si un élément $F_0 = (B_{r_0}(z_{0,0}), f_0)$ est prolongeable le long de γ on dit que l'élément $F_1 = (B_{r_1}(z_{0,1}), f_1)$ tel que $\gamma(b) = z_{0,1}$ provient de F_0 par le prolongement analytique le long de γ .

Nous avons besoin de démontrer que cette définition est correcte, c'est-à-dire que le prolongement analytique de F_0 (l'élément F_1) ne dépend pas du choix de la famille F_t . Pour cela on prend la convention suivante : deux éléments canoniques $F = (B_r(z_0), f)$ et $F' = (B_{r'}(z'_0), f')$ sont égaux ($F = F'$) si $r = r'$, $z_0 = z'_0$ et $f \equiv f'$ dans le disque.

Théorème 3.1. *Le prolongement analytique d'un élément canonique F le long d'un chemin γ est bien défini (ne dépend pas du choix de la famille F_t).*

Démonstration : Soit G_t une autre famille du prolongement le long du γ telle que $F = F_0 = G_0$ ($\gamma(a) = z_{0,0}$ est le centre commun. Soit $I \subset [a, b]$: $F_t = G_t | t \in I$. Cet ensemble n'est pas vide car $a \in I$. C'est un ouvert dans $[a, b]$: soit $t_0 \in I$ tel que $F_{t_0} = G_{t_0}$. Pour un petit $\varepsilon > 0$ et quelque soit t de ε -voisinage de t_0 le point $\gamma(t) \in B_{r_{t_0}}(z_{0,t_0})$ – le disque commun de $F_{t_0} = G_{t_0}$. Selon la définition 3.3 les éléments F_t et G_t sont les prolongements analytiques l'un de l'autre des éléments $F_{t_0} = G_{t_0}$ pour t de ε -voisinage de t_0 et puis sont confondus. Donc ε -voisinage de $t_0 \subset I$.

De l'autre côté, I est fermé : si $t_0 \in [a, b]$ est un point d'accumulation (Chapitre 1, (1.13) de I on considère un tel ε -voisinage de t_0 que $\forall t$ de ce voisinage les points $\gamma(t) \in W_0$, où W_0 dénote le plus petit disque de convergence des éléments F_{t_0} et G_{t_0} . Il existe un point t_1 du voisinage que $F_{t_1} = G_{t_1}$. Les éléments F_{t_0} et G_{t_0} sont les prolongements analytiques de l'un de l'autre de deux éléments égaux $F_{t_1} = G_{t_1}$ lorsque $\gamma(t_1) \in W_0$. Alors, on obtient que $f_{t_0} \equiv g_{t_0}$ dans $W_0 \cap W_1$, où W_1 est le disque de convergence de F_{t_1} et G_{t_1} . Le théorème d'unicité (Chapitre 1, ??) montre que $f_{t_0} \equiv g_{t_0}$ partout dans W_0 et par conséquent $F_{t_0} \equiv G_{t_0}$, donc $t_0 \in I$ et I est à la fois fermé et ouvert. Alors $I = [a, b]$ et $F_1 = G_1$.

On se pose la question suivante : comment les notions d'un prolongement analytique le long d'un chemin γ et d'un prolongement analytique d'éléments d'une chaîne F_α sont liés ? Nous utilisons le fait suivant :

Lemme 3.2. *Soit $R(t)$ le rayon d'un élément F_1 d'une famille d'éléments réalisant le prolongement analytique le long d'un chemin γ tel que tout disque de convergence B_{r_t} a du rayon fini. Alors $R(t)$ est continue sur $[a, b]$.*

Preuve : Soit $t_0 \in I = [a, b]$ un point quelconque et $U_0 \subset I$ un tel voisinage de t_0 que $\forall t \in U_0$ les éléments F_t et F_{t_0} sont les prolongement analytique l'un

de l'autre. Alors leurs disques de convergence ne peuvent appartenir proprement l'un à l'autre. Par exemple, si $B_{r_t} \subset B_{r_{t_0}}$ (proprement), alors f_t est holomorphe dans un disque $B(\gamma(t))$ du rayon plus grand que le rayon de B_{r_t} . C'est-à-dire que r_t n'est pas le rayon d'un disque de convergence. Donc, les cercles $\partial B_{r_{t_0}}$ et ∂B_{r_t} doivent avoir au moins un point commun γ tel que les triples $\gamma(t_0), \gamma(t), \gamma$ est l'ensemble des sommets d'un triangle (qui dégénère en segments, si B_{r_t} est tangent intérieurement à la frontière ∂B_{t_0}). L'inégalité du triangle nous dit que :

$$|R(t) - R(t_0)| < |\gamma(t) - \gamma(t_0)|.$$

Mais l'application $\gamma(t)$ est continue sur I d'où le résultat. Maintenant on peut démontrer le théorème de coïncidence :

Théorème 3.3. *Soit G le prolongement analytique de F le long d'un chemin γ , alors il est un prolongement analytique au sens de la définition (3.3).*

Démonstration : Soit $F_t, t \in I$ une famille d'éléments réalisant le prolongement le long de γ . Si le rayon de convergence $R(t) = \infty$ le théorème est trivial. On suppose que le rayon est fini, et par le lemme (3.2) est continue sur I . Il existe un nombre positif $\varepsilon > 0$ tel que $R(t) \geq \varepsilon, \forall t \in I$.

Car la fonction γ est uniformément continue sur I on peut choisir une partition finie des points $t_\alpha : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tels que $\forall \alpha \in (1, \dots, n)$ et pour tout $t', t'' \in [t_{\alpha-1}, t_\alpha]$ l'on ait

$$|\gamma(t') - \gamma(t'')| < \varepsilon.$$

De la définition de (3.4) les éléments $F_\alpha = F_{t_\alpha}$ sont les prolongements analytiques l'un de l'autre à $F_{\alpha-1} = F_{t_{\alpha-1}}, \alpha = 1, \dots, n$.

Mais $F_0 = F$ et $F_\alpha = G$ et donc G est un prolongement analytique de F au sens de (3.3).

3.1.4 Théorème de monodromie

Soient $I = [0, 1], I^2 = I \times I$ et $\phi : I^2 \mapsto U \subset \mathbb{C}$ l'homotopie entre la courbe γ_1 et la courbe γ_2 , de mêmes sources et de mêmes "cibles". Leur "paramétrage" est donnée par $\gamma_1 : I \mapsto U$ et $\gamma_2 : I \mapsto U$. Alors, on a : $\phi(0, s) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0), \phi(1, s) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1), \forall s \in I$.

Théorème 3.4. *Soient $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ dans la classe des courbes aux extrémités communes et F -un élément qui admet un prolongement analytique le long de toute courbe $\gamma_s : s \rightarrow \phi(s, t), t \in I$, où ϕ est l'homotopie entre γ_1 et γ_2 . Alors les prolongements de F le long des chemins γ_1 et γ_2 sont confondus.*

Démonstration : Soit $G_t(s)$ la famille des éléments réalisant le prolongement analytique de F le long du chemin γ_s et ce prolongement nous le désignons par $G(s) \equiv G_1(s)$.

Soit $E := \{s \in I | G(s) = G(0)\}$. L'ensemble E n'est pas vide car $s = 0 \in E$. Soit $s_0 \in E$. Le lemme (3.2) montre qu'il existe un nombre positif $\varepsilon > 0$, que les

rayons $R(t)$ de la famille $F_t(s_0), t \in I$ réalisant le prolongement le long de γ_s satisfont à la condition $R(t) \geq \varepsilon, t \in I$.

L'homotopie $\phi : I^2 \rightarrow U$ est une application uniformément continue sur le compact I^2 et puisque il existe un voisinage $O_{s_0} \subset I$ tel que

$$|\phi(s, t) - \phi(s_0, t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall s \in O_{s_0}. \quad (27)$$

Choisissons des points $t_\alpha \in I, \alpha = 0, 1, \dots, n$ de telle manière que les valeurs $\phi_{alpha}^0 := \phi(s_0, t_\alpha)$ satisfont à l'inégalité

$$|\phi_\alpha^0 - \phi_{\alpha-1}^0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (28)$$

et les éléments $F_{t_\alpha}(s_0)$ et $F_{t_{\alpha-1}}(s_0)$ soient les prolongements analytiques l'un de l'autre.

Désignons la valeur $\phi(s, t_\alpha$ par ϕ_α^s et observons que (grâce à (27) et (28)) on a :

$$|\phi_\alpha^s - \phi_{\alpha-1}^0| \leq |\phi_\alpha^s - \phi_\alpha^0| + |\phi_\alpha^0 - \phi_{\alpha-1}^0| < \varepsilon. \quad (29)$$

Il est évident que les éléments $F_{t_1}(s)$ et $F_{t_1}(s_0)$ sont des prolongements analytiques l'un de l'autre (parce que $F_{t_0}(s_0)$ et $F_{t_1}(s)$ sont des prolongements analytiques l'un de l'autre grâce à (29) ainsi que $F_{t_0}(s_0)$ et $F_{t_1}(s_0)$ sont des prolongements analytiques l'un de l'autre et, de plus, tous les trois éléments $F_{t_0}(s_0), F_{t_1}(s_0), F_{t_1}(s)$ ont l'intersection non-vide).

On déduit par analogie que les éléments $F_{t_2}(s)$ et $F_{t_2}(s_0)$ sont des prolongations analytiques l'un de l'autre etc. Finalement, $F_{t_n}(s)$ et $F_{t_n}(s_0)$ sont des prolongations analytiques l'un de l'autre et, de plus, ils ont le même centre et, par conséquent, coïcident : $F_{t_n}(s) = G(s) = F_{t_n}(s_0) = G(s_0)$. Alors, $O_{s_0} \subset E$ et E est un ouvert.

Soit s_0 un point d'accumulation de E et O_{s_0} - le voisinage du point comme au-dessus. Il existe un point $s \in O_{s_0}$ tel que le prolongement de l'élément F le long de γ_s existe et est égal à $G(s) = G(0)$. Réitérant, on obtient que les prolongements analytiques le long γ_s et le long γ_0 sont égaux au même élément $G(s_0) = G(s) = G(0)$ et alors, $s_0 \in E$, c'est-à-dire, E est fermé. Donc, $E = I$ et en particulier, $G(1) = G(0)$ c.q.f.d.

Théorème 3.5. *Si un élément F admet un prolongement analytique le long d'un chemin quelconque dans un domaine simplement connexe U (partant du centre de F), son prolongement ne dépend que d'extrémités de ce chemin et définit une fonction holomorphe dans U*

Démonstration : Soient γ_1 et γ_2 deux chemins d'extrémités communes dans le domaine simplement connexe U . Alors, (en vue de (Chapitre 1,1.6)), ils sont homotopes dans U . Supposons que le centre de l'élément F est le point "source" commun de γ_1 et γ_2 et que l'autre extrémité commune est un point $z \in U$ quelconque. Le théorème 3.4 montre que des prolongements analytiques le long de γ_1 et de γ_2 sont confondus. La valeur de ces prolongements au point z définit une fonction analytique (holomorphe) dans U c.q.f.d.

3.2 Principes de prolongement analytique

3.2.1 Rappel : Chemins et courbes de Jordan

Dans la suite nous aurons besoin d'imposer des conditions supplémentaires aux chemins et courbes envisagés.

Définition 3.5. Un chemin $\gamma :] \mapsto \bar{\mathbb{C}}$ est un *chemin de Jordan* si l'application γ est continue et bijective.

Rappelons que deux chemins $\gamma_1 : [a_1, b_1] \mapsto \bar{\mathbb{C}}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \mapsto \bar{\mathbb{C}}$ sont équivalents s'il existe une fonction $\tau : [a_1, b_1] \mapsto [a_2, b_2]$ telle que : τ est continue et strictement croissante surjective et

$$\gamma_1(t) = \gamma_2([\tau(t)]), \forall t \in [a_1, b_1].$$

Il est évident que c'est une relation d'équivalence. Quand nous parlons d'une *courbe*, il s'agit d'une classe de chemins équivalents.

Soit γ une courbe de Jordan *fermée* lisse.

Définition 3.6. Le nombre positif δ_0 s'appelle le rayon standard de γ si tout cercle du rayon $\delta < \delta_0$ centré dans tous points de γ coupe la courbe exactement en deux points.

3.2.2 Principe de continuité

Nous étudions des questions pratiques de construction d'un prolongement analytique. Le premier principe utile est formalisé dans le résultat suivant qu'il s'appelle *Principe de continuité* :

Théorème 3.6. Soient deux domaines U_1, U_2 tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Soit sa frontière commune contient un morceau (fermé ou non) d'une courbe de Jordan lisse γ_0 . Alors, si une fonction f_1 (resp. f_2) est analytique dans U_1 (resp. U_2) et $f_{1,2}$ sont continues jusqu'au γ_0 et

$$f_1(z) = f_2(z), \forall z \in \gamma_0,$$

alors la fonction

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{si } z \in U_1, \\ f_2(z) & \text{si } z \in U_2, \\ f_1(z) = f_2(z) & \text{si } z \in \gamma_0 \end{cases}$$

est analytique dans le domaine $U = U_1 \cup U_2 \cap \gamma$.

Démonstration : Soit $B_\delta(z_0) \subset U$ le disque du centre $z_0 \in \gamma_0$, où z_0 est un point de la courbe γ_0 quelconque. On suppose que $\delta < \delta_0$ où δ_0 est le rayon standard (3.6) de cette courbe γ_0 .

Considérons l'intégrale du type Cauchy :

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{S_{\delta_0}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}. \quad (30)$$

Cette intégrale est une fonction analytique en voisinage de $B_\delta(z_0)$.

Ensuite, soient $\gamma_1 = \partial U'$, où $U' = U_1 \cap B_\delta(z_0)$ et $\gamma_2 = \partial U''$, où $U'' = U_2 \cap B_\delta(z_0)$. On a (par définition de f) :

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{f_1(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{f_2(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

où $\Gamma_i(\gamma_i, \gamma_i^-)$, $i = 1, 2$ et γ^- le chemin γ d'orientation opposée.

En utilisant le théorème et la formule de Cauchy, on obtient :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{f_1(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} f_1(z) & \text{si } z \in U' \\ 0 & \text{si } z \in U'', \end{cases}$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{f_2(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in U' \\ f_2 & \text{si } z \in U'', \end{cases}$$

d'où on a $\forall z \in B_\delta(z_0)$, $F(z) = f(z)$ c.q.f.d.

3.2.3 Rappel : Points symétriques par rapport à un cercle

Définition 3.7. On dit que des points z et z^* de \mathbb{C} sont *symétriques* par rapport à un cercle $S_r(z_0) = |z - z_0| = r$ si

$$\text{Arg}(z^* - z_0) = \text{Arg}(z - z_0), \text{ et } |z - z_0||z^* - z_0| = r^2$$

Autrement dit, il sont situés sur un même rayon de sommet z_0 de telle sorte que le produit de leurs distances à z_0 est égal à r^2 .

Géométriquement, on obtient que tout cercle S_R de $\bar{\mathbb{C}}$ passant par ces point est orthogonal à $S_r(z_0)$.

Rappelons aussi que l'application $\iota : \bar{\mathbb{C}} \mapsto \bar{\mathbb{C}}$ telle que $\iota(z) = z^*$ s'appelle *symétrie* par rapport à S_r ou *inversion*.

La formule simple reliant des points symétriques se résulte de la définition (3.7) :

$$z^* - z_0 = \frac{r^2}{z - z_0}. \quad (31)$$

3.2.4 Principe de symétrie de Riemann-Schwarz

Théorème 3.7. Soit la frontière ∂U d'un domaine U contient un arc d'un cercle γ et ne contient pas du même coup deux points symétriques par rapport à γ . Ensuite, soit f analytique dans U , continue jusqu'au γ et admet sur γ des valeurs réelles. Alors il existe un prolongement F analytique de f vers le domaine U^* , symétrique à U par rapport à γ tel que ces valeurs $F(z^*)$ en tout point z^* , symétrique par rapport à z , sont conjugués à $f(z)$.

Démonstration : Sans perte de généralité on suppose que γ est un segment de l'axe réel et U situé en demi-plan supérieur (c'est toujours possible d'obtenir par une transformation homographique (44)). Soit z^* un point du domaine U^* . On va définir un point $z \in U$ par la loi $z = \bar{z}^*$ et une fonction f^* sur U^* par la formule :

$$f^*(z^*) = \bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z}^*)}.$$

Alors on peut calculer l'accroissement Δf^* comme

$$\Delta f^* = f^*(z^* + \Delta z^*) - f^*(z^*) = \bar{f}(z + \Delta z) - \bar{f}(z) = \overline{(f(z + \Delta z) - f(z))}.$$

En passant à la limite

$$\lim_{\Delta z^* \rightarrow 0} \frac{f^*(z^* + \Delta z^*) - f^*(z^*)}{\Delta z^*} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \overline{\left(\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right)},$$

on obtient que la fonction f^* est dérivable dans U^* et $(f^*)' = \overline{f'(z)}$.

La fonction f^* est analytique dans U^* et, en ajoutant sa valeur sur γ comme $f^*(x) = f(x)$, elle est continue dans $U^* \cup \gamma$.

Maintenant, F résulte de f et de f^* par le Principe de Continuité (3.6).

4 Zéros des fonctions holomorphes

4.1 Produits infinis

4.1.1 Notion de produit infini.

Etant donné une suite complexe $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ considérons le produit de n facteurs numériques non-nuls :

$$P_n = (1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) = \prod_{k=1}^n (1 + u_k),$$

qui s'appelle le produit partiel. Par récurrence, $P_{n+1} = (n+1)P_n$. On obtient une suite $P_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes non-nuls.

Définition 4.1. S'il existe une limite $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 + u_k)$ elle s'appelle le produit infini et se note $P = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$.

On dit que le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$ est convergent si la limite 4.1 est une valeur finie non nulle. Sinon, si $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$ ou la suite $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente, le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$ est dit divergent.

Exemple 5. Soit $u_k = \frac{1}{k(k+2)}$. Le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} [1 + \frac{1}{k(k+2)}]$ est convergent parce que

$$P_n = \prod_{k=1}^n [1 + \frac{1}{k(k+2)}] = \prod_{k=1}^n \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = 2 \frac{n+1}{n+2}.$$

Alors, on a la valeur de la limite $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{n+1}{n+2} = 2$ et le produit infini est convergent.

D'autre côté, le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{1-k}{k})$ est divergent car son produit partiel

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n!}$$

et sa limite $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$.

4.1.2 Critère de convergence.

Le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$ converge vers le nombre complexe non nul P si, quel que soit le petit nombre $\epsilon > 0$, il existe un nombre $N = N(\epsilon)$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|\frac{P}{P_n} - 1| < \epsilon$.

En effet, si le produit $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$ converge vers P , $P \neq 0$ alors $\frac{P}{P_n}$ tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$ parce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P}{P_n} = \frac{P}{\lim_{n \rightarrow \infty} P_n} = \frac{P}{P} = 1, \quad (P \neq 0).$$

Inversement, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P}{P_n} = 1$, alors $\prod_{k=1}^n (1 + u_k)$ converge vers le nombre P . Une condition nécessaire de la convergence est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.1. Si le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k)$ est convergent, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$.

Voici l'argument : $P_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (1 + u_k)$ et $\frac{P_n}{P_{n-1}} = 1 + u_n$ et $u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} - 1$. Si, maintenant, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1} = P$, $P \neq 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} - 1 = 0,$$

c.q.f.d.

Un autre critère de convergence est donné par la

Proposition 4.2. Soit \log la détermination principale du logarithme. Pour n assez grand $\log(1 + u_n)$ existe. S'il existe N tel que la série $\sum_{n=N}^{\infty} \log(1 + u_n)$ est convergente, le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k)$ est convergent.

La démonstration est directe : on a pour tout $n \geq N$:

$$\prod_{k=N}^n (1 + u_k) = \exp\left(\sum_{k=N}^n \log(1 + u_k)\right).$$

Donc $\prod_{k=N}^n (1 + u_k)$ a une limite de forme $\exp(\dots)$, et, se trouve, non nulle.

Remarque 9. La réciproque de la proposition est aussi exacte.

4.1.3 Convergence absolue et convergence faible

Définition 4.2. On dit que le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k)$ est absolument convergent si la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ est absolument convergente.

L'assertion suivante est immédiate : chaque produit infini absolument convergent est convergent.

Définition 4.3. Un produit infini $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k)$ est faiblement convergent s'il est convergent mais le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + |u_k|)$ est divergent.

Exemple 6. Soit $\prod_{k=1}^{\infty}[1 + (-1)^{k+1}\frac{1}{k}]$. Alors il est faiblement convergent, car

$$P_n = \frac{n+1}{n}, \text{ si } n \text{ est impair et } P_n = 1, \text{ si } n \text{ est pair}$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 1$ et le produit est convergent.

De l'autre côté, la série $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ est divergente. Donc, le produit infini n'est pas absolument convergent.

La condition suffisante est un résultat de la discussion précédente :

Théorème 4.3. Soit le produit $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k)$ de facteurs positifs ($u_k > -1$, $k = 1, 2, \dots$) Alors, ce produit est convergent si la série $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + u_k)$ est convergente et, vice-versa, le produit est divergent si la série logarithme est divergente.

Soit S la somme de la série logarithmique $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + u_k)$ alors la valeur P du produit infini $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k)$ est égale $P = \exp(S)$. En effet, pour une somme partielle S_n et pour le produit partiel P_n on obtient facilement $S_n = \log(P_n)$ d'où $P_n = \exp(S_n)$. Par continuité de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique on a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ et aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \exp(S)$ c.q.f.d.

4.1.4 Produits infinis de fonctions holomorphes.

Soit $\{a_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert U . Posons $a_n(z) = 1 + u_n(z)$, $P_n(z) = \prod_{k=1}^n a_k(z)$. Ainsi les fonctions $u_k(z)$ et les $P_n(z)$ sont aussi des fonctions holomorphes dans U .

Considérons le produit infini fonctionnel $\prod_{n=1}^{\infty} a_n(z)$. On peut comprendre sa convergence simple (ou point par point). On définit une fonction a en posant pour $z \in U$:

$$a(z) = \prod_{n=1}^{\infty} a_n(z).$$

Théorème 4.4. On suppose que pour tout compact $K \Subset U$ il existe un nombre naturel N tel que :

(1) $\log a_n(z)$ existe pour tout $n \geq N$ et pour tout $z \in K$;

(2) la série $\sum_{n=N}^{\infty} \log a_n(z)$ converge uniformément sur K .

Alors, la fonction $a(z)$ est holomorphe dans U et la série de fonctions méromorphes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n}{a_n}$ converge uniformément sur tout compact vers $\frac{a'}{a}$

Démontrons le théorème. Soit D un disque ouvert dont l'adhérence $\bar{D} \subset U$. Il existe un nombre N tel que la série logarithmique $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n(z)$ existe et converge uniformément dans \bar{D} et, par conséquent, dans D . Car \log est une fonction continue la suite des facteurs tronqués $\prod_{k=N}^n a_k(z)$ est aussi uniformément convergente dans D . Soit $f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} \log a_n(z)$ la fonction holomorphe correspondante dans D . Nous pouvons re-écrire la fonction $a(z)$ comme

$$a(z) = \left(\prod_{n=1}^{N-1} a_n(z)\right) \exp f(z)$$

pour tout $z \in D$, d'où

$$\frac{a'}{a} = \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{a'_k}{a_k}\right) + f'(z)$$

or, uniformément sur tout compact $K \Subset D$

$$f'(z) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{a'_k}{a_k}$$

et donc $\frac{a'}{a} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k}{a_k}$ uniformément sur tout compact $K \Subset D$, d'où le résultat sur U (en faisant variation par D).

4.1.5 Convergence normale.

Définition 4.4. Le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k(z))$ converge normalement sur tout compact si la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ converge normalement sur tout compact.

La convergence normale implique ainsi que le produit $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k(z))$ est absolument convergent. Pour un produit normalement convergent les conditions du théorème (4.4) sont remplies. En effet, on a pour un compact $K \Subset U$: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = 0$ et ceci uniformément sur K . Alors, il existe un tel nombre naturel N que $|u_n(z)| < 1$ pour tout $n > N$, $\forall z \in K$. Le logarithme $\log(1 + u_n(z))$ existe sur K pour tout $n \geq N$. Car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ la série $\sum_{k=N}^{\infty} \log(1 + u_k(z))$ est normalement convergente sur K , alors est uniformément convergente. Ceci implique la

Proposition 4.5. Soit $\{u_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert U , telle que le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k(z))$ converge normalement sur tout compact. Alors le produit définit une fonction holomorphe dans U et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u'_k}{1+u_k}$ converge uniformément sur tout compact vers $\frac{a'}{a}$.

4.1.6 Rappel : développements classiques. Formules d'Euler

Soit $z \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. L.Euler a démontré la formule magnifique suivante :

$$\cot z = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - \pi^2 n^2}. \quad (32)$$

Notons $\Phi(z) = \cot z - \frac{1}{z}$. Elle se prolonge par $\Phi(0) = 0$ en utilisant le développement limité

$$z \cos z - \sin z = -\frac{z^3}{3} + o(z^3).$$

Théorème 4.6. Pour tout $z \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $\Phi(z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - \pi^2 n^2}$.

Démonstration de la formule d'Euler. Nous utilisons la formule intégrale de Cauchy. Introduisons une autre fonction $\phi(z)$ telle que

$$\phi(\xi) = \frac{\Phi(\xi)}{\xi - z}.$$

C'est une fonction méromorphe avec un pôle simple $\xi = z$ et en tout point $\xi_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Le résidu $\text{Res}_{\xi=z} \phi(\xi) = \Phi(z)$ par construction de la fonction ϕ . Les résidus en tout point ξ_n sont :

$$\text{Res}_{\xi=\xi_n} \phi(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \pi n} \frac{\xi - \pi n}{\xi - z} \Phi(\xi) = \frac{1}{\pi n - z}.$$

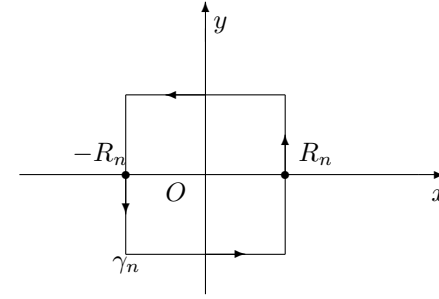


FIG. 3 –

Soit $R_n = \pi n + \frac{\pi}{2}$. En choisissant le contour $\gamma_n = \partial \Gamma_n$ où

$$\Gamma_n = \{z \mid -R_n \leq \Re z, \Im z \leq R_n\}$$

avec l'orientation positive, on a (pour tout $z : |z| < R_n$) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} \phi(\xi) d\xi &= \text{Res}_{\xi=z} \phi(\xi) + \sum_{\xi=\xi_n \in \Gamma_n} \text{Res} \phi(\xi) = \\ &= \Phi(z) + \sum_{k=-n, k \neq 0}^n \frac{1}{\pi k - z} = \Phi(z) - 2 \sum_{k=1}^n \frac{z}{z^2 - \pi^2 k^2}. \end{aligned}$$

Le résultat est atteint en vue du

Lemme 4.7.

$$\left| \oint_{\gamma_n} \phi(\xi) d\xi \right| \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Preuve : Quand $\Phi(0) = 0$ on a

$$\oint_{\gamma_n} \frac{\Phi(\xi)}{\xi} d\xi = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} \frac{\Phi(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} \left[\frac{\Phi(\xi)}{\xi - z} - \frac{\Phi(\xi)}{\xi} \right] d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} \frac{z\Phi(\xi)}{\xi(\xi - z)} d\xi.$$

Un résultat technique (voir TD4) montre que

$$|\Phi(\xi)| \leq (R_n^{-1} + \coth(\frac{\pi}{2})) < 1 + \coth(\frac{\pi}{2}) = C,$$

alors

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} \frac{z\Phi(\xi)}{\xi(\xi-z)} d\xi \right| \leq \frac{C|z|}{R_n - |z|}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C|z|}{R_n - |z|} = 0$$

pour tout z fixé.

Remarque 10. On peut re-écrire la formule (4.6) en observant que

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \pi n} + \frac{1}{z + \pi n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \pi n} - \frac{1}{\pi n} \right) + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{z - \pi n} - \frac{1}{\pi n} \right) = \\ &= \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \pi n} - \frac{1}{\pi n} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

4.1.7 Produit infini et sinus.

On obtient une factorisation de $\sin z$.

Théorème 4.8.

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right) \quad (34)$$

Démonstration : Nous utilisons la proposition (4.5) : la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2}{\pi^2 k^2}$ converge normalement sur tout compact. Notons par $a(z)$ la fonction correspondante à $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right)$ donc

$$F(z) := z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right) = za(z)$$

et $(\log F(z))' = \frac{1}{z} + \frac{a'}{a}$, mais (4.5) implique

$$\frac{a'}{a} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u'_k}{1 + u_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2},$$

d'où

$$(\log F(z))' = \cot z = (\log \sin z)'$$

et, donc, $F(z) = C \sin z$ pour une constante C . Mais nous obtenons, pour $z \neq 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{F(z)}{z} = 1$ d'où $C \equiv 1$. c.q.f.d.

Corollaire 4.1. Formule de Wallis. Soit $z = \frac{\pi}{2}$. On obtient

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2} \right)$$

et la formule de Wallis :

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}.$$

4.2 Théorèmes de Weierstrass-Mittag-Leffler

Nous rappelons la définition des fonctions entières.

Définition 4.5. On appelle *fonction entière* une fonction holomorphe dans \mathbb{C} .

Autrement dit, une fonction entière ne possède pas de point singulier fini. Considérons une fonction entière f en voisinage du point singulier isolé $z_0 = \infty$:

- (a) soit $z_0 = \infty$ un faux singularité, alors $f \equiv \text{const}$;
- (b) soit $z_0 = \infty$ un pôle, alors la partie principale g de la série de Laurent de f en voisinage de z_0 est un polynôme, d'où elle-même est un polynôme (la différence $f - g$ est une fonction entière "régulière" en ∞) ;
- (c) soit $z_0 = \infty$ un point singulier essentiel, alors f s'appelle *fonction entière transcendante*. Telles sont les fonctions $\exp z$, $\sin z$, $\cos z$.

Théorème 4.9. Soit $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points complexes satisfaisant la condition $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Il existe une fonction entière f telle que $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ est exactement l'ensemble des zéros de f et l'ordre du zéro de f en point a_n égal au "nombre d'entrée" de a_n comme un terme de la suite $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$

Démonstration : En remplaçant f par une autre fonction entière $\tilde{f} = \frac{f}{z^m}$, où m est l'ordre du zéro de f en $z = 0$, supposons que $a_n \neq 0$, $\forall n$. Nous supposons aussi que $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ est rangé dans l'ordre de croissance de leurs modules.

Considérons le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right)$ avec sa série logarithmique $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right)$ (voir 4.4).

Nous choisissons un nombre fixe q , $0 < q < 1$ et soit $A_n = \{z : |z| \leq q|a_n|\}$.

Ensuite,

$$\log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^n$$

et pour un nombre naturel $N(n)$ on a :

$$\log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) + \sum_{k=n}^{N(n)} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{N(n)} = - \sum_{k=N(n)+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n} \right)^k.$$

Soit $z \in A_n$ et $\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ est déterminé tel que $\log 1 = 0$. Pour de tels z on peut majorer (en utilisant la somme de la série géométrique) :

$$\left| \sum_{k=N(n)+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k \right| \leq \left| \frac{z}{a_n} \right|^{N(n)+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{N(k) + 1 + k} \leq \frac{1}{1-q} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{N(n)+1} \quad (35)$$

Notre choix de $N(n)$ est tel que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{N(n)+1} \quad (36)$$

converge normalement dans tout disque fermé $B_R(0)$ (il suffit pour cela de poser par exemple $N = n - 1$).

Soit K un compact fixe. Il existe un nombre assez grand L tel que pour tout $n \geq L$ $K \Subset A_n$. Maintenant, en vue de 35 la série

$$-\sum_{n=L}^{\infty} \sum_{k=N(n)+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k = \sum_{n=L}^{\infty} \left[\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \sum_{k=1}^{N(n)} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k \right]$$

normalement converge sur K alors, grâce à 4.4, le produit infini

$$\prod_{n=L}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{N(n)} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k\right)$$

aussi normalement converge sur K et pour cette raison il définit une fonction $f_L(z)$ holomorphe non nulle dans K .

Le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{N(n)} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k\right),$$

diffère de f_L par un nombre fini de facteurs, définit sur K une autre fonction holomorphe f qui s'annule seulement aux points $a_n \in K$.

Nous avons choisi le compact K arbitrairement. Alors la fonction f est entière avec ses zéros aux points de $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$. c.q.f.d.

Corollaire 4.2. Toute fonction entière $f(z)$ admet un développement comme un produit infini par ses zéros :

$$f(z) = z^m \exp(g(z)) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{N(n)} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k\right), \quad (37)$$

où m est l'ordre du zéro de f en $z = 0$, $g(z)$ une fonction entière et les nombres $N(n)$ sont tels que la série 36 normalement converge sur tout compact.

Exemple 7. (sin z "révisé")

La fonction entière $\sin z$ possède des zéros simples aux points πn $n \in \mathbb{Z}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2}$ converge normalement sur tout compact, alors, en choisissant $N(n) \equiv 1$, on a :

$$\sin z = z \exp(g(z)) \prod_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\pi n}\right) \exp\left(\frac{z}{\pi n}\right)$$

En intégrant la formule (33) on trouve que $g(z) = 0$ et que la fonction $\sin z$ s'écrit comme

$$\sin z = z \prod_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\pi n}\right) \exp\left(\frac{z}{\pi n}\right) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

On peut généraliser cette démonstration pour avoir le théorème de Weierstrass pour un domaine quelconque D :

Théorème 4.10. Soit $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$, $a_n \in D$ une suite sans points d'accumulation dans D . Il existe une fonction f holomorphe dans D telle que $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ soit exactement l'ensemble des zéros de f et l'ordre du zéro de f en point a_n égal au "nombre d'entrée" de a_n comme un terme de la suite $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$.

Démonstration : Nous supposons que $\sharp(\{a_n\}_{\mathbb{N}}) = \infty$. On va trouver $\forall a_n \in D$ un tel point $b_n \in \partial D$ que la distance $\rho(a_n, \partial D)$ est minimale :

$$\rho_n = \rho(a_n, b_n) = \min_{b \in \partial D} \{\rho(a_n, b) = |a_n - b|\}.$$

La limite de la suite numérique $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ et $\forall z \in \{|z - b_n| > \rho_n\}$ on peut développer

$$\log\left(\frac{z - a_n}{z - b_n}\right) = \log\left(1 - \frac{\rho_n}{z - b_n}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho_n}{z - b_n}\right)^k.$$

Ce développement converge uniformément en z pour $\rho(z, b_n) > 2\rho_n$ et donc on va choisir un nombre naturel $N(n)$ tel que (voir (35)) :

$$\left| \log\left(\frac{z - a_n}{z - b_n}\right) - \sum_{k=1}^{N(n)} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho_n}{z - b_n}\right)^k \right| < \frac{1}{2^n}.$$

Le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z - a_n}{z - b_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{N(n)} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho_n}{z - b_n}\right)^k\right) \quad (38)$$

converge uniformément pour ce choix de $N(n)$ sur tout compact $K \Subset D$. En effet, il existe un nombre L pour chaque compact K tel que $\rho(z, b_n) > 2\rho_n$, $\forall n \geq L$ et

$z \in K$. Alors, la série de fonctions holomorphes sur K

$$\sum_{n=L}^{\infty} \left(\log \frac{z - a_n}{z - b_n} + \sum_{k=1}^{N(n)} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho_n}{z - b_n} \right)^k \right)$$

converge uniformément sur K ainsi que le produit infini tronqué :

$$\prod_{n=L}^{\infty} \left(\frac{z - a_n}{z - b_n} \right) \exp \left(\sum_{k=1}^{N(n)} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho_n}{z - b_n} \right)^k \right)$$

et puis, ils définissent deux fonctions holomorphes sur K respectivement : $f_L(z)$ et $g_L(z)$ telles que $f_L(z) = \exp(g_L(z))$. Donc, le produit (38) définit une fonction $f(z)$ holomorphe sur K s'annulant aux points $a_n \in K$ ce que montre le théorème, puisque K est arbitraire.

4.3 Théorème de Mittag-Leffler

Définition 4.6. On dit qu'une série $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ de fonctions méromorphes est convergente (resp. uniformément convergente) sur un sous-ensemble $M \subset \mathbb{C}$, si ne que de nombre fini des ses termes a des pôles sur M et la série est convergente (resp. uniformément convergente) sur M après d'élimination des ces termes.

Théorème 4.11. Soit $b_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de points telle que $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = \infty$ et $|b_1| \leq |b_2| \leq \dots$, et

$$g_i(z) = \sum_{n=1}^{\beta_i} \frac{c_{-n}^i}{(z - b_i)^n}$$

une suite des fonctions.

Alors, il existe une fonction méromorphe f avec des pôles dans les points b_i et des parties principales dans $g_i(z)$ dans ces points.

Démonstration : Sans pert de généralité, on prend $b_1 \neq 0$. La fonction $g_i(z)$ est analytique dans le disque $B_{|b_i|}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |b_i|\}$ et, par conséquent, elle s'écrit comme une série

$$g_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_i^{(k)}(0)}{k!} z^k. \quad (39)$$

On va fixer $q \in \mathbb{R}$ tel que $0 < q < 1$. Le disque $B_j = \{z \in \mathbb{C} : |z| < q|b_j|\}$ est un sous-ensemble compact dans le disque $B_{|b_j|}(0)$ et puis la s'érie (39) est absolument et uniformément convergente dans B_j . Il existe un tel nombre $n_j \in \mathbb{N}$ que

$$\left| g_j(z) - \sum_{k=0}^{n_j} \frac{g_j^{(k)}(0)}{k!} z^k \right| < \frac{1}{2^j}, \forall z \in \bar{B}_j.$$

On va noter $P_j(z) = \sum_{k=0}^{n_j} \frac{g_j^{(k)}(0)}{k!} z^k$.

Alors

$$|g_j(z) - P_j(z)| < \frac{1}{2^j}, \forall z \in \bar{B}_j.$$

La série $\sum_j (g_j - P_j)$ converge uniformément sur tout compact $\bar{B}_{|b_j|}(0) \subset \mathbb{C}$ au sens (4.6). En effet, il existe un tel nombre naturel $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \tilde{K} \subset \mathbb{C}$ et $\forall n \geq N$ l'ensemble $\tilde{K} \subset K_n = \{|z| < q|b_n|\}$.

Considérons la série $\sum_{j \geq N} (g_j - P_j)$. Ses terms sont des fonctions analytiques sur \tilde{B} et ils ont comme une majorante la série géométrique $\sum_{j \geq N} \frac{1}{2^j}$. Alors sa somme $f_N(z)$ est une fonction analytique dans le disque \tilde{K} .

Soit f une fonction donnée par

$$f(z) = \sum_{j=1}^{N-1} (g_j - P_j) + f_N(z).$$

Cette fonction est analytique dans le disque \tilde{K} , sauf les pôles b_j , $j = 1, \dots, N-1$ et ces parties principales dans b_j sont $g_j(z)$. Le disque \tilde{K} est un compact arbitraire alors f est méromorphe et admet les pôles donnés b_j avec les parties principales g_j c.q.f.d.

Corollaire 4.3. Toute fonction méromorphe f se représente comme la somme d'une série :

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(z) - P_n(z)), \quad (40)$$

convergente uniformément sur tout compact et h est une fonction entière. Les parties principales des développements de Laurent en voisinage de b_n sont les fonctions g_n (les pôles son numérotés selon la croissance des leurs valeurs absolues, $b_1 \neq 0$ et P_n sont des polynômes.

it Preuve : On va construire une fonction f_0 (après le théorème 4.11) telle que :

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(z) - P_n(z)),$$

telle que ses pôles et les partie principales sont les mêmes comme pour f . Alors, $f - f_0 = h$ où h est une fonction entier.

4.4 Fonction gamma d'Euler

Une application magnifique de la théorie de factorisation est la définition de Weierstrass de la fonction gamma d'Euler.

4.4.1 Préparation. Constante d'Euler

Nous considérons une fonction entière $F(z)$ donnée par le produit infini

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) \quad (41)$$

qui normalement converge sur tout compact. Ses zéros (toujours simples) sont les entiers négatifs tandis que les zéros de la fonction $F(z-1)$ sont aussi les entiers négatifs plus encore un zéro simple $z=0$. Alors, la fonction $\frac{F(z-1)}{zF(z)}$ n'a que de fausses singularités et détermine une fonction entière qui ne s'annule jamais. On peut écrire cette fonction comme

$$\frac{F(z-1)}{zF(z)} = \exp(f(z)), \quad (42)$$

où f est une certaine fonction entière.

Proposition 4.12. *La fonction $f(z)$ est une constante C (dite d'Euler) et*

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right).$$

Preuve : Soit $z \neq 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$, alors

$$\log F(z-1) = z + \log F(z) + f(z)$$

et puisque

$$(\log F(z))' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right),$$

on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + f'(z).$$

On peut présenter 1 comme la somme

$$1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

et, utilisant cette représentation, écrire

$$f'(z) + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

et obtenir que $f'(z) = 0$, d'où $f = C$. Pour nous en assurer, notons qu'on pour $z=0$

$$\exp(C)F(1) = 1$$

ou

$$\begin{aligned} C &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \exp\left(-\frac{1}{k}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(1+n) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right). \end{aligned}$$

Ce calcul démontre que la limite existe (elle est connue comme *la constante d'Euler*. Sa valeur numérique (mais pas du tout sa nature algébrique!) est aussi connue :

$$C = 0,577215664\dots$$

Une question toujours ouverte :

Problème 1. Le nombre C est-il rationnel ? algébrique ?

4.4.2 Définition de Weierstrass

Définition 4.7. La fonction gamma $\Gamma(z)$ est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} sans zéros et avec de pôles simples aux entiers non-positifs donnée par la formule explicite

$$\Gamma(z) = \frac{1}{zF(z) \exp(Cz)},$$

où $F(z)$ est la fonction (41) et C —la constante d'Euler.

Proposition 4.13. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Preuve : On a directement par (4.7)

$$\Gamma(z+1) = \frac{1}{(z+1)F(z+1) \exp(C(z+1))}$$

et

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \frac{zF(z) \exp(Cz)}{(z+1)F(z+1) \exp(Cz) \exp(C)} = z$$

en vue de (42).

Corollaire 4.4.

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En effet, $\Gamma(1) = \frac{1}{F(1) \exp(C)} = 1$ et puis, par récurrence, $\Gamma(n+1) = n!$.

4.4.3 Formule des compléments

Théorème 4.14.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Démonstration : La formule explicite (via un produit infini) pour la fonction gamma est une conséquence directe de (4.7) :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \exp(Cz) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) \quad (43)$$

d'où

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Rappelons la factorisation (4.8) de $\sin z$ qu'on peut re-écrire dans la forme

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

donc on obtient

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

Mais $\Gamma(-z+1) = -z\Gamma(-z)$, ce qui donne le résultat désiré.

Remarque 11. En faisant $z = \frac{1}{2}$ dans (4.14), on trouve $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$, d'où $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Ce résultat est en relation avec la valeur de l'intégrale gaussienne (cf. Chapitre 5, 5.2)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx.$$

4.5 Formule de Jensen

4.5.1 Rappel : fonctions homographiques.

Elle sont de la forme

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (44)$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes fixes. Nous rappelons (sans démonstration) les propriétés basiques des fonctions homographiques :

1. Toute fonction homographique 44 réalise un homéomorphisme de $\bar{\mathbb{C}}$ sur $\bar{\mathbb{C}}$;
2. L'application homographique 44 est conforme en tout point de $\bar{\mathbb{C}}$;
3. Toute application homographique 44 envoie cercle de $\bar{\mathbb{C}}$ sur cercle $\bar{\mathbb{C}}$;
4. Pour tout triplet de points $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distincts et tout triplet de points $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ distincts, il existe une application homographique L et une seule telle que $L(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3$.

4.5.2 Cas holomorphe

Théorème 4.15. Soit f une fonction holomorphe sur un disque fermé $\bar{B}_r(0)$ telle que f n'a pas de zéros sur le cercle $S_r = \partial\bar{B}_r(0)$ et $f(0) \neq 0$.

On note z_1, \dots, z_n les zéros de f dans le disque. Alors

$$\log |f(0)| \frac{r^n}{z_1 \dots z_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r \exp(i\theta))| d\theta.$$

Démonstration : Si f n'a pas de zéros dans le disque, on peut déduire de la formule de Cauchy (en regardant sa partie réelle) que

$$\log(f(0)) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_r} \frac{\log f(z)}{z} dz,$$

avec détermination du logarithme

$$\log f(z) = \log f(0) + \int_0^z \frac{f'(t)}{f(t)} dt.$$

On regardons la fonction homographique (44) $g_w(z)$ telle que pour un $w \in \bar{B}_r(0)$ fixé

$$g_w(z) = \frac{r(z-w)}{r^2 - z\bar{w}}. \quad (45)$$

la propriété principale de cette fonction est de s'annuler pour $z = w$ et $|g_w(z)| \equiv 1$ sur S_r :

$$\begin{aligned} \left| \frac{r(r \exp(i\theta) - w)}{r^2 - r \exp(i\theta)\bar{w}} \right| &= \left| \frac{r \exp(i\theta) - w}{r - \exp(i\theta)\bar{w}} \right| = \\ \left| \frac{r - \exp(-i\theta)w}{r - \exp(i\theta)\bar{w}} \right| &= \left| \frac{r - \exp(-i\theta)w}{r - \exp(-i\theta)w} \right| \equiv 1. \end{aligned}$$

Maintenant, pour chaque zéro $z_k, k = 1, \dots, n$ nous construisons la fonction homographique (44) $g_k(z)$ par la même formule :

$$g_k(z) = \frac{r(z - z_k)}{r^2 - z\bar{z}_k}$$

et une fonction auxiliaire

$$F(z) = \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^n \frac{r(z - z_k)}{r^2 - z\bar{z}_k}}. \quad (46)$$

On a $|F(z)| = |f(z)|$ sur S_r et $|F(0)| = |f(0)| \frac{r^n}{\prod_k z_k}$.

D'autre côté,

$$\log |F(0)| = \frac{1}{2\pi} \oint_{S_r} \frac{\log |F(z)|}{z} dz = \frac{1}{2\pi} \oint_{S_r} \frac{\log |f(z)|}{z} dz$$

d'où le résultat du théorème.

4.5.3 Cas méromorphe

Une généralisation de la formule de Jensen immédiate on peut obtenir sans soucis en utilisant des fonction homographiques associées avec des zéros et des pôles de la fonction donnée :

Théorème 4.16. *Soit f une fonction méromorphe dans un disque fermé $\bar{B}_r(0)$ telle que f n'a pas ni zéros ni pôles sur le cercle $S_r = \partial B_r(0)$ et $f(0) \neq 0, \infty$.*

On note z_1, \dots, z_n les zéros et p_1, \dots, p_n les pôles de f dans le disque. Alors

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r \exp(i\theta))| d\theta - \sum_{k=1}^n \log \frac{r}{z_k} + \sum_{k=1}^n \log \frac{r}{p_k}.$$

4.5.4 Inégalité de Jensen

Théorème 4.17. *Soit f une fonction entière telle que $|f(0)| = 1$, $n = Z_f(r)$ - le nombre de ses zéros dans le disque $B_r(0)$ (comptant avec leurs multiplicités). Posons $M_r = \max_{S_r} |f(z)|$, où $S_r = \partial B_r(0)$. Alors*

$$\int_0^r \frac{Z_f(t)}{t} dt \leq \log M_r.$$

Démonstration : Soient z_1, \dots, z_n les zéros de f contenus dans le disque $B_r(0)$ rangés dans l'ordre croissant de leurs modules. Régardons les fonctions homographiques associées à chacun comme dans le théorème 4.15 :

$$g_k(z) = \frac{r(z - z_k)}{r^2 - z\bar{z}_k}, \quad k = 1, \dots, n$$

ainsi que la fonction auxiliaire $F(z)$ de (46).

Après le principe du maximum (Chap.2 2.1) pour $B_r(0)$ on a $|F(z)| \leq M_r$ ou, en faisant $z = 0$,

$$|F(0)| = \frac{r^n}{\prod_{k=1}^n |z_k|} = \left| \frac{z_2}{z_1} \right| \left| \frac{z_3}{z_2} \right|^2 \dots \left| \frac{z_n}{z_{n-1}} \right|^{n-1} \frac{r^n}{|z_n|^n} \leq M_r.$$

La partie gauche de cette inégalité est représentée comme la somme d'intégrales (en passant vers le logarithme terme après terme) :

$$\log \left| \frac{z_2}{z_1} \right| + 2 \log \left| \frac{z_3}{z_2} \right| + \dots + (n-1) \log \left| \frac{z_n}{z_{n-1}} \right| + n \log \frac{r}{|z_n|} =$$

$$\int_{|z_1|}^{|z_2|} \frac{dt}{t} + 2 \int_{z_2}^{z_3} \frac{dt}{t} + \dots + (n-1) \int_{z_{n-1}}^{z_n} \frac{dt}{t} + n \int_{z_n}^r \frac{dt}{t} = \int_0^r \frac{Z_f(t)}{t} dt,$$

en comptant $Z_f(t) = k$, si $|z_k| < t < |z_{k+1}|$ et $Z_f(t) = 0$, si $0 < t < |z_1|$.

D'où l'assertion du théorème.

4.6 Produit de Blaschke

4.6.1 Rappel : Espace H^∞

Soit f une fonction holomorphe et bornée dans le disque $B_1(0)$. Introduisons la norme suivante de f :

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in B_1(0)} |f(z)|. \quad (47)$$

L'ensemble des fonctions holomorphes bornées dans $B_1(0)$ munie de la norme (47) se note H^∞ .

Nous notons, comme d'habitude, $L^\infty(S_1)$ l'espace des fonctions essentiellement bornées sur $S_1 = \partial B_1(0)$ avec la norme de la *borne supérieure essentielle* :

Définition 4.8. (Rappel) Soit $f : S_1 \mapsto \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \infty\}$ une fonction mesurable par rapport à la mesure de Lebesgue μ .

Soit

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mu(f^{-1}(\alpha < x \leq \infty)) = 0\}.$$

Si $A = \emptyset$, posons $\beta = \infty$, sinon $\beta = \inf A$. Puisque

$$f^{-1}(\beta < x \leq \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\beta + \frac{1}{n} < x \leq \infty\right),$$

et puisque la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle, on voit que $\beta \in A$. On appelle β la *borne supérieure essentielle* de f .

La norme $\|f\|_\infty$ de la borne supérieure essentielle d'une fonction f mesurable à valeur complexe sur S_1 définie comme la borne supérieure essentielle de $|f|$.

4.6.2 Facteurs de Blaschke

Soit $a \in B_1(0)$, $a \neq 0$. Nous définissons une famille de fonctions homographiques (voir (45)) $b_a(z)$ telles que $b_a(z)$ est holomorphe sur $B_1(0)$, que $b_a(z) = 0$ si et seulement si $z = a$ et que $|b_a(z)| = 1$ sur S_1 :

$$b_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{z}a} \frac{|a|}{a} \quad (48)$$

On appelle la fonction homographique $b_a(z)$ un *facteur de Blaschke*.

Maintenant nous pouvons définir un produit infini (voir (4.1) sur $B_1(0)$)

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} b_{a_n}(z), \quad (49)$$

pour un entier $k \geq 0$ et pour une suite de nombres $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $B_1(0)$ non nuls.

Théorème 4.18. Soit $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $B_1(0)$ telle que $a_n \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty. \quad (50)$$

Alors la fonction $B(z)$ de (49) est de l'espace H^∞ et ne possède aucuns zéros que dans les points a_n (et $z = 0$ si k est strictement positif).

Démonstration : Soit $\alpha_n(z) = 1 - b_{a_n}(z)$. Alors

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n(z)).$$

On a la série correspondante :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n(z)| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{a_n - z}{1 - \bar{z}\bar{a}_n} \frac{|a_n|}{a_n} \right| = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n + |a_n|z}{(1 - \bar{z}\bar{a}_n)a_n} \right| (1 - |a_n|) \leq \frac{1+r}{1-r} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) \end{aligned} \quad (51)$$

si $|z| < r$.

Grâce aux résultats de (1.1.5) la série (51) converge absolument et normalement sur tout compact dans le disque, alors le produit (49) est aussi absolument et normalement convergent sur tout compact dans $B_1(0)$. Donc, $B(z)$ est une fonction holomorphe dans le disque $B_1(0)$ avec des zéros (peut-être multiples) aux points de la suite $a_{nn \in \mathbb{N}}$. Les théorèmes de Weierstrass (4.10) et d'unicité (Chapitre 1 th.1.9) montrent que on n'a pas d'autres zéros de $B(z)$. Puisque chaque facteur de Blaschke de (49) a une valeur absolue inférieure à 1 dans $B_1(0)$, on obtient $|B(z)| < 1$, c.q.f.d.

4.6.3 Classe de Nevanlinna

En fait, la condition (50) est aussi nécessaire : les zéros d'une fonction de classe H^∞ non identiquement nulle satisfont la condition (50).

Soit

$$\log^+(t) = \begin{cases} \log(t), & \text{si } t \geq 1 \\ 0, & \text{si } t < 1. \end{cases}$$

Définition 4.9. On dit qu'une fonction f holomorphe dans le disque $B_1(0)$ appartient à la classe de Nevanlinna (se note $N(B_1(0))$) si

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(r \exp(i\theta))| d\theta \right\} < \infty. \quad (52)$$

Remarque 12. Il est clair que $H^\infty \subset N(B_1(0))$ et la différence principale entre les deux classes est que la condition (52) implique des restrictions sur la croissance de f lorsque $|z| = r \rightarrow 1$ tandis que la condition de borne sur les intégrales

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r \exp(i\theta))| d\theta$$

n'impose rien sur la croissance.

Théorème 4.19. Soit $f \in N(B_1(0))$ et $f \neq 0$ identiquement dans $B_1(0)$. Soit $\{a_n\}$ l'ensemble des zéros de f (en comptant avec leur multiplicité et rang+© par la croissance de leur module : $|a_n| \leq |a_{n+1}|$) Alors la série (50) est convergente.

Remarque 13. On suppose que f possède le nombre infini de zéros dans le disque, sinon le théorème est trivial.

Démonstration : On peut toujours supposer que $f(0) \neq 0$ (sinon on peut remplacer f par une autre fonction $g(z) = z^{-k} f(z)$, où k est l'ordre du zéro de f à l'origine.).

Soit $Z_f(r)$ le nombre des zéros de f dans un disque $B_r(0)$, $r < 1$. Fixons un entier k tel que $Z_f(r) > k$.

Selon la formule de Jensen (4.15)

$$\log \left\{ |f(0)| \prod_{n=1}^{Z_f(r)} \frac{r}{|a_n|} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r \exp(i\theta))| d\theta$$

et on obtient immédiatement

$$\log \left\{ |f(0)| \prod_{n=1}^k \frac{r}{|a_n|} \right\} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(r \exp(i\theta))| d\theta. \quad (53)$$

Mais $f \in N(B_1(0))$ alors il existe une constante C telle que

$$\frac{|f(0)| r^k}{\prod_{n=1}^k |a_n|} \leq C, \quad 0 < r < 1. \quad (54)$$

L'inégalité (54) reste valable pour tout k lorsque $r \rightarrow 1$ (remarquons que $Z_f(r) \rightarrow \infty$) alors on obtient

$$\prod_{n=1}^{\infty} |a_n| \geq C^{-1} |f(0)| > 0. \quad (55)$$

Si $P_k = \prod_{n=1}^k |a_n|$ un produit partiel, on a :

$$P_k \leq \exp\left(-\sum_{n=1}^k (1 - |a_n|)\right).$$

En supposant que la série (50) est divergente lorsque $k \rightarrow \infty$ ($\sum_{n=1}^{\infty} (1-a_n) = \infty$) on obtient

$$\prod_{n=1}^{\infty} |a_n| = 0$$

contrairement à (55). C.q.f.d.

Corollaire 4.5. Si $f \in N(B_1(0))$ et $\{a_n\}$ est l'ensemble des zéros de f sur $B_1(0)$, alors la condition

$$\sum_n (1 - |a_n|) = \infty$$

implique que $f(z) \equiv 0$ dans $B_1(0)$.

5 Méthode du col

5.1 Rappel : L'intégrale de Gauss

Soit $Q(\mathbf{x})$ une forme quadratique sur \mathbb{R}^n et $A = \|a_{ij}\|$ est sa matrice dans une base orthonormée : si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et \langle, \rangle est le produit scalaire euclidien, on a

$$Q(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

On suppose aussi que $Q(\mathbf{x})$ est réelle et positive, c'est-à-dire,

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq \sigma \|\mathbf{x}\|^2, \sigma > 0.$$

Nous évaluerons l'intégrale de Gauss

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \prod_{i=1}^n dx_i.$$

Proposition 5.1.

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \prod_{i=1}^n dx_i = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}.$$

On va diagonaliser la forme $Q(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ par une transformation linéaire non-dégénérée $\mathbf{x} = B\mathbf{y}$:

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle AB\mathbf{y}, B\mathbf{y} \rangle = \langle B^*AB\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{y}\|^2,$$

où B^* denote la transformation adjointe à B : $\langle B\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, B^*\mathbf{y} \rangle$.

Alors, on obtient

$$BB^* = A^{-1}, \det A(\det B)^2 = 1.$$

L'intégrale I_n se réduit vers

$$I_n = |\det B| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle AB\mathbf{y}, B\mathbf{y} \rangle} d\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} = .$$

(par le théorème de Fubini)

$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y_j^2} dy_j = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}.$$

Nous avons utilisé ici le calcul de l'intégrale de Gauss unidimensionnelle :

Lemme 5.2.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Pour le vérifier on va faire “le truc de Feinman” et le théorème de Fubini pur $n = 2$:

$$(I_1)^2 = (I_1)(I_1) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) = \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

En passant aux coordonnées polaires dans \mathbb{R}^2 , on obtient :

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad dx dy = \rho d\rho d\theta, \quad 0 \leq \rho \leq +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

et

$$(I_1)^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \pi \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} d(\rho^2) = \pi.$$

Il évident que toutes intégrales ici sont (absolument) convergentes.

La proposition nous permet aussi d'évaluer une généralisation n -dimensionnelle F_n de l'intégrale dite de Fresnel :

Corollaire 5.1.

$$F_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \prod_{k=1}^n dx_k = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{\pm i \frac{\pi n}{4}}.$$

Pour $n = 1$ l'intégrale de Fresnel convergente est

$$F_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{\pm i \pi/4}.$$

5.2 Méthode du col réel

Nous nous intéressons au comportement asymptotique (lorsque $t \rightarrow \infty$) d'une famille d'intégrales réelles du type

$$I(t) = \int_a^b g(x) e^{t f(x)} dx. \quad (56)$$

On suppose, de plus, que la fonction $f(x)$ possède un maximum dans un point $c \in (a, b)$, alors $f'(c) = 0, f''(c) < 0$.

Soit $g(c) \neq 0$. On va voir le développement de Taylor de f autour du point c :

$$f(x) \cong f(c) + 1/2(x-c)^2 f''(c).$$

Le comportement asymptotique de (56) lorsque $t \rightarrow \infty$ soit donné par l'intégrale

$$\int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} g(c) e^{t(f(c)+1/2(x-c)^2 f''(c))} dx,$$

où $\epsilon > 0$ est fini.

Une transformation immédiate (le changement des variables $y = \sqrt{-t f''(c)/2}(x-c)$) montre que

$$I(t) \cong \frac{g(c) e^{t f(c)}}{\sqrt{-t f''(c)/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

L'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$ égale à $\sqrt{\pi}$ et, par conséquent, l'asymptotique de l'intégrale (56) lorsque $t \rightarrow \infty$ est donnée par la formule :

$$\int_b^a g(x) e^{t f(x)} dx \cong e^{t f(c)} g(c) \sqrt{-\frac{2\pi}{t f''(c)}}. \quad (57)$$

5.3 Exemple : formule de Stirling

On va appliquer l'asymptotique (57) à l'intégrale suivante, définissant la fonction Γ (43) comme l'intégrale :

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^t dx = \int_0^{\infty} e^{-x+t \log x} dx = \int_0^{\infty} e^{t(\log x - \frac{x}{t})} dx.$$

On trouve que $f'(x) = 0$ avec $x = t$ et $f''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$. Dans ce cas, en utilisant la formule (57), on obtient

$$\Gamma(t+1) \cong e^{t \log t - 1} \sqrt{\frac{-2\pi}{t(-t^{-2})}} = t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}, \quad t \rightarrow \infty.$$

On sait que la fonction Gamma $\Gamma(t+1)$ pour $t = n, n \in \mathbb{N}$ s'exprime par la factorielle de n : $\Gamma(n+1) = n!$. Alors, l'approximation de la factorielle pour un n naturel est

$$n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad (58)$$

(la formule célèbre de Stirling).

5.4 Méthode du col réel. Comportement asymptotique lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Considérons l'intégrale :

$$I(t) = \int_a^b e^{-f(x)/t} dx,$$

où la fonction $f(x)$ est une fonction réelle, analytique dans un voisinage de (a, b) , t est un paramètre positif. Nous voulons évaluer cette intégrale lorsque $t \rightarrow +0$. Pour les petites valeurs de t l'intégrale est dominée par les maxima de l'intégrande (par les minima de $f(x)$).

On va considérer deux cas :

a) Un minimum de $f(x)$ est un point intérieur de l'intervalle (a, b) . Les minima sont c donnés par $f'(c) = 0, f''(c) > 0$.

Nous négligeons des corrections d'ordre $e^{-const/t}$ alors il suffit, (comme dans le cas de l'asymptotique $t \rightarrow \infty$), d'effectuer l'intégration sur le voisinage fini $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ de $x = c$, où $\epsilon > 0$ arbitrairement petit. En utilisant le développement de Taylor

$$f(x) \cong f(c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c),$$

on comprend que la contribution hors de l'intervalle $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ est bornée par

$$(b-a)e^{-\frac{f''(c)\epsilon^2}{2t}}.$$

Un changement de variables $y = \frac{(x-c)}{\sqrt{t}}$ permet de décrire le développement de la fonction $f(x)$ comme

$$\frac{f(x)}{t} = \frac{f(c)}{t} + \frac{1}{2}y^2 f''(c) + \frac{1}{6}y^3 \sqrt{t} f'''(c) + \frac{1}{24}y^4 t f^{iv}(c) + O(t^{3/2}).$$

A cause du caractère négligeable des contributions loin du col on peut intégrer sur $(-\infty, +\infty)$. On obtient une intégrale gaussienne

$$I(t) \cong \sqrt{\frac{2\pi t}{f''(c)}} e^{f(c)/t}.$$

Ici, nous avons observé qu'à l'ordre dominant il suffit de traiter le terme quadratique par y . Pour calculer les corrections d'ordre supérieur il faut développer l'exponentielle par t et l'intégrer terme à terme :

$$I(t) = \sqrt{\frac{2\pi t}{f''(c)}} e^{f(c)/t} J(t),$$

où $J(t) = 1 + J_1 t + \dots$. C'est un développement formel et (en général) il diverge pour toute valeur de t .

b) Le minimum de f est un bord a ou b de l'intervalle d'intégration.

Ce n'est pas le cas qui va nous intéresser parce que on peut développer la fonction $f(x)$ en voisinage de minimum et l'intégrer.

5.5 Utilisation de la méthode du col réel pour une intégrale complexe.

On cherche une formule asymptotique d'intégrale du type

$$I(t) = \int_{\gamma} g(z) e^{tf(z)} dz,$$

où γ désigne un chemin (un "contour") et t est un paramètre réel tendant vers l'infini. Notre but ici est d'établir le théorème suivant :

Théorème 5.3. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe de variable $z = x + iy$ dans un ouvert U de \mathbb{C} et $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ est un point critique de f tel que $f'(z_0) = 0, f''(z_0) \neq 0$. Soit $g(z)$ une fonction complexe telle que $g(z_0) \neq 0$. Alors il a une formule asymptotique lorsque $t \rightarrow +\infty$:

$$I(t) \cong \pm g(z_0) e^{tf(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-tf''(z_0)}}. \quad (59)$$

Le signe \pm étant donné par le sens du parcours de la ligne de plus grande pente.

Démonstration : Si f est holomorphe dans U l'intégrale $I(t)$ ne dépend pas du chemin γ et alors il faut bien choisir le "bon contour".

On écrit f sous la forme $f(z) = \Re f + i\Im f = u(x, y) + iv(x, y)$, alors les courbes $u = c_1$ et $v = c_2$ forment dans le domaine d'holomorphie deux familles de courbes bi-orthogonales et deux courbes $\Re f = u = c_1$ (ou $\Im f = v = c_2$) ne peuvent se croiser qu'en un point singulier ou en un col.

La famille $\Im f = c_2$ est la famille des lignes de plus grande pente de la partie réelle $\Re f = u$ et réciproquement.

On va choisir comme chemin γ la ligne de plus grande pente de la partie réelle u de f alors en voisinage du col z_0

$$I(t) = e^{it\Im f(z_0)} \int_{\gamma} g(z) e^{t\Re f(z)} dz.$$

Soit $z = \gamma(\tau) = x(\tau) + iy(\tau)$, ($\tau \in [a, b]$) une équation paramétrique de la ligne de plus grande pente passant par $z_0 = \gamma(\tau_0)$. On pose $f(\tau) = f(\gamma(\tau))$, $u(\tau) = u(\gamma(\tau))$ et $g(\tau) = g(\gamma(\tau))$.

Notre problème se ramène à l'estimation asymptotique de l'intégrale réelle :

$$\int_a^b g(\tau) e^{tu(\tau)} \dot{\gamma}(\tau) d\tau.$$

Ici $\dot{\gamma}(\tau)$ dénote la dérivée $\frac{d\gamma}{d\tau}$.

La formule (59) donne l'estimation asymptotique de cette intégrale et on obtient (lorsque $t \rightarrow +\infty$) :

$$I(t) \cong g(\tau_0) \dot{\gamma}(\tau_0) e^{tu(\tau_0)} \sqrt{\frac{-2\pi}{t \frac{d^2 u}{d\tau^2}(\tau_0)}}. \quad (60)$$

On va calculer la dérivée seconde de $f(\tau)$ par rapport à τ :

$$f(\gamma(\tau)) = u(\gamma(\tau)) + iv(\gamma(\tau)), \dot{f} = f'_z \dot{z} = f'_z \dot{\gamma}.$$

Si $z_0 = \gamma(\tau_0)$ est un point critique, on a $f'_z(z_0) = 0$ et la dérivée seconde

$$\ddot{f} = \frac{d^2 f}{d\tau^2} = f''_{zz}(\tau)(\dot{\gamma})^2 + f'_z \ddot{\gamma}$$

s'écrit dans la forme $\ddot{f}(\tau_0) = f''_{zz}(\tau_0)(\dot{\gamma}(\tau_0))^2 = \dot{\gamma}(\tau_0)^2 f''(z_0)$.

De l'autre part, la dérivée seconde de $\Re f = u$ est toujours réelle. En effet, car $\frac{dv}{d\tau} = 0$ en vue de $v = cste$, on obtient

$$\ddot{f}(\tau) = \frac{d^2 u}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{du}{d\tau} \right),$$

d'où

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2}(\tau_0) = \pm |\dot{\gamma}|^2(\tau_0) |f''(z_0)|.$$

Il faut choisir le signe $-$ à cause du fait que la ligne $\Re f = u$ possède un maximum en τ_0 .

On écrit $f''(z_0) = |f''(z_0)|e^{i\alpha}$ et $\dot{\gamma}(\tau_0) = |\dot{\gamma}(\tau_0)|e^{i\phi}$. Ici, l'angle ϕ de la direction tangente à la ligne de plus grande pente, est relié à l'angle α par la relation $2\phi + \alpha = \pi$, d'où $\phi = (\pi - \alpha)/2$ ou $\phi = (\pi - \alpha)/2 + \pi$ selon le sens du parcours de la courbe.

Le théorème se résulte de la formule (60) :

$$I(t) \cong \pm g(z_0) e^{tf(z_0)} e^{i(\pi-\alpha)/2} \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(z_0)|}} = \pm g(z_0) e^{tf(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-tf''(z_0)}} \quad (61)$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$.

5.6 Exemple : fonction de Bessel

On considère la fonction $J_n(x)$, appelée fonction de Bessel d'ordre n :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - n\theta)} d\theta$$

Cette fonction (par des raisons de parité) s'écrit aussi comme

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta$$

Pour $n = 0$ on obtient par changement de variable $\theta \rightarrow \theta - \pi/2$

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta.$$

Evaluons la fonction de Bessel $I_0(x)$ modifiée :

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos \theta} d\theta.$$

Le lien de cette fonction avec la fonction de Bessel standard $J_0(x)$ est donné par la formule $I_0(x) = J_0(ix)$.

Cette intégrale est une fonction paire du paramètre x et les comportements pour $x \rightarrow \pm\infty$ sont reliés.

Les cols sont donnés par l'équation $\sin \theta = 0, \theta = 0(\text{mod}\pi)$.

Soit $x \rightarrow +\infty$, le col dominant est $\theta = 0$, alors au voisinage du col on développe

$$x \cos \theta = x \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O(\theta^6) \right)$$

et on l'estime (avec un changement de variables $\phi = \theta\sqrt{x/2}$) comme

$$I_0(x) = \frac{e^x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\theta^2/2} \left(1 + \frac{1}{24}x\theta^4 \right) d\theta + O\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + \frac{1}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right).$$

5.7 Méthode du col à plusieurs variables

Nous discuterons brièvement de l'asymptotique de l'intégrale générale dans \mathbb{R}^n :

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n dx_k e^{-tF(x_1, \dots, x_n)},$$

où pour simplifier F est analytique à valeur complexe.

On s'intéresse au comportement de $I(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Dans cette limite, l'intégrale est dominée par les cols $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ tels que :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F(\mathbf{x}_0) = 0, k = 1, \dots, n.$$

Dans le cas où il existe plusieurs cols il faut classer les cols par la valeur de la partie réelle $\Re F$. Le col dominant sera celui qui correspond à $\Re F$ maximal. Une déformation du domaine d'intégration initiale peut parfois éviter le col dominant. Dans le cas avec de plusieurs variables il peut ne pas être simple de reconnaître quels cols y contribuent.

Pour calculer la contribution dominante du col \mathbf{x}_0 , nous changeons de variables :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{t}}.$$

On va développer la fonction $F(x)$ par t et donc par y :

$$tF(x_1, \dots, x_n) = tF(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j \\ + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{t^{k/2-1} k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial^k F(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{i_1}, \dots, \partial x_{i_k}} y_{i_1} \dots y_{i_k}.$$

Le changement de variable assure que le terme quadratique en \mathbf{y} est indépendant de t . L'intégrale devient :

$$I(t) = \frac{e^{-tF(\mathbf{x}_0)}}{t^{n/2}} \int \prod_{k=1}^n dy_k e^{-1/2! \sum_{kl} \frac{\partial^2 F(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k \partial x_l} y_k y_l - G(\mathbf{y})},$$

et le "reste" $G(\mathbf{y})$ s'écrit comme

$$G(\mathbf{y}) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{t^{k/2-1} k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial^k F(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{i_1}, \dots, \partial x_{i_k}} y_{i_1} \dots y_{i_k}.$$

Développons l'intégrante en puissances de $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

A l'ordre dominant on trouve (avec le calcul de l'intégrale de Gauss en dimension n) que lorsque $t \rightarrow +\infty$

$$I(t) \cong \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{\det \text{Hess} F(\mathbf{x}_0)}} e^{-tF(\mathbf{x}_0)}.$$

Exercices du Chapitre "Fonctions holomorphe. Etudes géométriques"

Exercice 5.1. Adhérence et points d'accumulation

Soit $A \subset \mathbb{C}$, $B \subset \mathbb{C}$, où :

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{p}{m} + i \frac{q}{n}, p, q \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

et

$$B = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| < 1 \}.$$

Trouver des points d'accumulations de A et de B , leurs frontières et leurs adhérences. Les ensembles A et B sont-ils : a) ouvertes; b) fermés; c) domaines?

Indications Corrigé

Exercice 5.2. Dérivabilité - 1

Montrer que la fonction

$$w(z) = \begin{cases} \frac{x^{4/3} y^{5/3}}{x^2 + y^2} + i \frac{x^{5/3} y^{4/3}}{x^2 + y^2}, & \text{si } z \neq 0 \\ 0, & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

n'est pas dérivable dans l'origine $z = 0$.

Indications Corrigé

Exercice 5.3. Dérivabilité - 2

La fonction $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ avec le domaine de définition D_f dans un point $z \in D_f$ admet les propriétés suivantes :

a) u et v sont différentiables;

b) Elle existe la limite $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$.

Montrer que soit f soit \bar{f} est dérivable.

Indications Corrigé

Exercice 5.4. Dérivabilité dans un point

Soit $w = f(z) = z\Re(z)$, $D_f = \mathbb{C}$. Démontrer que cette fonction est dérivable seulement en $z = 0$. Trouver $f'(0)$.

Indications Corrigé

Exercice 5.5. Cauchy -Riemann

Démontrer que la fonction $f(z) = \sqrt{|xy|}$, $D_f = \mathbb{C}$ satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann dans l'origine $z = 0$ mais la dérivée $f'(0, 0)$ n'existe pas.

Indications Corrigé

Exercice 5.6. Principe d'argument. Théorème de Rouché

Déterminer le nombre des zéros du polynôme $P(z) = z^5 - 12z^2 + 14$ dans

a) l'anneau $V_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 5/2\}$;

b) l'anneau $V_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$;

c) le demi-plan $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\}$.

Indications Corrigé

Exercice 5.7. Théorème de Rouché

Soit f analytique dans le disque fermé $\bar{B}_1(0)$. Montrer qu'il existe un tel nombre $\rho > 0$ que $\forall w \in B_\rho(0)$ l'équation $z = wf(z)$ a une seule racine dans le disque ouvert $B_1(0)$.

[Indications](#) [Corrigé](#)

5.8 Indications

Indications pour Exercice 5.1

1. Pour A : en utilisant que \mathbb{Q} est dense partout dans \mathbb{R} , montrer que l'ensemble des points d'accumulation de A ainsi que l'adhérence \bar{A} est \mathbb{C} .

2 Pour B : re-écrire B comme

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 < (x^2 - y^2)\}$$

et passer au coordonnées polaires (ρ, ϕ) . Trouver que la frontière de ∂B est une courbe $\rho^2 = 2 \cos(2\phi)$. Utiliser le fait que un inégalité stricte est stable par rapport a l'application d'une fonction continue. (si l'inégalité est vrai dans un point (ρ_0, ϕ_0) elle st aussi vrai dans un voisinage $\mathcal{O}(\rho_0, \phi_0)$.)

Indications pour Exercice 5.2

Observer que la limite $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w(z)}{z}$ n'existe pas.

Indications pour Exercice 5.3

Utiliser que la limite $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$ est independante de la direction d'approche et prendre $\Delta z = \Delta x$ puis $\Delta z = \Delta y$. Montrer que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

et puis que

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Indications pour Exercice 5.4

Vérifier les conditions de Cauchy-Riemann

Indications pour Exercice 5.5

1. Vérifier les conditions de Cauchy-Riemann dans $z = 0$.

2. On pose $\frac{\Delta f(0, \Delta z)}{\Delta z}$ Montre que $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0, \Delta z)}{\Delta z} = 0$.
 3. Calculer cette limite si $x \rightarrow 0$, $x = y$, $x > 0$.

Indications pour Exercice 5.6

- a) Appliquer le théorème de Rouché pour les disques $B_1(0)$ et $B_{5/2}(0)$.
 b) Appliquer le théorème de Rouché pour le disque $B_2(0)$.
 c) Vérifier que P s'annule pas sur $\Re z = 0$. Appliquer le principe de l'argument pour le demi-disque $\tilde{B}_r(0) = \{|z| < r, \Re z > 0\}$, où $r > 0$ est assez grand.

Indications pour Exercice 5.7

Présenter l'équation dans une forme $\phi(z) + \psi(z) = 0$ avec $\phi(z) = z$ et $\psi(z) = -wf(z)$. Estimer $|\psi(z)|$. Appliquer le théorème de Rouché.

5.9 Corrigé

Corrigé de l'Exercice 5.1

1. Les points de $A \subset \mathbb{R}^2$ ont leurs deux coordonnées rationnelles. Lorsque \mathbb{Q} est dense partout dans \mathbb{R} , chaque voisinage $B_\delta(z)$ d'un point $z \in \mathbb{C}$ contient un infinité des points de A . Alors l'ensemble de points d'accumulation A' est \mathbb{C} . D'où $\bar{A} = \mathbb{C}$ ce que montre le fait que A n'est pas fermé.

L'ensemble des nombres irrationnels est aussi dense partout dans \mathbb{R} . C'est pourquoi tout point de A ne peut pas être d'un point intérieur. Alors, A n'est pas un ensemble ouvert et puis ne peut pas être d'un domaine.

Finalement, $\forall z \in \mathbb{C}$ dans chaque δ -voisinage $B_\delta(z)$ ils existent des points de A ainsi que $\mathbb{C} \setminus A$, c'est-à-dire, $\partial A = \mathbb{C}$. 2. Soit $x = \Re z$ et $y = \Im z$. L'ensemble B se représente comme

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x^2 + y^2)^2 < (x^2 - y^2)\}.$$

En faisant le passage vers les coordonnées polaires, on a :

$$B = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 | \rho^2 < 2 \cos 2\phi\}.$$

La frontière de B est donnée par

$$\partial B = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 | \rho^2 = 2 \cos 2\phi\}.$$

C'est une courbe connue comme la lemniscate de Bernoulli est l'ensemble B est l'intérieur de la courbe. Soit $z_0 = (\rho_0, \phi_0) \in B$, alors $\rho_0^2 < 2 \cos 2\phi_0$ et $\rho_0^2 - 2 \cos 2\phi_0 < 0$! En vue de continuité de la fonction $\phi \mapsto \rho^2 - 2 \cos 2\phi$ on a qu'il existe un voisinage $B_\delta(z_0) \subset B$ où l'inégalité est encore satisfait, alors B est un ouvert. Soit $B = B_1 \cup B_2$ où l'ensemble B_1 contient les points de B tels que $\Re z < 0$ et l'ensemble B_2 - les points avec $\Re z > 0$. L'origine n'appartient pas à l'ensemble B alors si $z_1 \in B_1$ et $z_2 \in B_2$ on n'a pas d'un chemin lisse par morceaux d'extrémités z_1 et z_2 . Donc, B n'est pas un domaine.

Corrigé de l'Exercice 5.2

On va montrer que la limite $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w(z)}{z}$ n'existe pas d'où le résultat. Soit $z = x + iy$ et

$$\frac{w(z)}{z} = \begin{cases} \frac{x^{7/3}y^{5/3} + x^{5/3}y^{7/3}}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{x^{8/3}y^{4/3} - x^{4/3}y^{8/3}}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si } z \neq 0 \\ 0, & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Si $y = x \rightarrow 0$, on a $z \rightarrow 0$ et $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w(z)}{z} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{4x^4} = \frac{1}{2}$, mais si $z = x \rightarrow 0$ on a $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w(z)}{z} = 0$ et la limite $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w(z)}{z}$ n'existe pas.

Corrigé de l'Exercice 5.3

Soit $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$ et $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, alors on a

$$\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \sqrt{\frac{\Delta u^2 + \Delta v^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

L'existence de la limite $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$ permet passer vers la limite des faciès différentes :

Si $\Delta z = \Delta x$ on obtient :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}. \quad (62)$$

Si $\Delta z = i\Delta y$ on obtient :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}.$$

Alors, nous obtenons que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

Les fonctions u et v sont différentiables dans le point $z = (x, y)$ et puis leurs accroissement dans ce point s'expriment comme :

$$\Delta u = du + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2});$$

$$\Delta v = dv + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

L'expression $\frac{\Delta u^2 + \Delta v^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ on peut écrire comme :

$$\frac{\Delta u^2 + \Delta v^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)\Delta x^2 + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)\Delta y^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y + o(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

En utilisant (62), on obtient

$$\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + o(1).$$

Nous pouvons déduire que

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

car

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}.$$

C'est possible si :

a)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

et la fonction f satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann, où

b)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

et la fonction \bar{f} est dérivable en z .

Corrigé de l'Exercice 5.4

Puisque $f(z) = u + iv = x^2 + ixy$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = y$, on obtient, que les conditions de Cauchy-Riemann satisfont si et seulement si $z = 0$.

On a (par définition) que

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{x \rightarrow 0; y \rightarrow 0} \frac{(x^2 + ixy)(x - iy)}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0; y \rightarrow 0} \frac{(x^2 + ixy)}{x + iy} = \lim_{x \rightarrow 0; y \rightarrow 0} \frac{x^3 - ix^2y + ix^2y + xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Corrigé de l'Exercice 5.5

Let $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ où $u = \sqrt{|xy|}$, $v = 0$. Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial u(0, 0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y} = 0.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann satisfont en $z = 0$.

De l'autre côté, on considère les relations

$$\frac{\Delta f(0, \Delta z)}{\Delta z} = \frac{\sqrt{|\Delta z|}}{\Delta z}.$$

Si $z = (x, 0)$ et $x \rightarrow 0$ alors on obtient $\Delta z \rightarrow 0$ et $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0, \Delta z)}{\Delta z} = 0$.
 Soit $y = x$, $x > 0$ et $x \rightarrow 0$ alors $\Delta z \rightarrow 0$ et

$$\frac{\Delta f(0, \Delta z)}{\Delta z} = \frac{x}{x(1+i)} \rightarrow \frac{1-i}{2},$$

donc, la limite $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0, \Delta z)}{\Delta z}$ n'existe pas et la fonction f n'a pas de dérivée en $z = 0$. On remarque, que l'exemple n'est pas une contradiction au critère de dérivabilité (??) de la fonction dans un point z fixé. La fonction réelle $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$ n'est pas différentiable à l'origine $(0, 0)$ et, donc, une condition du théorème est violée.

Corrigé de l'Exercice 5.6

a) Soit $P(z) = \phi(z) + \psi(z)$, $\phi(z) = z^5$, $\psi(z) = -12z^2 + 14$.
 On a sur le cercle $S_{5/2} = \{|z| = 5/2\}$:

$$|\phi(z)| = 3125/32 = 97 \frac{21}{32}, |\psi(z)| \leq |-12z^2| + 14 = 89,$$

d'où $|\phi(z)| > |\psi(z)|$. Le théorème de Rouché dit que les 5 racines de P se situent dans le disque $B_{5/2}(0)$.

Estimons de leurs modules. Pour cela on prend :

$$P(z) = \phi_1(z) + \psi_1(z), \phi_1(z) = 14, \psi_1(z) = z^5 - 12z^2.$$

On a sur le cercle $S_1 = \{|z| = 1\}$:

$$|\phi_1(z)| = 14, |\psi_1(z)| \leq 13,$$

d'où, par le thémème de Rouché, le polynôme P n'a pas des racines dans le disque $B_1(0)$. Alors les 5 racines de P se situent dans l'anneau V_1 . b) Soit $P(z) = \phi_3(z) + \psi_3(z)$, $\phi_3(z) = -12z^2$, $\psi_3(z) = z^5 + 14$.

On a sur le cercle $S_2 = \{|z| = 2\}$:

$$|\phi_3(z)| = 48, |\psi_3(z)| \leq |z^5| + 14 = 46.$$

Par le théorème de Rouché le nombre des zéroes du polynôme P dans le disque $B_2(0)$, et, par conséquent, dans l'anneau V_2 égale à 2, comme des celles de la fonction $\phi_3(z)$.

c) Le polynôme $P(z)$ s'annule pas sur l'axe $\Re z = 0$ car $P(iy) = iy^5 + 12y^2 + 14$. Soit $r > 0$ et $\tilde{B}_r(0)$ un demi-sque tel que $|z| < r$, $\Re z > 0$. Le nombre des zéroes de P dans le demi-plan $\Re z > 0$ est déterminé par le principe d'argument :

$$N = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} (\Delta_{[-ir, ir]} \arg P(z) + \Delta_{\Gamma_r} \arg P(z)),$$

où $\Gamma_r = (\gamma_r, \gamma_r^-)$, $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C}, z = r \exp(it), -\pi/2 \leq t \leq \pi/2\}$.

Si r est assez grand, on a :

$$\Delta_{[-ir, ir]} \arg P(z) = \Delta_{y \in [-r, r]} (iy^5 + 12y^2 + 14) = \Delta_{y \in [r, 0]} \arctan \frac{y^5}{12y^2 + 14} +$$

$$\Delta_{y \in [0, -r]} \arctan \frac{y^5}{12y^2 + 14} = -\pi/2 - \pi/2 + O(r^{-1}) = -\pi + O(r^{-1}).$$

De l'autre côté, on obtient

$$\Delta_{\Gamma_r} \arg P(z) = \Delta_{\Gamma_r} \arg z^5 + \Delta_{\Gamma_r} \left(1 + \frac{11 - 12z^2}{z^5}\right) = 5\pi + O(r^{-1}).$$

Le résultat est $N = \frac{1}{2\pi} (-\pi + 5\pi) = 2$.

Corrigé de l'Exercice 5.7

On représente l'équation $z = wf(z)$ dans la forme additive $\phi(z) + \psi(z) = 0$, $\phi(z) = z$, $\psi(z) = -wf(z)$.

Sur le cercle $S_1 : |z| = 1$ on a : $|\phi(z)| = 1$, $|wf(z)| \leq |w|M$, où $M = \max_{z \in S_1} |f(z)|$. Alors le théorème de Rouché est applicable, si $|w| < \frac{1}{M}$.

Exercices du Chapitre “Principe du maximum”

Exercice 2.8. Théorème de Liouville. Démonstration par une intégrale.

Le théorème de Liouville dit : une fonction analytique bornée dans tout plan complexe est une constante.

Démontrer ce théorème, en calculant l'intégrale

$$\oint_{\Gamma_r} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)},$$

où le chemin $\Gamma_r = (\gamma_r, \gamma_r^-$ et $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, ($|a| < r, |b| < r$) et $r \rightarrow \infty$.

[Indications](#) [Corrigé](#)

Exercice 2.9. Maximum de module - 1

Soit f analytique dans le disque $B_r(0)$ et $f \neq \text{const}$.

Montrer que la fonction $M(r) = \sup_{z \in S_r} |f(z)|$ est strictement croissante sur l'intervalle $(0, R)$

[Indications](#) [Corrigé](#)

Exercice 2.10. Maximum de module - 2

Soit f analytique dans le domaine $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$ et $f \neq \text{const}$. Nous supposons aussi que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) < \infty$ et que $|f|$ est continue dans \bar{D} .

Montrer que :

a) $|f(z)|$ admet son maximum sur $S_r = \{|z| = r\}$;

b) la fonction $M(r) = \sup_{z \in S_r} |f(z)|$ est strictement décroissante sur l'intervalle $(R, +\infty)$.

[Indications](#) [Corrigé](#)

Exercice 2.11. Maximum de module - 3

Soit $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$. Démontrer que si $P(z) \neq z^n$ il existe au moins un point du cercle $S_1 = \{|z| = 1\}$, où $|P(z)| > 1$.

[Indications](#) [Corrigé](#)

Exercice 2.12. Lemme de Schwarz - 1

Soit f analytique dans le disque fermé $\bar{B}_r(0)$ et $|f| \leq M$.

Montrer que $\forall z \in B_r(0)$

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{M^2 - \bar{f}(0)f(z)} \right| \leq \frac{|z|}{rM}.$$

[Indications](#) [Corrigé](#)

Exercice 2.13. Lemme de Schwarz - 2

Soit f analytique dans le disque fermé $\bar{B}_1(0)$ et $\forall z \in \bar{B}_1(0) |f| \leq M$.

Montrer que

$$M|f'(0)| \leq M^2 - |f(0)|^2.$$

[Indications](#) [Corrigé](#)

Exercice 2.14. Formule de Poisson

Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{1 - 2a \sin \theta + a^2} d\theta,$$

si $-1 < a < 1$, $n \in \mathbb{N}$.

[Indications](#) [Corrigé](#)

2.10 Indications

Indications pour Exercice 2.8

Appliquer la formule intégrale de Cauchy, exprimer l'intégrale

$$\oint_{\Gamma_r} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$$

comme une somme de deux intégrales sur Γ_a et Γ_b où

$\Gamma_a = \{|z-a| < \epsilon_1\}$, $\Gamma_b = \{|z-b| < \epsilon_2\}$ - deux cercles de l'orientation positive des petits rayons.

Estimer la valeur absolue de l'intégrale et calculer sa limite lorsque $r \rightarrow +\infty$.

Indications pour Exercice 2.9

C'est un corollaire direct du principe de maximum.

Indications pour Exercice 2.10

Considérer la fonction $\phi(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta})$. Etudier son comportement et ses singularités. Appliquer le principe du maximum et l'exercice précédent.

Indications pour Exercice 2.11

Considérer la fonction $z^{-n}P(z)$. Vérifier que cette fonction satisfait aux toutes conditions de l'exercice précédent. Montrer que $|z^{-n}P(z)| \equiv 1$.

Indications pour Exercice 2.12

Regarder la fonction $\phi(\zeta) = \frac{f(r\zeta)}{M}$. Etudier ses propriétés dans le disque fermé $\bar{B}_1(0)$.

En utilisant que tout automorphisme du disque unitaire $B_1(0)$ est de la forme homographique :

$$\zeta \mapsto \exp(i\theta) \frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta}, \quad |a| < 1,$$

montre que la fonction :

$$\zeta \mapsto F(\zeta) = \frac{\phi(\zeta) - \phi(0)}{1 - \bar{\phi}(0)\phi(\zeta)}$$

satisfait aux conditions du lemme de Schwarz.

Indications pour Exercice 2.13

Regarder la fonction

$$z \mapsto F(z) = \frac{M(f(z) - f(0))}{M^2 - \bar{f}(0)f(z)}$$

et vérifier qu'elle satisfait aux conditions du lemme de Schwarz.

Calculer la limite :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{M(f(z) - f(0))}{z}.$$

Indications pour Exercice 2.14

Utiliser la formule de Poisson (??) pour $t = \frac{\pi}{2}$. Présenter $\sin n\theta$ comme $\Re(-i \exp(in\theta))$.

2.11 Corrigé

Corrigé de l'Exercice 2.8

Soient $\Gamma_a : |z - a| = \epsilon_1$ et $\Gamma_b : |z - b| = \epsilon_2$ deux cercles de rayons "assez petits" avec l'orientation positive.

La formule intégrale de Cauchy montre que

$$\oint_{\Gamma_r} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} = \int_{\Gamma_a} \frac{\frac{f(z)}{z-b} dz}{z-a} + \int_{\Gamma_b} \frac{\frac{f(z)}{z-a} dz}{z-b} = 2\pi \left(\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right).$$

On peut estimer la valeur absolue de l'intégrale comme

$$\left| \oint_{\Gamma_r} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} \right| \leq 2\pi r \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{(r-|a|)(r-|b|)},$$

où $\max_{|z|=r} |f(z)| \leq M$, $M = \text{const.}$

On obtient, donc,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \oint_{\Gamma_r} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} = 0 = 2\pi \left(\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right),$$

d'où $\forall a, b \in \mathbb{C} f(a) = f(b)$ et puis $f(z) = \text{const.}, \forall z \in \mathbb{C}$.

Corrigé de l'Exercice 2.9

Soient deux rayons r_1 et r_2 tels que $0 < r_1 < r_2 < R$. On suppose que $M(r_2) \leq M(r_1)$. La fonction $f(z)$ est analytique dans $B_{r_2}(0)$ et continue dans le disque fermé $\bar{B}_{r_2}(0)$, alors par le principe du maximum (??) son module $|f(z)|$ admet son maximum précisément sur $S_{r_2} = \partial \bar{B}_{r_2}(0)$. C'est-à-dire, $M(r_2) > M(r_1)$ (égalité est impossible car $f \neq \text{const.}$).

Corrigé de l'Exercice 2.10

On considère la fonction $\zeta \mapsto \phi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. C'est une fonction analytique dans le disque $B_{1/r}(0) = \{\zeta : |\zeta| < \frac{1}{r}\}$. L'origine $\zeta = 0$ n'est pas un point singulier de la fonction $\phi(\zeta)$ et son module est continu sur le disque fermé $\bar{B}_{1/r}(0)$.

Par le principe du maximum, le module $|\phi|$ admet son maximum sur le cercle $S_{1/r} = \partial \bar{B}_{1/r}(0)$ tandis que $|f|$ - sur le cercle S_r .

L'exercice précédent (2.9) implique que $\sup_{|\zeta|=r} |\phi(\zeta)|$ est strictement croissante sur $(0, 1/r)$. Par conséquent, $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ est strictement décroissante sur $(r, +\infty)$.

Corrigé de l'Exercice 2.11

On considère la fonction $z^{-n}P(z)$. Elle satisfait aux conditions de l'exercice précédent (2.10) et, par conséquent, son module admet son maximum dans $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ sur le cercle $S_1 : |z| = 1$. Soit $M = \max_{|z|=1} |z^{-n}P(z)| \leq 1$ alors, par le résultat de 2.10, ou $|z^{-n}P(z)| \equiv 1$, et $P(z) \equiv z^n$, ou $|z^{-n}P(z)| < 1, \forall z \in D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, mais la dernière inégalité est impossible.

Corrigé de l'Exercice 2.12

La fonction $\zeta \mapsto \phi(\zeta) = \frac{f(r\zeta)}{M}$ est analytique dans le disque fermé $\bar{B}_1(0) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq 1\}$ et $|\phi(\zeta)| \leq 1$.

On sait (??) que tout automorphisme du disque unitaire fermé a la forme homographique :

$$z \mapsto \exp(i\theta) \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, |a| < 1.$$

Alors, la fonction

$$\zeta \mapsto F(\zeta) = \frac{\phi(\zeta) - \phi(0)}{1 - \bar{\phi(0)}\phi(\zeta)}$$

satisfait aux conditions du lemme de Schwarz et puis on a :

$$\left| \frac{\phi(\zeta) - \phi(0)}{1 - \bar{\phi(0)}\phi(\zeta)} \right| \leq |\zeta|$$

si $|\zeta| \leq 1$.

Prenant ici $\zeta = \frac{z}{r}$ et sachant que $\phi\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{f(z)}{M}$ on obtient le résultat.

Corrigé de l'Exercice 2.13

Soit

$$z \mapsto F(z) = \frac{M(f(z) - f(0))}{M^2 - \bar{f(0)}f(z)}$$

une fonction auxiliaire. Cette fonction $F(z)$ satisfait aux conditions du lemme de Schwarz et puis $|F'(0)| \leq 1$. On obtient de la définition de $F(z)$ que

$$\frac{M(f(z) - f(0))}{z} = \frac{F(z)}{z} (M^2 - \bar{f(0)}f(z))$$

En passant au limite lorsque $z \rightarrow 0$ dans cette égalité, nous obtenons l'égalité suivante :

$$Mf'(0) = F'(0)(M^2 - |f(0)|^2).$$

En comptant, que $|F'(0)| \leq 1$, on obtient le résultat.

Corrigé de l'Exercice 2.14

Nous utilisons la formule de Poisson :

$$I = \frac{2\pi}{1-a^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-a^2) \sin n\theta}{1-2a \cos(\pi/2 - \theta) + a^2} d\theta =$$

$$\frac{2\pi}{1-a^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Re(-i \exp(in\theta))(1-a^2) d\theta}{1-2a \cos(\pi/2 - \theta) + a^2} =$$

$$\frac{2\pi}{1-a^2} \Re(-ia^n \exp(in\pi/2)) = \frac{2\pi}{1-a^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k \\ \frac{2\pi}{1-a^2} (-1)^k a^{2k+1}, & \text{si } n = 2k + 1, \end{cases}$$

Ici, $k \in \mathbb{N}$.

Exercices du Chapitre "Prolongement analytique"

Exercice 3.15. Eléments et leurs prolongements -1.

Démontrer que les éléments

$$F_1 = (B_1, \sum_{n=0}^{\infty} z^n), \quad B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

et

$$F_2 = (B_2, \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z-i}{1-i})^n), \quad B_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < \sqrt{2}\}$$

sont les prolongements analytiques l'un de l'autre.

Indications Corrigé

Exercice 3.16. Eléments et leurs prolongements -2

Démontrer que l'élément

$$F = (B_1, \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\frac{1-z}{2})^n), \quad B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 2\}$$

est un prolongement analytique immédiate de l'élément

$$F = (B_0, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}), \quad B_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Indications Corrigé

Exercice 3.17. Eléments et leurs prolongements -3

Démontrer que les éléments

$$F_1 = (B_1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}), \quad B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

et

$$F_2 = (B_2, \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{-1}{n})(z-2)^n), \quad B_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 1\}$$

sont les prolongements analytiques l'un de l'autre malgré qu'ils n'ont pas du domaine de convergence commun.

Indications Corrigé

Exercice 3.18. Théorème de Pringsheim

Démontrer que si le rayon de convergence d'une série $\sum_0^\infty a_n z^n$ égale à 1 et $a_n \geq 0$ alors la somme de cette série n'est pas prolongeable vers le point $z = 1$

Indications Corrigé

Exercice 3.19. Prolongement analytique et composantes connexes

Soient $F_1 = (B_1, f_1)$, $F_2 = (B_2, f_2)$ deux éléments tels que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ et qu'ils sont les prolongements analytiques l'un de l'autre. Donner un exemple d'un pair F_1, F_2 tel que si $B_1 \cap B_2$ n'est pas connexe, les valeurs des fonctions f_1 et f_2 peuvent être différentes sur les composantes connexes de $B_1 \cap B_2$ (sauf celle du prolongement).

Indications Corrigé

Exercice 3.20. Principe de continuité

Donner un exemple des deux fonctions f_1 et f_2 qui sont analytiques dans les domaines D_1 et D_2 respectivement et $D_1 \cap D_2 = D = \Delta_1 \cup \Delta_2$ et $f_1(z) = f_2(z)$ si $z \in \Delta_1$, mais $f_1(z) \neq f_2(z)$ si $z \in \Delta_2$.

Indications Corrigé

Exercice 3.21. Principe de symétrie

Soit $f(z)$ analytique dans \mathbb{C} et

$$\Im f(z)|_{y=0} = \Re f(z)|_{x=0} = 0.$$

Montrer que f est une fonction impaire ($f(-z) = -f(z)$).

Indications Corrigé

Exercice 3.22. Contre-exemple au théorème 3.4 (dit "Théorème de monodromie")

Montrer (par un exemple) que si un élément F n'est pas prolongeable le long au moins d'un chemin de l'homotopie φ entre la courbe γ_1 et la courbe γ_2 , alors les prolongements de F le long γ_1 et le long γ_2 peuvent être différentes

Indications Corrigé

3.12 Indications

Indications pour Exercice 3.15

Etudier la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

Indications pour Exercice 3.16

Etudier la fonction $f(z) = \log(1+z)$ et l'arrangement des domaines.

Indications pour Exercice 3.17

Regarder des deux chemins arbitraires γ_1 et γ_2 de la source $z = 0$ et de la "cible" $z = 2$ dans le demi-plan $\Im z > 0$. Les éléments F_1 et F_2 sont prolongements analytiques l'un de l'autre le long les chemins. Quelle fonction est définie par les prolongements ?

Indications pour Exercice 3.18

Par absurde. Soit $h \in (0, 1)$ un tel nombre que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(h)}{n!} (z-h)^n$$

est convergente dans le disque $B_r(h) = \{z \in \mathbb{C} : |z-h| < r\}$ et $h+r > 1$.

Observer que

$$|f^{(n)}(h \exp(i\theta))| = f^{(n)}(h).$$

Indications pour Exercice 3.19

Passer à la forme exponentielle : $z = r \exp(i\phi)$. Regarder les fonctions $f_1(r, \phi) = \sqrt{r} \exp(i\phi/2)$, $-\pi < \phi < \pi$ et $f_2(r, \phi) = \sqrt{r} \exp(i\phi/2)$, $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$. Prendre comme $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = r \exp(i\phi), -\pi < \phi < \pi, r > 0\}$ et comme $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = r \exp(i\phi), \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}, r > 0\}$. Démontrer que f_1 et f_2 sont analytiques dans D_1 et D_2 respectivement.

Indications pour Exercice 3.20

Regarder les fonctions $f_1(z) = \log|z| + i \operatorname{arg} z$, $-\pi < \operatorname{arg} z < \frac{\pi}{2}$ et $f_2(z) = \log|z| + i \operatorname{arg} z$, $0 < \operatorname{arg} z < \frac{3\pi}{2}$. Prendre comme $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0, \Im z \geq 0\}$ et comme $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \leq 0, \Im z \leq 0\}$.

Indications pour Exercice 3.21

En utilisant le principe de symétrie, observer que $f(z) = \bar{f}(\bar{z})$. Regarder la fonction $z \mapsto F(z) = i f(z)$.

Indications pour Exercices 3.22

Regarder l'élément $F_0 = (B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, f_0 = \sqrt[n]{r} \exp(i\frac{\phi}{n}, \frac{-\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2})$. Il admet un prolongement le long $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = \exp(-i\pi t), t \in [0, 1]\}$ par une famille $F_t^1 = (B_{r(t)}^1, f_t^1)$ telle que

$$B_{r(t)}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \exp(-\pi t)| < 1\}, f_t^1 = \sqrt[n]{r} \exp(i\frac{\phi}{n}, \frac{-\pi}{2} - \pi t < \phi < \frac{\pi}{2} - \pi t)$$

ainsi qu'un prolongement le long $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = \exp(i\pi t), t \in [0, 1]\}$ par la famille $F_t = (B_{r(t)}, f_t)$ telle que

$$B_{r(t)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - \exp(\pi t)| < 1\}, f_t = \sqrt[n]{r} \exp(i\frac{\phi}{n}, \frac{-\pi}{2} + \pi t < \phi < \frac{\pi}{2} + \pi t).$$

Vérifier que $F_0 = F_0^1$, mais $F_1 \neq F_1^1$, malgré qu'ils ont les même rayon de convergence. Montrer que le prolongement analytique de F_0 le long un chemin passant par l'origine $z = 0$ est impossible. Etudier le comportement de la dérivée $f_t'(z)$ lorsque $z \rightarrow 0$

3.13 Corrigé

Corrigé de l'Exercice 3.15

Soit $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Alors

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

si $z \in B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

De l'autre côté, la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$ admet le développement comme une série convergente en voisinage du point $z = i$:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n.$$

Donc, les éléments F_1 et F_2 représentent la même fonction $z \rightarrow \frac{1}{1-z}$ dans les disques $B_1(0)$ et $B_{\sqrt{2}}(z-i)$ d'où le résultat.

Corrigé de l'Exercice 3.16

Comme dans l'énoncé 3.15, on peut vérifier directement que la fonction $z \rightarrow \log(1+z)$ est représenté par les éléments F et F_0 . Le disque $B_1(0) = \{|z| < 1\} \subset B_2(1) = \{|z-1| < 2\}$ ce que donne des garanties que F est un prolongement analytique immédiate de l'élément F_0 .

Corrigé de l'Exercice 3.17

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ est égale 1. Cette série représente dans le disque $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ la fonction $f(z) = -\log(1-z)$ (La série se converge absolument et normalement dans ce disque et la série des dérivées $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$ converge vers la fonction $f'(z) = \frac{1}{1-z}$ dans le même disque.)

De l'autre côté, $f(z) = -\log(1-z) = -\log(1+(z-2)) + i\pi$.

Corrigé de l'Exercice 3.18

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Par absurde, on suppose qu'il existe un tel nombre $h \in (0, 1)$ que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(h)}{n!} (z-h)^n$$

est convergente dans le disque $B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - h| < r\}$ et que $h + r > 1$. On a

$$|f^{(k)}(h \exp(i\theta))| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{k!} a_n h^{n-k} \exp(i(n-k)\theta) \right| = f^{(k)}(h)$$

et puis la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(h \exp(i\theta))}{n!} (z - h \exp(i\theta))^n$$

converge pour tout θ dans un disque $B'_r(h \exp(i\theta)) = \{z \in \mathbb{C} : |z - h \exp(i\theta)| < r\}$. Alors, la fonction f est analytique dans le disque $B_{h+r}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r + h\}$ du rayon $h + r > 1$ ce que est une contardiction (le rayon de convergence est égale à 1).

Corrigé de l'Exercice 3.19

Soit $z = r \exp(i\phi)$. Considérons les fonctions $f_1(r, \phi) = \sqrt{r} \exp(i\phi/2)$, $-\pi < \phi < \pi$ et $f_2(r, \phi) = \sqrt{r} \exp(i\phi/2)$, $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$. Nous prenons comme les domaines $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = r \exp(i\phi), -\pi < \phi < \pi, r > 0\}$ et $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = r \exp(i\phi), \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}, r > 0\}$.

L'élément $F_1 = (D_1, f_1)$ définit une fonction f_1 dans le plan complexe z coupant le long le demi-axe réel $\Re z < 0$. Cette fonction est analytique puisque $w^2 = f_1^2(z) = r \exp(i\phi) = z$ tel que $f_1(z) = \sqrt{z}$; La dérivation $f_1'(z)$ existe $\forall z \in D_1$ parce que f_1 est une application univaluée de D_1 vers le demi-plan $\Re w > 0$. Cette dérivation on peut calculer comme

$$f_1'(z) = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{2w} = \frac{1}{2f_1(z)}.$$

Donc, $f_1(z)$ est analytique dans le domaine D_1 . De même façon on obtient que f_2 est analytique dans D_2 .

L'intersection $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ et contient les deux composantes connexes $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0, \Im z > 0\}$ et $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0, \Im z < 0\}$.

Par définition on a :

$$f_1(z) = f_2(z), z \in \Delta_1, \text{ et } f_1(z) \neq f_2(z), z \in \Delta_2.$$

Les éléments F_1 et F_2 sont les prolongements l'un de l'autre par le quadrant Δ_1 .

Corrigé de l'Exercice 3.20

Regardons les fonctions $f_1(z) = \log|z| + i \arg z$, $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$ et $f_2(z) = \log|z| + i \arg z$, $0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}$. Prenons comme $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0, \Im z \geq 0\}$

et comme $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \leq 0, \Im z \leq 0\}$. Alors les fonctions f_1 et f_2 satisfont les conditions de l'exercice.

Comparer avec l'exemple dans l'exercice 3.19.

Corrigé de l'Exercice 3.21

On remarque que $f(z) = \bar{f}(\bar{z})$ en vue du principe de symétrie, parce que

$$\Im f(z)|_{y=0} = \Re f(z)|_{x=0} = 0.$$

Considérons la fonction $z \mapsto F(z) = if(z)$. Alors

$$\Im F(z)|_{x=0} = \Re f(z)|_{x=0} = 0.$$

En sachant que les points z et \bar{z} sont symétriques par rapport l'axe $\Re z = 0$, on obtient $F(z) = \bar{F}(-\bar{z})$ ou $f(z) = -f(-\bar{z})$ d'où (avec $f(z) = \bar{f}(\bar{z})$) le résultat

Corrigé de l'Exercice 3.22

Regardons la famille des éléments $F_t = (B_{r_t}(\exp(i\pi t)) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \exp(i\pi t)| < 1\}, f_t = \sqrt[n]{r} \exp(i\frac{\phi}{n}, \frac{-\pi}{2} + \pi t < \phi < \frac{\pi}{2} + \pi t)$.

C'est claire (voir aussi 3.19) que $w^n = f_t^n(z) = z$ alors il existe

$$f_t'(z) = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{n(f_t)^{n-1}}$$

et la limite $\lim_{z \rightarrow 0} f_t'(z) = \infty$. On a que la fonction f_t est analytique dans le disque B_{r_t} centré en $\exp(i\pi t)$. Sa série de Laurent en voisinage de $\exp(i\pi t)$ a B_{r_t} comme son disque de convergence et puis, les éléments $F_t = (B_{r_t}, f_t)$, $t \in [0, 1]$ effectuent un prolongement analytique de l'élément F_0 vers l'élément F_1 le long du chemin $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = \exp(i\pi t), t \in [0, 1]\}$ (le demi-cercle dans $\Im z > 0$.)

De l'autre côté l'élément F_0 admet un prolongement le long $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = \exp(-i\pi t), t \in [0, 1]\}$ par une famille $F_t^1 = (B_{r_t^1}, f_t^1)$ telle que

$$B_{r_t^1} = \{z \in \mathbb{C} : |z - \exp(-i\pi t)| < 1\}, f_t^1 = \sqrt[n]{r} \exp(i\frac{\phi}{n}, \frac{-\pi}{2} - \pi t < \phi < \frac{\pi}{2} - \pi t)$$

On obtient $F_0 = F_0^1$, mais $F_1 \neq F_1^1$, malgré qu'ils ont les mêmes disques de convergence. En fait, soit $t = 1$, $z = -1 = \exp(i\pi)$ alors $f_1(-1) = \exp(i\pi/n)$ mais $f_1^1(-1) = \exp(-i\pi/n)$.

On voit qu'une homotopie entre γ et γ_1 est possible seulement dans un domaine qui contient le point $z = 0$. Mais un prolongation analytique de l'élément F_0 le long un chemin passant par $z = 0$ est impossible la dérivée $f_t'(z) \rightarrow \infty$ lorsque $z \rightarrow 0$.

Exercices du Chapitre ‘Zéros des fonctions holomorphes’

Exercice 4.23. Théorème de Mittag-Leffler-1

Trouver, en utilisant le théorème de Weierstrass-Mittag-Leffler, une expression générale d'une fonction méromorphe f , ayant des pôles d'ordre 2 dans les points $b_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, telles que leurs parties principales dans ces points sont

$$g_n(z) = \frac{1}{(z - \pi n)^2}.$$

[Indications](#) [Corrigé](#)

Exercice 4.24. Théorème de Mittag-Leffler-2

Soit $f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$. En utilisant 4.23, montrer que la série de Laurent de f à l'origine $z = 0$ ne contient que la partie principale.

[Indications](#) [Corrigé](#)

Exercice 4.25. Théorème de Mittag-Leffler-3

Trouver une expression générale, en utilisant le théorème de Mittag-Leffler, d'une fonction f ayant des pôles d'ordre 1 dans les points $b_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ avec des résidus $\text{Res}_{z=b_n} f(z) = n$.

[Indications](#) [Corrigé](#)

Exercice 4.26. Produit infini - 1

Montrer que a)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) = 2;$$

b)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

[Indications](#) [Corrigé](#)

Exercice 4.27. Produit infini - 2

Étudier les produits infinis suivants a)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right);$$

b)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left|1 + \frac{i}{n}\right|.$$

[Indications](#) [Corrigé](#)

Exercice 4.28. a) Montrer que l'application

$$f: \bar{\mathbb{C}} \mapsto \bar{\mathbb{C}}, f(z) = w = \frac{dz - b}{a - cz}$$

transforme le cercle $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ dans une droite si et seulement si $|a| = |c| > 0$;

b) Trouver une fonction $w = f(z)$ telle qu'elle effectue une application du disque $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sur le disque $B_1(i) = \{w \in \mathbb{C} : |w - i| < 1\}$ et qu'elle transforme les points $z = 0$ et $z = 1$ aux points $w = i/2$ et $w = 0$ respectivement.

[Indications](#) [Corrigé](#)

Exercice 4.29. Produit infini et le produit de type de Blaschke

Soit $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des nombres complexes telle que

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < |z_n| < 1$ et $|z_n| < |z_{n+1}|$; b) la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)$$

est convergente.

Montrer que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - z}{1 - z z_n} \bar{z}_n$$

converge dans le disque $B_1(0)$ et définit une fonction analytique f qui s'annule seulement dans les points z_1, z_2, \dots et satisfait à l'inégalité $|f(z)| < 1$.

[Indications](#) [Corrigé](#)

Exercice 4.30.

[Indications](#) [Corrigé](#)

4.14 Indications

Indications pour Exercice 4.23

Montrer que la série de la partie principale

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$$

converge uniformément sur tout compact Appliquer le corollaire du théorème de Mittag-Leffler

Indications pour Exercice 4.24

Observer que la fonction

$$z \mapsto h(z) = \frac{1}{\sin^2 z} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$$

est périodique de période π . Montrer que elle est bornée dans la bande $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z \leq \pi\}$ et, par conséquent, dans \mathbb{C} . Utiliser le théorème de Liouville.

Indications pour Exercice 4.25

Observer que la partie principale de f

$$g_n(z) = \frac{n}{z - n} = -(1 + \frac{z}{n}) - \frac{z^2}{n(n - z)}.$$

Montrer que

$$\left| \frac{z^2}{n(n - z)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}(n - \sqrt[4]{n})}.$$

Appliquer le corollaire du théorème de Mittag-Leffler.

Indications pour Exercice 4.26

1. Vérifier l'égalité :

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

2. Montrer que

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)}.$$

Indications pour Exercice 4.27

1. Etudier la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{i}{n}\right).$$

Considérer les parties réelles et imaginaires.

2. Etudier la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left|1 + \frac{i}{n}\right|.$$

Indications pour Exercice 4.28

a) Etudier le pre-image du point $w = \infty$. Pourquoi il appartient au cercle $|z| = 1$?

b) Utiliser la formule de l'exercice 3.15 pour les points symétriques $w = i/2$ et w^* . Utiliser la formule de l'application homographique de trois points donnés.

Indications pour Exercice 4.29

Montrer que

$$|u_n(z)| < 2 = \frac{2(1 - |z_n|)}{1 - |z_n|}.$$

Utiliser le fait que $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1$.

4.15 Corrigé

Corrigé de l'Exercice 4.23

La série des parties principales

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$$

converge de façon uniforme sur tout compact parce qu'il existe une série majorée

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r - n\pi)^2}$$

pour tout disque $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Alors le corollaire du théorème de Mittag-Leffler (??) est applicable :

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{+\infty} (g_n(z) - P_n(z))$$

avec $P_n(z) = 0$ d'où

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}.$$

Corrigé de l'Exercice 4.24

On utilise l'exercice 4.23. La fonction

$$z \mapsto h(z) = \frac{1}{\sin^2 z} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$$

est périodique de période π . Elle est bornée dans la bande $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z \leq \pi\}$ parce que

$$|z - n\pi| \geq n\pi - |z| \geq \pi(n - 1).$$

Alors,

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2} \right| \leq \frac{1}{|z|^2} + \sum_{n=-m}^m \frac{1}{|z - n\pi|^2} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2 \pi^2}$$

tends vers 0 lorsque $z \rightarrow \infty$.

On utilise que pour $z = x + iy$

$$|\sin^2 z| = \sin^2 x + \sinh^2 y \rightarrow \infty, \text{ lorsque } z \rightarrow \infty, 0 < \Re z \leq \pi$$

et donc la fonction $h(z)$ est bornée dans G et puis, par périodicité, elle est bornée dans \mathbb{C} . Le théorème de Liouville implique que $h(z) \equiv 0$, d'où

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}.$$

Corrigé de l'Exercice 4.25

Regradons la partie principale de f :

$$g_n(z) = \frac{n}{z - n} = -(1 + \frac{z}{n} + (\frac{z}{n})^2 + \dots), |z| < n.$$

On obtient directement que

$$g_n(z) + 1 + \frac{z}{n} = -(\frac{z}{n})^2 + (\frac{z}{n})^3 + \dots = -\frac{z^2}{n(n-z)} = \frac{z^2}{n(z-n)}.$$

On voit que

$$\left| \frac{z^2}{n(n-z)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n(n-\sqrt[4]{n})}}, \forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt[4]{n}\}.$$

Alors la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{n(z-n)}$$

est uniformément convergente sur tout compact $K \subset \mathbb{C}$ comme une série de fonctions méromorphes. (C'est-à-dire, on n'a que le nombre fini des termes avec des pôles en K et, après élimination de ces termes, la série est uniformément convergente sur K).

Maintenant on peut appliquer le corollaire du théorème de Mittag-Leffler (??) :

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{n(z-n)}.$$

Corrigé de l'Exercice 4.26

1. On a directement l'égalité suivante :

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \frac{((n+1)!)^2}{n!(n+2)!} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

Alors

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 2.$$

2. Le calcul direct montre que

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \prod_{k=1}^n \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)} = \frac{2(n-1)!}{(n+1)!} \prod_{k=1}^n \frac{k^2 + k + 1}{(k-1)^2 + (k-1) + 1} = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)}.$$

D'où

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{2}{3}.$$

Corrigé de l'Exercice 4.27

1. Etudions la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{i}{n}\right)$$

qui converge (ou diverge toujours ensemble avec le produit $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)$) Considérons les parties réelles et imaginaires :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + i \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n}.$$

La série

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

est convergente (elle converge ensemble avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) mais la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n}$$

est divergente (ensemble avec la série 2. Etudier la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$). Donc la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{i}{n}\right)$$

(ainsi que le produit $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)$) est divergente.

2. Etudions la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left|1 + \frac{i}{n}\right|.$$

C'est une série convergente car

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left|1 + \frac{i}{n}\right| = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Alors, après 1., le produit $\prod_{n=1}^{\infty} \left|1 + \frac{i}{n}\right|$ est convergente.

Corrigé de l'Exercice 4.28

a) Supposons que l'image du cercle $\gamma = \{|z| = 1\}$ par l'application

$$z \rightarrow w = \frac{dz - b}{a - cz}$$

est une droite. Alors, si $w = \infty$, on a $z = \frac{a}{c}$ et donc $\left|\frac{a}{c}\right| = 1$. Inversement, soit $|a| = |c| > 0$. L'application

$$w \rightarrow z = \frac{aw + b}{cw + d}$$

transforme le point $\infty \rightarrow \frac{a}{c}$ qui appartient au cercle $\gamma = \{|z| = 1\}$. Mais si un point du cercle unité se transforme au point infini le pré-image du cercle est une droite.

b)

Utilisons la formule de l'exercice 3.15 pour les points symétriques $w = i/2$ et w^* :

$$w^* = i + \frac{1}{i/2 - i} = -i,$$

alors l'application homographique de trois points connues :

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

pour les triples $(w(0) = i/2, w(1) = 0, w(\infty) = -i)$ est

$$w = \frac{i - iz}{z + 2}.$$

Corrigé de l'Exercice ??

Soit la fonction

$$z \rightarrow \prod_{n=k}^{\infty} \frac{z_n - z}{1 - z\bar{z}_n} \bar{z}_n.$$

Considérons cette fonction dans le disque

$$B_{r=|z_k|}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_k|\}.$$

Les facteurs dans ce produit s'annulent pas et

$$|u_n(z)| := \left| \frac{(z_n - z)\bar{z}_n}{1 - z\bar{z}_n} - 1 \right| = \frac{1 - |z_n|^2}{|1 - z\bar{z}_n|} < \frac{2(1 - |z_n|)}{1 - |z_n|}.$$

Quand la série $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)$ est convergente le produit infini

$$\prod_{n=k}^{\infty} \frac{z_n - z}{1 - z\bar{z}_n} \bar{z}_n$$

converge dans le disque $B_{|z_k|}(0)$ vers une fonction analytique dans $B_{|z_k|}(0)$ que s'annule pas dans ce disque.

De l'autre côté, le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - z}{1 - z\bar{z}_n} \bar{z}_n$$

est une fonction P , qui est analytique dans $B_{|z_k|}(0)$ et s'annule seulement dans z_1, \dots, z_{k-1} .

La limite $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1$ car la série $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)$ est convergente. Alors la fonction P est analytique dans $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ qui s'annule seulement en points z_1, z_2, \dots . On a, de plus,

$$\left| \frac{(z_n - z)\bar{z}_n}{1 - z\bar{z}_n} \right| < |\bar{z}_n| < 1.$$

Donc,

$$|P(z)| < 1, \forall z \in B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Exercices du Chapitre "Méthode du col"

Exercice 5.31. Intégration par parties

Calculer les premiers termes du développement asymptotique, lorsque $t \rightarrow +\infty$, des intégrales suivantes :

$$I_1(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x} dx; \quad I_2(t) = \int_0^1 \frac{e^{itx}}{1+x} dx,$$

en faisant des intégration par parties.

Indications **Corrigé**

Exercice 5.32. Méthode du col réel

Nous supposons que les intégrales à paramètre dans cette exercice sont absolument convergentes.

Soient a, b, c, α, β des réels tels que $0 < b \leq +\infty$, $c > 0$, $\alpha > -1$, $\beta > 0$.

1. Montrer que, lorsque $t \rightarrow +\infty$

$$I(t) = \int_0^b x^\alpha e^{t(a-cx^\beta)} dx \cong \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\beta}\right) e^{at} (ct)^{-\frac{1+\alpha}{\beta}};$$

2. Montrer que, si

$$J(t) = \int_0^{+\infty} f(x) \exp(tg(x)) dx,$$

où g prend son maximum (supposé fini) en $x = 0$ et les fonctions f et g ont les développements asymptotiques au voisinage de l'origine

$$f(x) \sim Ax^\alpha, \quad g(x) \sim a - cx^\beta + o(x^\beta)$$

où $A \neq 0$,

on a $J(t) \sim I(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et

$$J(t) \sim \int_0^{+\infty} Ax^\alpha e^{t(a-cx^\beta+o(x^\beta))} dx \cong \frac{A}{\beta} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\beta}\right) e^{at} (ct)^{-\frac{1+\alpha}{\beta}};$$

où $A \neq 0$;

3. Calculer le développement asymptotique lorsque $t \rightarrow +\infty$ de l'intégrale

$$I(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-t \sin^2 x} dx$$

Indications **Corrigé**

Exercice 5.33. Cas d'une phase complexe

1. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{\pm ix} dx = \Gamma(t) e^{\pm \frac{1}{2} i \pi t};$$

2. Soient a, b, c, α, β des réels tels que $0 < b \leq +\infty, c \neq 0, 0 < \alpha + 1 < \beta$.
Soit

$$I(t) = \int_0^b x^\alpha e^{it(a+cx^\beta)} dx.$$

2.1 Si $c > 0$ montrer le développement asymptotique lorsque $t \rightarrow +\infty$:

$$I(t) \cong \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{\frac{i\pi}{2} \frac{\alpha+1}{\beta}} \frac{e^{i\alpha t}}{\beta(ct)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}};$$

2.2 Si $c < 0$ montrer le développement asymptotique lorsque $t \rightarrow +\infty$:

$$I(t) \cong \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{\frac{-i\pi}{2} \frac{\alpha+1}{\beta}} \frac{e^{i\alpha t}}{\beta(-ct)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}};$$

3. Donner un développement asymptotique, lorsque $t \rightarrow +\infty$:

$$a) J_1(t) = \int_0^{\pi/2} e^{it \cos x} dx,$$

$$b) J_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx^2 - x) dx.$$

Indications **Corrigé**

Exercice 5.34. Méthode du col complexe. Applications

Soit γ un chemin fermé autour de l'origine $z = 0$. Calculer l'intégrale

$$I_n = \oint_{\gamma} \frac{e^{(n+1)z}}{z^{n+1}} dz$$

et retrouver à nouveau la formule de Stirling.

Indications **Corrigé**

Exercice 5.35. Fonction d'Airy

Nous chercherons le développement asymptotique, lorsque $t \rightarrow +\infty$, de la fonction d'Airy définie comme l'intégrale

$$Ai(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{3} w^3 + tw\right) dw.$$

1. Par un changement de variable, mettre cette fonction sous la forme

$$Ai(t) = \frac{\sqrt{t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it \frac{2}{3} (\frac{1}{3} z^3 + z)} dz.$$

2. On indiquera quels sont les points cols et les lignes de plus grande pente associées ;

3. En déduire l'équivalent lorsque $t \rightarrow +\infty$

$$Ai(t) \cong \frac{\sqrt{\pi}}{2t^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}}$$

Indications **Corrigé**

Exercice 5.36. Fonction de Bessel révisée

Nous chercherons le développement asymptotique, lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, de la fonction de Bessel définie comme l'intégrale complexe :

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Indications **Corrigé**

5.16 Indications

Indications pour Exercice 5.31

1. Pour $I_1(t)$: prendre $u = \frac{1}{1+x}$ et $dv = e^{-tx} dx$. Pour $I_2(t)$: prendre $u = \frac{1}{1+x}$ et $dv = e^{ixt} dx$.
2. Soit $I_1(t) =$ “1er terme” plus “reste”. Vérifier que le rest est $o(\frac{1}{t})$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.
3. Faire un raisonnement pour l'ordre du reste de $I_2(t)$.

Indications pour Exercice 5.32

1. Mettre e^{at} devant l'intégrale et faire un changement de variable $z = ct x^\beta$. Utiliser la définition de la fonction Gamma (43). Remarquer que le résultat reste le même que b soit fini ou infini.
2. On peut utiliser le méthode du col réel (??) et montrer que les contributions essentielles au développement asymptotique de $J(t)$, lorsque $t \rightarrow +\infty$, sont dues au voisinage de $x = 0$, ce qui revient à remplacer $J(t)$ par l'intégrale précédente.
3. Utiliser la formule (??) avec $[a, b] = [-\pi/2, \pi/2]$, $g = 1$, $f = -\sin^2 x$.

Indications pour Exercice 5.33

1. Montrer que si $\Re t > 0$ et $\Re \alpha > 0$ on a

$$\int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{\alpha x} dx = \frac{\Gamma(t)}{\alpha^t}$$

en considérant d'abord la somme de deux intégrales réelles

$$\int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{\alpha x} dx = \int_0^1 x^{t-1} e^{\alpha x} dx + \int_1^{+\infty} x^{t-1} e^{\alpha x} dx$$

et puis le prolongement sur le plan complexe comme une fonction meromorphe de t .

2. Appliquer les raisonnements de l'exercice 5.32 et puis le résultat de 5.33 .1
3. Appliquer les raisonnements de l'exercice 5.32 et puis le résultat de 5.33 .1
4. Appliquer la formule ?? pour l'intégrale

$$\int_{b_1}^{b_2} g(x) \exp(itf(x)) dx$$

avec

- a) avec $b_{2,1} = \pm \frac{\pi}{2}$ et $f(x) = \cos x$;
- b) Utiliser la forme exponentielle de \cos (la formule d'Euler) et puis la formule (??).

Indications pour Exercice 5.34

Calculer l'intégrale I_n par le théorème de Cauchy des residus et puis utiliser la formule (??) pour la fonction $f \equiv 1$ et $g = z - \log z$, avec $t = n + 1 \rightarrow \infty$.

Indications pour Exercice 5.35

Utiliser la formule d'Euler (la forme exponentielle de \cos), puis, la parité de \cos et le changement des variables $s = \sqrt{t}z$.
Soit $z = x + iy$. Les point cols sont $z = \pm i$ et les lignes de plus grande pente sont l'axe imaginaire $x = 0$ et l'hyperbole $\frac{1}{3}(x^2 - 3y^2) + x = 0$.
En suite, la formule (??) est directement applicable.

Indications pour Exercice 5.36

Appliquer la formule (??) pour la fonction $f(z) = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})$. Considérer deux points critiques $z = \pm i$ et la ligne de niveaux critique $\Re f = 0$. Les directions de plus grande pente sont $\theta = -\frac{\pi}{4}$ (en $z = i$) et $\theta = \frac{\pi}{4}$ (en $z = -i$).

5.17 Corrigé

Corrigé de l'Exercice 5.31

1. Soit la fonction

$$I_1(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-tx)}{1+x} dx,$$

et $t \rightarrow +\infty$, $t \in \mathbb{R}$.

On peut l'intégrer par partie, en prenant, $u = \frac{1}{1+x}$ et $dv = e^{-tx} dx$.

On a :

$$\begin{aligned} I_1(t) &= -\frac{1}{t(1+x)} \exp(-tx) \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-tx)}{(1+x)^2} dx = \\ &= \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-tx)}{(1+x)^2} dx. \end{aligned}$$

En repétant cette intégration n fois, on obtient la série suivante :

$$I_1(t) = I_n(t) + \frac{1}{t^n} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-tx)}{(1+x)^{n+1}} dx$$

et

$$I_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k k!}{t^{n+1}}.$$

Une autre façon d'avoir le développement de cette intégrale est suivante : on fait le changement des variables : $y = tx$:

$$I_1(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-tx)}{1+x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-y)}{t+y} dy = \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-(y-t))}{y} dy = E(t).$$

Cette fonction est une cousine de la fonction connue comme la fonction exponentielle intégrale :

$$Ei(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\exp(y)}{y} dy :$$

en fait, $E(t) = -\exp(t)Ei(-t)$.

La fonction $Ei(-t)$ est bien définie quel que soit $t < 0$. En revanche, si on prend $t \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale devient impropre, puisque l'intervalle d'intégration inclut le point $t = 0$, où l'intégrand diverge. Par contre, si $t \in \mathbb{C}$ l'intégrale est toujours bien définie, à condition de déformer le chemin d'intégration de façon à éviter l'origine $y = 0$ (cette déformation est un procédé standard pour effectuer un prolongement analytique - voir Chapitre 3).

Quand t se rapproche de l'origine on peut passer au-dessus de celle-ci et allonger le chemin en le faisant passer juste au-dessus de l'axe réel, ou passer au-dessous

en complétant le chemin juste au-dessous de \mathbb{R}_+ . Ceci donne deux chemins complexes conjugués l'un de l'autre.

Il en résulte que, pour $\Re z > 0$ la fonction $Ei(z)$ a une partie imaginaire finie, même si z est infiniment proche du demi-axe réel positif. Sur les deux chemins conjugués ci-dessus, l'intégrand est réel. Ainsi, pour $t > 0$

$$Ei(t + i0) = \overline{Ei(t - i0)}, \text{ et } Ei(t \pm i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Ei(t \pm \varepsilon).$$

Une intégration par partie permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-(y-t))}{y} dy &= \exp(t) \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-y)}{y} dy = \\ \exp(t) \left[\frac{-\exp(-y)}{y} \Big|_t^{+\infty} - \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-y)}{y^2} dy \right] &= \\ \frac{1}{t} - \exp(t) \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-y)}{y^2} dy. \end{aligned}$$

En continuant les intégrations par parties successives, on trouve :

$$E(t) = \frac{1}{t} - \frac{1!}{t^2} + \frac{2!}{t^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{t^n} + (-1)^n n! \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-(y-t))}{y^{n+1}} dy.$$

Pour le reste de ce développement, on a la majoration en notant que

$$\exp(-(y-t)) \leq 1, \frac{1}{y^{n+1}} \leq \frac{1}{t^{n+1}}$$

quand $t \leq y$:

$$n! \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-(y-t))}{y^{n+1}} dy = \frac{n!}{t^{n+1}} - (n+1)! \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-(y-t))}{y^{n+2}} dy < \frac{n!}{t^{n+1}}.$$

Donc, alors, on peut écrire

$$E(t) \sim \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{t^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{n+1}}\right), t \gg 1.$$

Attention !!! Il ne faudrait pas d'essayer à écrire le reste sous la forme de la série :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{t^n}$$

qui est certainement divergente !

2. Lorsque la fonction $\frac{1}{1+x}$ est infiniment dérivable sur l'intervalle de l'intégration $[0, 1]$ on obtient par l'intégration par parties n fois que

$$\int_0^1 \frac{\exp(itx)}{1+x} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k i^k}{t^{k+1}} \left[\frac{\exp(it)}{2^{k+1}} - 1 \right] + o\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

quand $t \rightarrow +\infty$.

Corrigé de l'Exercice 5.32

1. On va mettre e^{at} devant l'intégrale et puis on va faire un changement de variable $z = ct x^\beta$. On obtient par le calcul direct :

$$I(t) = \frac{\exp(at)}{\beta} \int_0^{cb^\beta t} \left(\frac{z}{ct}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \exp(-z) \left(\frac{z}{ct}\right)^{\frac{1}{\beta}-1} \frac{dz}{ct} =$$

$$\frac{\exp(at)}{\beta} (ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^{cb^\beta t} z^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} \exp(-z) dz$$

On va utiliser la formule intégrale pour la fonction Gamma (43) : lorsque $t \rightarrow \infty$ et $c\beta > 0$

$$I(t) \sim \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \exp(at) (ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}.$$

Remarquons que le résultat reste le même que b soit fini ou infini (sous les conditions sur c et β).

2.

3. On applique la formule (??) avec $[a, b] = [-\pi/2, \pi/2]$, $g = 1$, $f = -\sin^2 x$:

$$f'(x) = -2 \sin x \cos x = 0, \quad x = \pm \frac{\pi}{2}, 0$$

sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Mais

$$f''(x) = -2 \cos 2x > 0, \quad x = \pm \frac{\pi}{2}, \text{ et } f''(0) = -2.$$

Donc, la formule (??) montre le terme principal de l'intégrale

$$I(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{t}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Corrigé de l'Exercice 5.33

1. Nous supposons d'abord que $a \in \mathbb{R}_+$ et l'intégrale

$$F(z, a) = \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-ax) dx = \frac{1}{z^a} \int_0^\infty y^{z-1} \exp(-y) dy = \frac{\Gamma(z)}{z^a}$$

par le changement $y = ax$. Maintenant, rappelons, que la fonction $F(z, a)$ admet une décomposition

$$F(z, a) = P(z, a) + Q(z, a) = \int_0^1 x^{z-1} \exp(-ax) dx + \int_1^\infty x^{z-1} \exp(-ax) dx$$

telle que la fonction $Q(z, a)$ est une fonction entière en z pour tout $a : \Re a > 0$ et

$$P(z, a) = \int_0^1 x^{z-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n a^n}{n!} x^n dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n a^n}{n!} \int_0^1 x^{z+n-1} dx =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n a^n}{n!(z+n)}$$

admet un prolongement comme une fonction méromorphe en z avec des pôles simples en $z_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$ et des résidus $r_n = \frac{(-a)^n}{n!}$.

En tournant le chemin d'intégration dans la formule intégrale de la fonction Γ en $\pm \frac{\pi}{2}$, on obtient pour $0 < \Re z < 1$:

$$\int_0^\infty y^{z-1} \exp(\pm iy) dy = \frac{\Gamma(z)}{\exp(\pm \frac{i\pi z}{2})}.$$

2. On va mettre e^{iat} devant l'intégrale et puis on va faire un changement de variable $z = ct x^\beta$. On obtient par le calcul direct :

$$I(t) = \frac{\exp(iat)}{\beta} \int_0^{cb^\beta t} \left(\frac{z}{ct}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \exp(iz) \left(\frac{z}{ct}\right)^{\frac{1}{\beta}-1} \frac{dz}{ct} =$$

$$\frac{\exp(iat)}{\beta} (ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^{cb^\beta t} z^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} \exp(iz) dz$$

On va utiliser la formule intégrale pour la fonction Gamma et le résultat de l'exercice précédent : lorsque $t \rightarrow +\infty$ et $c > 0$

$$I(t) \sim \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \exp\left(\frac{i\pi}{2} \frac{\alpha+1}{\beta}\right) \frac{\exp(iat)}{\beta (ct)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}.$$

Remarquons que le résultat reste le même que b soit fini ou infini (sous les conditions sur c et β).

3. Mêmes raisons appliquent en cas $c < 0$.

4. Nous utilisons la formule ?? pour l'intégrale

$$\int_{b_1}^{b_2} g(x) \exp(itf(x)) dx$$

avec $g \equiv 1$ et avec $b_{2,1} = \pm \frac{\pi}{2}$ et $f(x) = \cos x$.

On écrit l'intégrale comme

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp(it \cos x) dx.$$

La dérivée $f'(x) = -\sin x$ s'annule dans un seul point $x_0 = 0$ et $-\frac{\pi}{2} < x_0 = 0 < \frac{\pi}{2}$, et puis, $f''(x_0) = -1 < 0$.

Alors

$$J_1(t) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp(it \cos x) dx \sim \sqrt{\left(\frac{2\pi}{t}\right)} \exp\left(i\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

quand $t \rightarrow +\infty$.

b) Utilisons la forme exponentielle de \cos (la formule d'Euler) et puis la formule (??) pour $g_1(x) = e^{-ix}$, $f_1(x) = x^2$ et pour $g_2(x) = e^{ix}$, $f_2(x) = -x^2$.

On a :

$$J_2(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp i(tx^2 - x) + \exp -i(tx^2 - x)] dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \exp(itx^2) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \exp(-itx^2) dx.$$

On obtient directement :

$$J_2(t) \sim \frac{1}{2} (\sqrt{\exp i\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{\exp i\left(t - \frac{\pi}{4}\right)}) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} \exp(it).$$

Corrigé de l'Exercice 5.34

1. On va calculer l'intégrale I_n par le théorème de Cauchy des résidus :

$$I_n = \oint_{\gamma} \frac{e^{(n+1)z}}{z^{n+1}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{(n+1)z}}{z^{n+1}} =$$

$$2\pi i \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^n}{dz^n} [e^{(n+1)z}] = 2\pi i \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. De l'autre côté, on peut utiliser la formule (??) pour la fonction $f \equiv 1$ et $g = z - \log z$, avec $t = n+1 \rightarrow \infty$:

$$I_n = \oint_{\gamma} \frac{e^{(n+1)z}}{z^{n+1}} dz = \oint_{\gamma} e^{(n+1)(z - \log z)} dz$$

et nous pouvons appliquer le méthode du col complexe : $f'(z) = 1 - \frac{1}{z}$, $z_0 = 1$, $f''(z) = \frac{1}{z^2}$ et $f''(1) = 1$. On a (après la formule (??)) :

$$I_n \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} i e^{n+1},$$

d'où on conclut que

$$2\pi i \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} i e^{n+1}.$$

Par conséquent, on obtient la formule de Stirling :

$$(n+1)! \sim \frac{\sqrt{2\pi(n+1)}}{e^{n+1}} (n+1)^{n+1}.$$

Corrigé de l'Exercice 5.35

1. Nous pouvons re-écrire la fonction $Ai(t)$ comme

$$Ai(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left(\frac{s^3}{3} + ts\right)} ds$$

et puis, on va faire le changement des variables : $s = \sqrt{t}z$:

$$Ai(t) = \frac{\sqrt{t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^{\frac{3}{2}}\left(\frac{z^3}{3} + z\right)} dz.$$

2. Calculons les points cols : $f(t, z) = i\sqrt{t}\left(\frac{z^3}{3} + z\right)$, $f'(z) = i\sqrt{t}(z^2 + 1)$, $z_{1,2} = \pm i$.

La valeur de la fonction en ces points est $f(t, z_{1,2}) = \mp \sqrt{t} \frac{2}{3}$ et puis $\operatorname{Im} f(t, z_{1,2}) = 0$. $\Im f(z, t) = x(x^2 - 3y^2 + x) = 0$ sont les lignes de plus grande pente associées. Par exemple, la ligne de plus grande pente passant par le point $z = i$ est la branche de l'hyperbole $x^2 - 3y^2 + x = 0$, $y > 0$.

Soit z réel, $z > 0$. Alors nous pouvons oublier le point col $z_2 = -i$ (parce que $\frac{2}{3}\sqrt{t} > 0$ et $\max \Re(f) = 0$ sur les chemin d'intégration).

3. Nous utilisons la formule (??) : $f''(i) = -2\sqrt{t}$ et $\arg(f''(i)) = \pi$ avec $tf(t, i) = it\sqrt{t}\left(\frac{-i}{3} + i\right) = -t\sqrt{t} \frac{2}{3}$ d'où

$$Ai(t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} \sqrt[4]{t}} e^{-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}},$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Corrigé de l'Exercice 5.36

1. On peut appliquer la formule (??) pour la fonction $f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$. Considérons $f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right) = 0$ et, donc, les deux points critiques : $z = \pm i$. et la ligne de niveaux critique $\Re f = 0$. Le niveau \Re prend la même valeur en ces points :

$$\Re f = \frac{1}{2} \left(x - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = 0, \quad z = \pm i$$

donc il faut tenir compte des deux directions.

La ligne de niveau critique $\Re f = 0$ est composée du cercle : $x^2 + y^2 = |z| = 1$ et de l'axe imaginaire $x = 0$. Les directions de plus grande pente sont $\theta = -\frac{\pi}{4}$ (en $z = i$) et $\theta = \frac{\pi}{4}$ (en $z = -i$).

La formule (??) donne

$$J_n(\lambda) \sim \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{e^{\frac{in\pi}{2}}} e^{i\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} - \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{in\pi}{2}}} e^{-i\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$