Université d'Angers – Année Académique 2015–2016

Algèbre Linéaire Élementaire – TD 2 + Théorie

1 Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, familles génératrices et libres, bases, dimension.

1.1 Définition et exemples

Definition 1.1 *Un ensemble E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ si E est muni*
• *d'une opération interne, notée $+$ ayant les propriétés suivantes, pour tous $v, v', v'' \in E$:*
(1) associativité : $v + (v' + v'') = (v + v') + v''$;
(2) commutativité : $v + v' = v' + v$;
(3) élément neutre : il existe $e \in E$ tel que $v + e = e + v = v$ (on le note 0) ;
(4) éléments symétriques : il existe $w \in E$ tel que $v + w = w + v = e$ (notant e par 0, on notera w par $-v$) ;
• *d'une multiplication par les réels ayant les propriétés suivantes, pour tous $v, v' \in E$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$:*
(5) $1 \cdot v = v$;
(6) $a \cdot (v + v') = a \cdot v + a \cdot v'$;
(7) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$;
(8) $a \cdot (b \cdot (v) = (ab) \cdot v$.

Expliquer les cas de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

Exercices :

1. Prouver qu'on peut munir $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$). Prouver qu'on peut munir $\mathbb{C}$ aussi d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver des ensembles qui possèdent une structure d'espace vectoriel et qui ne sont pas $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$ (*Leur montrer les cas des polynômes et des fonctions*).
3. Soit E un espace vectoriel quelconque. Prouver que $0 \cdot v = 0$ et que $(-1) \cdot v = -v$.

1.2 Sous–espaces vectoriels

Definition 1.2 *Un sous-ensemble, non vide, F d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel si*
(i) pour tous $v, v' \in F$, $v + v' \in F$;
(ii) pour tout $v \in F$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot v \in F$.

Expliquer que un sous–espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel et que l'intersection de deux sous–espaces est un sous–espace.

Exercices :

4. Décrire tous les sous–espaces vectoriels de $\mathbb{R}$.
5. Décrire géométriquement les sous–ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$. Quels sont ceux qui forment un sous–espace vectoriel ? Justifier la réponse.
   (a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$,
   (b) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4x = 0\}$,

(c) $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$,
(d) $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 4y^2 = 1\}$,
(e) $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x + 3(y-2) = 0\}$,
(f) $F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 4xy = -4y^2\}$.

Soient a, b, r trois paramètres réelles et $G_{a,b,r} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$. Donner une interprétation géométrique de ce sous–ensemble et donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, r pour que $G_{a,b,r}$ soit un sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

6. Décrire géométriquement les sous–ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$. Quels sont ceux qui forment un sous–espace vectoriel ? Justifier la réponse.
   (a) $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y + z = 0\}$,
   (b) $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 3x - y + 4z = 5\}$,
   (c) $C_r := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ (la réponse dépende de la valeur du paramètre r).
   (d) $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 - 4y^2 = 0\}$.
   (e) $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (2x - 4y - 5z)^2 = 0\}$.
7. Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre et $F_a := \{(x,y,a) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F_a est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a = 0$.
8. Écrire en forme paramétrique et cartésienne les plans de $\mathbb{R}^3$ qui sont des sous–espaces vectoriels. Faire du même pour les droites.
9. Soient F, G deux sous–espace vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous–espace vectoriel de E si et seulement si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$. (pour une des deux implications il faut un raisonnement par l'absurde).

1.3 Familles Génératrices

Definition 1.3 *Étant donné un ensemble de vecteurs $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ d'un espace vectoriel E, on appelle combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{V}$ ou des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ toute expression de la forme $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (éventuellement nuls).*

Faire exemples avec $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

Exercices :

10. Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{V} := \{v_1, \dots, v_n\}$ un ensemble de vecteurs de E. Montrer que l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{V}$ forment un sous–espace vectoriel de E.

Definition 1.4 *Soit E un espace vectoriel. Étant donné $\mathcal{V} := \{v_1, \dots, v_n\}$ un ensemble de vecteurs de E on dénotera* $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ *le sous–espace des combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{V}$. Si* $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) = F$*, on dira que $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ est une famille génératrice ou un système de générateurs de F.*

Definition 1.5 *Soient V, W deux sev d'un ev E. Alors $V + W$ est le sous-espace engendré par V et W.*

Faire quelques exemples.

Exercices :

11. Trouver une famille génératrice pour $\mathbb{C}$.
12. Soit F le sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation $x + y + z = 0$. Donner une famille génératrice pour F.

1.4 Familles libres et liées

Definition 1.6 *Une famille de vecteurs $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ est linéairement dépendante ou liée s'il existe des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, non tous nuls, tels que*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0. \tag{1}$$

Autrement dit, s'il existe une combinaison linéaire "non triviale" des v_j qui est nulle. Une telle relation est une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs. On dit aussi que les vecteurs de $\mathcal{V}$ sont linéairement dépendants.

Dans le cas où il n'existe pas de relation de dépendance linéaire, on dit que la famille $\mathcal{V}$ est libre ou linéairement indépendante ou encore que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ forment un système libre. On dit alors aussi que les vecteurs sont linéairement indépendants.

Prouver (observer) que une famille est liée ssi un vecteur dans la famille s'écrive comme combinaison linéaire des autres, et que l'union d'une famille liée avec n'importe quelle autre famille est encore liée.

Exercices :

13. Déterminer les valeurs de x telles que les paires suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ soient liées.

$$\boxed{(x,1),(4,2)} \quad \boxed{(x,x^2),(-3,9)} \quad \boxed{(x,1),(9,x)} \quad \boxed{(x,x^2),(1,x)}.$$

1.5 Bases

Definition 1.7 *Un système de vecteur $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de E s'il est à la fois libre et générateur de E.*

Prouver que si E admet une base formée de n vecteurs, alors toute base de E sera également composé de n vecteurs.

Exercices :

14. Pour chacune des familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, dire si elle est libre, génératrice de $\mathbb{R}^3$, une base de $\mathbb{R}^3$. Donner aussi une base de l'espace vectoriel engendré.
    (a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ avec $v_1 = (-2, 2, 2)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (-1, -1, 1)$.
    (b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ avec $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (1, 3, 2)$.
    (c) $\{v_1, v_2\}$ avec $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (0, -2, -2)$.
    (d) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ avec $v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (2, 3, 1)$, $v_3 = (3, 2, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1)$.
15. Pour quels $m \in \mathbb{R}$ la famille $\{(1+m, 1-m), (1-m, 1+m)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?
16. Est-ce que il y a des espaces vectoriels qui n'ont pas une base de cardinalité finie ? Trouver un exemple.

1.6 Dimension

Definition 1.8 *On dit qu'un espace vectoriel $E \neq \{0\}$ est de dimension finie s'il admet au moins une famille génératrice finie.*

Proposition 1.9 *Un espace vectoriel de dimension finie admet une base finie.*

Definition 1.10 *La dimension de E est le nombre de vecteurs (ou cardinal) d'une base de E (rappelons que toutes les bases ont même nombre d'éléments).*

Theorem 1.11 *Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors, pour tout élément u de E, il existe un unique n-uplet de nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Les nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont appelés coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout i, λ_i est la i-ème coordonnée de u dans $\mathcal{B}$.

Mentionner quelle est la dimension de $\mathbb{R}^n$, des plans, des droites...
Exercices :

17. Quelle est la dimension de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$–espace vectoriel ? Prouver que $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel est en calculer la dimension.

Theorem 1.12 (dit "de la base incomplète") *: Supposons E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n, A' une partie génératrice finie de E, A une partie libre de E, $A \subset A'$. Alors, il existe une partie libre et génératrice (base) B de E telle que $A \subset B \subset A'$.*

En déduire les considérations usuelles regardantes la cardinalité des familles libres et génératrices. Des autres exercices du type "compléter une famille libre" seront faits après à l'aide des matrices ?