

Cours doctoral  
Université d'Angers  
Mai-Juin 2012  
Tan Lei

## I. Si on faisait danser les racines ?

Nous développons le thème du théorème Gauss-Lucas, qui relie les racines d'un polynôme  $P$  et de sa dérivée  $P'$ .

Cas d'un polynôme réel  $P(x)$  :

**Théorème de Roll** :

Version 1 : Entre deux racines réelles de  $P$  il existe au moins une racine de  $P'$ .

Version 2 : Si toutes les racines de  $P$  sont réelles et sont incluses dans un intervalle réel  $[a, b]$ , alors toutes les racines de  $P'$  sont aussi réelles et sont incluses dans le même intervalle.

Considérons maintenant un polynôme  $P$  à **variable complexe**. La version 2 du théorème de Roll se généralise au fameux résultat de Gauss-Lucas :

# Théorème de Gauss-Lucas (version 1, version classique)

Pour tout polynôme  $P$  l'enveloppe convexe des racines de  $P$  contient les racines de  $P'$ .



Ici c'est un polynôme de degré quatre dont les racines se trouvent aux quatre sources des rayons. Les sommets du triangle blanc représentent les racines de la dérivée.



Notons  $\text{Conv}(P)$  l'enveloppe convexe des racines de  $P$ .  
Puisque  $P'$  est lui même un polynôme, on peut parler de  $\text{Conv}(P')$ .  
Et une autre façon d'interpréter le Théorème de Gauss-Lucas, comme illustré ci-dessus, est que  $\text{Conv}(P)$  contient  $\text{Conv}(P')$ .

## Preuve du théorème de Gauss-Lucas.

On va factoriser  $P$  en  $P(z) = A(z - a_1) \cdots (z - a_m)$  avec  $a_j$  les racines (ceci est possible d'après le théorème fondamental d'algèbre). On peut établir facilement

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - a_1} + \cdots + \frac{1}{z - a_m} = \sum_{j=1}^m \frac{\bar{z} - \bar{a}_j}{|z - a_j|^2} .$$

On fait passer au conjugué complexe des deux côtés, et on obtient

$$\overline{\left( \frac{P'(z)}{P(z)} \right)} = \sum_{j=1}^m \frac{z - a_j}{|z - a_j|^2} .$$

Nous allons d'abord montrer :

Soit  $P$  un polynôme complexe non-constant. Soit  $U$  un demi-plan ouvert ne contenant aucune racine de  $P$ . Soit  $u$  un point au bord de  $U$  qui n'est pas une racine. Alors  $P'(u) \neq 0$ , à moins que les racines de  $P$  sont toutes alignées sur  $\partial U$ .

Commençons par traiter un cas simple (le cas général sera en effet ramené à celui-ci).

On suppose pour l'instant que  $u = 0$  et que  $U$  est le demi-plan des nombres complexes dont la partie réelle est strictement positive.

Ainsi les racines  $a_j$  ont toutes une partie réelle négative ou nulle.

On suppose qu'au moins une des  $a_j$  a une partie réelle strictement négative. Du coup, par le calcul ci-dessus,

$$\overline{\left(\frac{P'(0)}{P(0)}\right)} = \sum_{j=1}^m \frac{0 - a_j}{|0 - a_j|^2} = - \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{|a_j|^2} ,$$

de partie réelle :  $-\sum_{j=1}^m \frac{\Re a_j}{|a_j|^2} > 0$ . En particulier  $P'(0) \neq 0$ .

Un autre corollaire (qui va nous servir plus tard) est que le vecteur  $\overline{\left(\frac{P'(0)}{P(0)}\right)}$  pointe dans  $U$ .

Traitions à présent le cas général. On peut imaginer que le plan est une feuille de papier sur laquelle l'on a tracé une droite bordant un demi-plan ouvert  $U$  ne contenant aucune racine de  $P$ , ainsi qu'un point  $u$  dans la droite. On peut alors pivoter la feuille pour que la droite devienne verticale avec  $U$  à sa droite puis glisser la feuille pour ramener le point  $u$  à l'origine. Ceci nous ramène dans le cas spécial ci-dessus pour lequel on a pu faire un calcul simple.

Les actions de **pivoter et glisser** se concrétisent par un changement de variable, en posant par exemple  $Q(z) = P(e^{i\theta}z + u)$ . On peut voir  $\overline{\left(\frac{P'(u)}{P(u)}\right)} = e^{i\theta} \overline{\left(\frac{Q'(0)}{Q(0)}\right)}$  est non-nul et pointe dans  $U$ .

**Retour à Gauss-Lucas.** Soit  $u$  un point en dehors de  $\text{Conv}(P)$ , ou sur  $\partial\text{Conv}(P)$  sans être racine. Alors on peut tracer une droite  $L$  en passant par  $u$  qui délimite un demi-plan ouvert sans racine. Du coup  $P'(u) \neq 0$  par l'argument ci-dessus. **Fin de la démonstration.**

# Que représente ce mystérieux vecteur $\overline{\left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)}$ ?

Pour tout nombre complexe  $z$ , le module  $|P(z)|$  est toujours positif ou nul, et il est nul justement aux points  $z$  tels que  $P(z) = 0$ , ou encore aux racines de  $P$ .

Ainsi les racines de  $P$  sont les lieux où la fonction  $z \mapsto |P(z)|$  réalise sa valeur minimale.

On peut imaginer que  $|P(z)|$  est notre fortune au point  $z$  qu'on cherche à s'enrichir. Dans quelle direction s'enrichit-on au plus vite ?



# Que représente ce mystérieux vecteur $\overline{\left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)}$ ?

Pour tout nombre complexe  $z$ , le module  $|P(z)|$  est toujours positif ou nul, et il est nul justement aux points  $z$  tels que  $P(z) = 0$ , ou encore aux racines de  $P$ .

Ainsi les racines de  $P$  sont les lieux où la fonction  $z \mapsto |P(z)|$  réalise sa valeur minimale.

On peut imaginer que  $|P(z)|$  est notre fortune au point  $z$  qu'on cherche à s'enrichir. Dans quelle direction s'enrichit-on au plus vite ?

Il faut suivre la direction du vecteur gradient de la fonction  $z \mapsto |P(z)|$  !

# Que représente ce mystérieux vecteur $\overline{\left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)}$ ?

Pour tout nombre complexe  $z$ , le module  $|P(z)|$  est toujours positif ou nul, et il est nul justement aux points  $z$  tels que  $P(z) = 0$ , ou encore aux racines de  $P$ .

Ainsi les racines de  $P$  sont les lieux où la fonction  $z \mapsto |P(z)|$  réalise sa valeur minimale.

On peut imaginer que  $|P(z)|$  est notre fortune au point  $z$  qu'on cherche à s'enrichir. Dans quelle direction s'enrichit-on au plus vite ?

Il faut suivre la direction du vecteur gradient de la fonction  $z \mapsto |P(z)|$  !

**Lemme géométrique.** Le vecteur  $\overline{\left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)}$  indique la direction du gradient de  $z \mapsto |P(z)|$ .  
(une preuve sera donnée plus tard).

Nous venons donc de montrer :

**Lemme du gradient.**

Soit  $P$  un polynôme complexe non-constant. Soit  $U$  un demi-plan ouvert ne contenant aucune racine de  $P$ . Soit  $u$  un point au bord de  $U$  qui n'est pas une racine. Alors  $P'(u) \neq 0$  et le gradient de la fonction  $z \mapsto |P(z)|$  en  $u$  pointe dans  $U$  (sauf dans le cas où les racines de  $P$  sont alignées sur le bord de  $U$ ).



Nous avons en effet illustré les **rayons du gradient** : à chaque instant, un tel rayon est toujours tangent au vecteur gradient. Ainsi, on a une illustration du lemme de gradient : dès qu'un rayon sort du triangle noir il file tout droit vers l'infini.

On voit qu'on sait même un peu plus. Parmi les droites passant par  $u$  il y en a deux (ou une si les racines de  $P$  sont alignées avec  $u$ ) qui 'valent' sur  $\text{Conv}(P)$ . Notre lemme dit que le rayon gradient en  $u$  passe toujours du secteur contenant  $\text{Conv}(P)$  vers le secteur opposé.

# Une enveloppe convexe peut en cacher des autres

La puissance du Théorème de Gauss-Lucas, comme beaucoup d'autres résultats mathématiques, se trouve dans le mot 'pour tout'. Il s'applique donc à n'importe quel polynôme non constant. Lorsqu'on l'applique à toute une famille de polynômes, on trouve parfois des facettes cachées surprenantes.

On va pratiquer sur une famille bien spécifique de polynômes.

On remarque aisément que si l'on soustrait à un polynôme  $P(z)$  une constante  $v$ , on change ses racines, par contre on ne change pas la dérivée  $P'$ , par conséquent on ne change pas  $\text{Conv}(P')$ . Par exemple au lieu de  $z^3 - 1$  on pourrait utiliser  $z^3 + 100$  ou encore  $z^3 - 3i$ , on obtiendrait des  $\text{Conv}(P)$  différents, mais chacun contiendrait  $\text{Conv}(P')$  qui est le point 0.

Une autre formulation est donc

**Théorème de Gauss-Lucas (version 2).** Pour tout polynôme non-constant  $P$  et tout nombre complexe  $v$ , l'ensemble  $\text{Conv}(P(z) - v)$  contient  $\text{Conv}(P')$ .

Derrière le **miracle algébrique** que la dérivée de  $P(z) - v$  est la même que la dérivée de  $P$ , il y a en effet une **raison géométrique** bien naturelle.

On pourrait visualiser  $z$  comme un point dans un plan complexe (le plan du départ) et  $P(z)$  comme un point dans une autre copie du plan complexe (le plan d'arrivé). On pourrait donc imaginer que le premier plan se constitue en fait une fine couche de film un peu élastique que  $P$  utilise pour couvrir son plan d'arrivé.

De ce point de vu on constate que les racines de  $P$  ne sont rien d'autres que les points que  $P$  utilise pour recouvrir 0, appelés les préimages, ou bien les antécédents de 0, de même les racines de  $P(z) - v$  ne sont rien d'autres que les points que  $P$  utilise pour recouvrir  $v$ , donc les préimages de  $v$ .

Les racines de la dérivée  $P'$  sont les lieux où  $P$  couvre l'image comme on enveloppe un cône : un petit disque du départ va recouvrir deux fois ou plus un disque d'arrivé. C'est pour cela qu'on les appellent points critiques de  $P$ . Hors ces points critiques,  $P$  agit de manière conforme.

Ainsi le Théorème de Gauss-Lucas peut se présenter comme suit :  
les préimages par un polynôme  $P$  de n'importe valeur contiennent  
dans leur enveloppe convexe les points critiques de  $P$  (sauf si  $P$  est  
constant).



# Preuve du Lemme géométrique

Le gradient pointe toujours dans la direction de  $\overline{\left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)}$ .

On peut en effet **visualiser** les rayons du gradient ainsi que les gradients à l'aide de notre point de vu géométrique.

Dans le plan d'arrivé, un point qui n'est pas l'origine se trouve toujours dans un certain rayon radial, et ce point augmente plus vite son module s'il file vers l'infini le long ce rayon. Ainsi les rayons du gradient de la fonction module  $w \mapsto |w|$  sont tout simplement les rayons radiaux.

Les préimages par  $P$  de ces rayons radiaux sont précisément les rayons du gradient de  $|P(z)|$ . On peut ainsi les considérer comme les empruntes calquées par  $P$  des traces radiaux.

En formule, soit  $\gamma(t)$  le rayon du gradient passant par  $\gamma(0) = u$ , vérifiant par exemple l'équation  $P(\gamma(t)) = t \cdot P(u)$ . Du coup, par une dérivée composée,  $\gamma'(0)P'(\gamma(0)) = P(u)$ . Ce qui donne

$$\gamma'(0) = \frac{P(u)}{P'(\gamma(0))} = \frac{P(u)}{P'(u)} = s \cdot \overline{\left(\frac{P'(u)}{P(u)}\right)}, \quad s > 0.$$

# Un demi-plan suffit pour tout recouvrir

Soit  $P$  un polynôme complexe non-constant quelconque.

Le **théorème fondamental d'algèbre** dit que  $P$  admet au moins une racine, ou encore, de notre point de vu géométrique, que le point 0 admet au moins une préimage par  $P$ .

En appliquant ce théorème à  $P(z) - v$  pour tout  $v$ , on peut conclure que tout point  $v$  admet au moins une préimage par  $P$  :

**$P$  est surjectif sur  $\mathbb{C}$ .**

Le Théorème de Gauss-Lucas raffine la surjectivité sous la forme suivante :

**Théorème de Gauss-Lucas (version 3)** Un polynôme non-constant  $P$  est surjective sur tout demi-plan fermé qui rencontre des points critiques de  $P$  (c'est-à-dire qui 'traverse'  $\text{Conv}(P')$ ).

# Équivalence entre Version 2 et Version 3

**De Version 2 à Version 3.** On procède par absurde. Soit  $F$  un demi-plan fermé rencontrant au moins un point critique (disons  $c$ ) de  $P$  tel que  $P(F)$  ne couvre pas tout le plan d'arrivé. Il manque par exemple un point  $v$ . Du coup les préimages de  $v$  sont toutes hors  $F$ . Donc l'enveloppe convexe de ces préimages ne touche pas  $F$ , en particulier ne contient pas le point critique  $c$ . Ceci contredit la version 2 du théorème de Gauss-Lucas.

**De Version 3 à Version 2.** On procède de nouveau par absurde. Supposons que  $\text{Conv}(P)$  'rate' un point critique  $z$ . On peut alors tracer une droite qui passe par  $z$  mais qui ne touche pas  $\text{Conv}(P)$ . Cette droite délimite ainsi deux demi-plan fermés dont un ne contient pas de racine, ou encore sur lequel  $P$  n'est pas surjectif, ce qui contredit la Version 3.

## Si on faisait danser les racines ?

Ainsi si l'on veut couvrir le plan d'arrivé tout entier avec un demi-plan de film le plus économique possible, il faut mieux prendre un demi-plan 'posé' sur  $\text{Conv}(P')$ .

En faisant pivoter ces demi-plans suivant le bord de  $\text{Conv}(P')$ , on obtient une danse des racines comme celle-ci :

(Insérer le film Leys-23a.mov).

# Une région encore plus économique pour couvrir le plan ?

Pour être encore plus économique, il serait intéressant de trouver une région  $D$  sur laquelle l'image de  $P$  couvre chaque point du plan d'arrivé une et une seule fois. c'est-à-dire  $P$  est bijective sur  $D$ .

L'animation que nous avons choisit illustre en effet le résultat suivant.

**Théorème de bijectivité de Thurston.** Soit  $P$  un polynôme non-constant. Alors tout demi-plan fermé  $F$  posé sur  $\text{Conv}(P')$  contient une sous région  $D_F$  sur laquelle  $P$  est bijective. De plus, une telle région peut être prise de manière d'être bornée par deux rayons du gradient de  $P(z) - v$  issu de  $c$  pour un certain choix de  $v$  et un point critique  $c \in \partial F$ .

(Pour être plus précis, il faut mieux prendre pour  $D_F$  la région ouverte délimitée par les deux rayons, union l'un des deux rayons).



Ici le demi-plan  $F$  se trouve en bas à droite. On a représenté son bord par une droite noire. Cette droite est posée sur un sommet  $c$  du triangle blanc. Les deux rayons du gradient sortant de  $c$  sont tangents à cette droite (ce qui sera toujours le cas lorsque  $P''(c) \neq 0$ ). On voit clairement que qu'ils se courbent dans le demi-plan  $F$ , et non vers le triangle blanc. La région bornée par ces deux rayons est notre  $D_F$  (nous la verrons plus clairement en version en relief).



On peut aussi y 'voir' la bijectivité : Les rayons du gradient de  $P(z) - v$  ne sont rien d'autres que les préimages par  $P$  des rayons radiaux issus de  $v$  du plan d'arrivé. Dans  $F$  on peut remarquer la présence d'une source des rayons. Et parmi tous les rayons issus de ce point, il y en a un qui 'bute' vers  $c$  de manière perpendiculaire à la droite noire, puis bifurque sur les deux rayons tangents à la droite. Et tous les autres rayons de même source sont bloqués par ces deux-là et donc restent dans  $F$ . Il apparaît donc devant nos yeux une copie 'conforme' du plan d'arrivé muni des rayons radiaux issus de  $v$ .

Voici une vision en relief de la région  $D_F$





# Une idée de la preuve du théorème de bijectivité

L'idée derrière est de considérer le plan de départ avec une autre métrique, notamment celle 'calquée' par  $P$  de la métrique usuelle du plan d'arrivée. Ainsi le vecteur tangent  $\gamma'(t)$  d'une courbe  $\gamma(t)$  a pour longueur  $|P'(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|$  à présent.

Du coup les rayons du gradient de  $P(z) - v$  pour n'importe quel choix de  $v$  deviennent des géodésiques de cette nouvelle métrique.

En général une géodésique a tendance de se courber vers les endroits de petite métrique (car c'est plus économique) .

Et notre lemme du gradient, appliqué cette fois-ci au polynôme dérivé  $P'$  (c'est peut-être pour cette raison que le résultat est plus puissant que le théorème de Gauss-Lucas), montre que le gradient de  $|P'(z)|$  pointe toujours vers l'extérieur de  $\text{Conv}(P')$ . Ceci indique que entre deux points proches dans le demi-plan  $F$ , la géodésique qui les relie courbe vers  $\text{Conv}(P')$ .

# Questions ouvertes

1.  $\bigcap_v \text{Conv}(P(z) - v) = ???$  On sait qu'il contient  $\text{Conv}(P')$ ....  
(voir une discussion sur Mathoverflow).  
(Montre ici le programme d'Arnaud Chéritat).
2. Le plan d'arrivé est filtré selon la complexité de  $\text{Conv}(P(z) - v)$  (nombre de racines au bord). Etudier ce filtrage.
3. Conjecture de Casas-Alvero : Si  $P$  partage une racine commune avec  $P^{(k)}$  pour tout  $k$  alors  $P$  est un monôme.
4. Conjecture de Sendov-Illief : Si  $\text{Conv}(P)$  est inclus dans le disque unité fermé alors le disque  $|z - z_0| \leq 1$  pour toute racine  $z_0$  contient un point critique.
5. Conjecture de Smale : Pour tout  $z$  non critique, il existe un point critique  $c$  tel que :

$$\frac{|P(z) - P(c)|}{|z - c|} \leq |P'(z)| \text{ en fait } \frac{|P(z) - P(c)|}{|z - c|} \leq \frac{d-1}{d} |P'(z)|.$$

## Quelques exercices

1. Traiter le cas du Gauss-Lucas où les racines de  $P$  sont alignées.
2. Montrer que si les racines sont alignées alors les points critiques sont alignés sur la même ligne.
3. Montrer que si les points critiques sont alignés alors les valeurs critiques le sont également.
4. Montrer que si les points critiques sont symétriques par rapport à une droite (en tenant compte des multiplicités) alors les valeurs critiques le sont également.
5. Montrer que les racines de  $P$  et celles de  $P'$  partagent le même barycentre. En déduire que ce barycentre est la racine de la dernière dérivée de  $P$ .
6. Soit  $u \in \partial \text{Conv}(P)$  avec  $P(u) = 0$ . Déterminer  $r(u)$  minimal tel qu'un disque de rayon  $r(u)$  avec  $u$  au bord contienne  $\text{Conv}(P)$ . Montrer que le bord d'un tel disque contient au moins deux racines distinctes de  $P$ , et en contient au moins trois si le diamètre d'extrémité  $u$  n'est pas une racine.

## Quelques résultats

1. Théorème de Goodman, Rahman et Ratti : Si  $\text{Conv}(P)$  est inclus dans le disque unité fermé et si  $P(1) = 0$  alors  $P'$  admet une racine dans le disque ayant  $[0, 1]$  comme diamètre.
2. Théorème de Sudbery : Si  $P$  de degré  $m$  possède  $k \geq 2$  racines distinctes alors les dérivées successives de  $P$  ont en total au moins  $m + 1 - k$  racines distinctes (exo. facile pour  $k = 2$ ).
3. Théorème de Grace et Heawood : Si  $P$  est de degré  $n$ , pour tout paire  $u, v$  de zeros de  $P$ , prenons le disque fermé ayant  $u, v$  au sommet d'un diamètre, multiplier le rayon par  $\cot \frac{\pi}{n}$ , on obtient alors un disque qui contient nécessairement un point critique.
4. Théorème de Buff : Si une fraction rationnelle  $f$  admet un zéro simple en  $\infty$ , le barycentre des autres zéros de  $f$  (compté avec multiplicité) coïncide avec le barycentre des zéros de  $f'$  (compté avec multiplicité). Mais il n'y a pas forcément inclusion des enveloppes convexes.

## Quelques preuves

1. Lemme géométrique. Rappelons que le gradient est défini par  $\nabla|P| = (|P|'_x, |P|'_y)$ . Nous allons écrire sous forme complexe

$\nabla_c|P| = |P|'_x + i|P|'_y$ . On a  $\frac{1}{2}\nabla_c = \frac{\partial}{\partial\bar{z}}$ . Puisque  $\log|P|$  croît tant que  $|P|$  croît, et que  $\nabla \log|P|$  est plus facile à calculer, on effectue

$$\begin{aligned}\nabla_c|P| &= |P| \cdot \nabla_c \log|P| = \frac{|P|}{2} \nabla_c \log|P|^2 \\ &= \frac{|P(z)|}{2} \nabla_c (\log P(z) + \log \overline{P(z)}) \\ &= |P(z)| \cdot \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left( \log P(z) + \log \overline{P(z)} \right) = |P(z)| \cdot \overline{\left( \frac{P'(z)}{P(z)} \right)}.\end{aligned}$$

2. Voici la preuve classique de Gauss-Lucas : Soit  $c$  un point tel que  $P'(c) = 0$  et  $P(c) \neq 0$ . Alors

$$\sum_{j=1}^m \frac{c - a_j}{|c - a_j|^2} = \frac{\overline{P'(c)}}{P(c)} = 0 .$$

Mais le terme à gauche peut aussi s'écrire

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{|c - a_j|^2} c - \sum_{j=1}^m \frac{1}{|c - a_j|^2} a_j .$$

En mettant  $u_j = \frac{1}{|c - a_j|^2} > 0$ , on a donc  $c = \frac{\sum_{j=1}^m (u_j a_j)}{\sum_{j=1}^m u_j}$ . Cette égalité veut dire que  $c$  s'exprime comme un barycentre pondéré des racines  $a_j$  de  $P$  de poids  $u_j \geq 0$ . Comme l'enveloppe convexe des  $a_j$  coïncide avec l'ensemble des barycentres pondérés, on sait que  $c \in \text{Conv}(P)$ .

3. On peut aussi interpréter les rayons du gradient comme le flot du champ de vecteurs de Newton  $\frac{P(z)}{P'(z)} \frac{\partial}{\partial z}$ , puisque les deux vecteurs  $\frac{P(z)}{P'(z)}$  et  $\overline{\left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)}$  pointent dans la même direction.

**Question lié à 2.** Notons  $a_j(v)$  les points  $P^{-1}(v)$  pour tout  $v$  non valeur critique. Alors pour  $u_j(c, v) = \frac{1}{|c - a_j(v)|^2}$ , on a

$$c = \frac{\sum_j (u_j(c, v) a_j(v))}{\sum_j u_j(c, v)}, \quad \forall c \text{ point critique}.$$

**Etudier**  $v \mapsto \left( \frac{u_j(c, v)}{\sum_j u_j(c, v)}, j = 1, \dots, m \right)$  pour tout  $c$ , ou le voir comme une matrice rectangulaire  $m \times (m - 1)$  en considérant tous les  $c$ .

Il semblerait que le  $m$ -simplexe  $\sum_j w_j = 1, w_j \geq 0$  n'est pas couvert complètement. Quelle est alors l'image ?

Lorsqu'on itère la méthode de Newton de  $P(z) - v$ , on obtient une famille de dimension un de toutes les méthodes de Newton de polynômes de degré  $m$ . Si  $m = 3$ , on devrait obtenir la famille complète des Newton cubiques, donc indépendant de notre polynôme initial (sauf  $z^3 + c$ ). Dans le cas degré 4, la tranche doit dépendre de  $P$ , ou plus exactement la configuration des points critiques de  $P$ ...



# Références

Polynomials, livre de Prasolov,

Xavier Buff, On the zeros and critical points of a rational map

Goodman, Rahman and Ratti, On the zeros of a polynomial and its derivative

Marden, The search for a Roll's theorem in the complex domain

Marden, Conjectures on the critical points of a polynomial

Draisma et Jong, On the Casas-Alvero conjecture, European math. society newsletter