

Les 3 formes d'un système linéaire

1. d'un système d'équations

2. de produit matriciel $A\vec{x} = \vec{b}$, ou bien, en représentant A par ses colonnes

$$(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

3. de combinaison linéaire :

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_m \vec{v}_m = \vec{b}.$$

Interprétation du point 2 : Etant donné une matrice A , on

considère l'application linéaire $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$. Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{b}$ revient à déterminer les antécédents de $\vec{b}$ par f .

§5.2 Image et noyau d'une application linéaire.

Définition Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'une application linéaire, de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A\vec{x}.$$

§5.2 Image et noyau d'une application linéaire.

Définition Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'une application linéaire, de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A\vec{x}.$$

Le noyau de f , noté par $\text{Ker}(f)$, est l'ensemble des antécédents du vecteur $\vec{0}$:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\} = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\} \\ &= \text{l'ensemble solutions du système } A\vec{x} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Exemple. Soit $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$. Quel est le noyau de f ? Et pour

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ?$$

Base de $\text{Ker}(f)$

Théorème. Pour toute application linéaire $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\text{Ker}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Preuve. Il faut vérifier que pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Ker}(f)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u} + \vec{v} \in \text{Ker}(f)$ et $\lambda\vec{u} \in \text{Ker}(f)$. Ou bien $f(\vec{u}) = \vec{0} = f(\vec{v})$ implique $f(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0}$ et $f(\lambda\vec{u}) = \vec{0}$.

Base de $\text{Ker}(f)$

Théorème. Pour toute application linéaire $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\text{Ker}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Preuve. Il faut vérifier que pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Ker}(f)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u} + \vec{v} \in \text{Ker}(f)$ et $\lambda\vec{u} \in \text{Ker}(f)$. Ou bien $f(\vec{u}) = \vec{0} = f(\vec{v})$ implique $f(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0}$ et $f(\lambda\vec{u}) = \vec{0}$.

On cherche à trouver une base pour $\text{Ker}(f)$. Dans l'exemple ci-dessus : $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Donc une base est $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Base de $\text{Ker}(f)$

Théorème. Pour toute application linéaire $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\text{Ker}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Preuve. Il faut vérifier que pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Ker}(f)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u} + \vec{v} \in \text{Ker}(f)$ et $\lambda\vec{u} \in \text{Ker}(f)$. Ou bien $f(\vec{u}) = \vec{0} = f(\vec{v})$ implique $f(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0}$ et $f(\lambda\vec{u}) = \vec{0}$.

On cherche à trouver une base pour $\text{Ker}(f)$. Dans l'exemple ci-dessus : $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Donc une base est $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice. Si $\text{Ker}(f)$ est de la forme $\left\{ \begin{pmatrix} 2a \\ b+a \\ b-a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Déterminer une base.

Image

Définition Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'une application linéaire, de la forme

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A\vec{x} = f(\vec{x}) .$$

Image

Définition Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'une application linéaire, de la forme

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A\vec{x} = f(\vec{x}) .$$

L'image de f , noté par $Im(f)$, est l'ensemble

$$Im(f) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^m\}$$

Image

Définition Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'une application linéaire, de la forme

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A\vec{x} = f(\vec{x}) .$$

L'image de f , noté par $Im(f)$, est l'ensemble

$$Im(f) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^m\}$$

Théorème. Pour toute application linéaire $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et est $Im(f) = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \rangle$, où $\vec{u}_j$ est la j -ième colonne de A .

Image

Définition Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'une application linéaire, de la forme

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A\vec{x} = f(\vec{x}) .$$

L'image de f , noté par $Im(f)$, est l'ensemble

$$Im(f) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^m\}$$

Théorème. Pour toute application linéaire $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et est $Im(f) = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \rangle$, où $\vec{u}_j$ est la j -ième colonne de A .

Preuve. Car $Im(f) = \langle f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_m) \rangle$ et $f(\vec{e}_j) = \vec{u}_j$,
 $j = 1 \dots, m$.

Image

Définition Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'une application linéaire, de la forme

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A\vec{x} = f(\vec{x}) .$$

L'image de f , noté par $Im(f)$, est l'ensemble

$$Im(f) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^m\}$$

Théorème. Pour toute application linéaire $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et est $Im(f) = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \rangle$, où $\vec{u}_j$ est la j -ième colonne de A .

Preuve. Car $Im(f) = \langle f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_m) \rangle$ et $f(\vec{e}_j) = \vec{u}_j$,
 $j = 1 \dots, m$.

Comment trouver une base de $Im(f)$? On échelonne A en $\hat{A}$, on repère les colonnes pivotales, alors les colonnes correspondantes de A forment une base de $Im(f)$.

Exemple

Comment trouver une base de $\text{Im}(f)$? On échelonne A on $\hat{A}$, on repère les colonnes pivotales, alors les colonnes correspondantes de A forment une base de $\text{Im}(f)$.

Exemple. Soit $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{Im}(f)$ ainsi qu'une base.

Exemple

Comment trouver une base de $\text{Im}(f)$? On échelonne A on $\hat{A}$, on repère les colonnes pivotales, alors les colonnes correspondantes de A forment une base de $\text{Im}(f)$.

Exemple. Soit $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{Im}(f)$ ainsi qu'une base.

Solution. $\text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, une base est $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Donc on a aussi $\text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

§5.3 Matrice et Rang de f

Pour $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 3x - y \\ x + 2y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, avec $A =$

§5.3 Matrice et Rang de f

Pour $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 3x - y \\ x + 2y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On dit aussi que A est la matrice de f dans la base canonique.

§5.3 Matrice et Rang de f

Pour $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 3x - y \\ x + 2y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On dit aussi que A est la matrice de f dans la base canonique.

On appelle le **rang** de f , l'entier suivant (les définitions donnent le même résultat)

1. Le rang de la matrice A (ou bien le nombre de pivots)
2. La dimension de $\text{Im}(f)$
3. Le nombre de vecteurs dans une base de $\text{Im}(f)$.

§5.3 Matrice et Rang de f

Pour $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 3x - y \\ x + 2y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On dit aussi que A est la matrice de f dans la base canonique.

On appelle le **rang** de f , l'entier suivant (les définitions donnent le même résultat)

1. Le rang de la matrice A (ou bien le nombre de pivots)
2. La dimension de $\text{Im}(f)$
3. Le nombre de vecteurs dans une base de $\text{Im}(f)$.

Théorème du rang Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linéaire. Alors

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n = \text{le nombre de col. de } A .$$

Preuve. $\dim(\text{Ker}(f))$ = le nombre de colonnes NON pivotales
 $\dim(\text{Im}(f))$ = le nombre de colonnes pivotales.

§5.4 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition. On dit qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est

injective si deux vecteurs différents ont des images différents

surjective Si $\text{Im}(f)$ atteint tout l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$.

bijective (ou bien un **automorphisme**) si $n = m$ et que f est inversible.

Théorème d'injectivité. f est injective ssi l'une des conditions est satisfaite :

1. Un vecteur $\vec{b}$ quelconque de l'espace d'arrivée a au plus un antécédent
2. Le vecteur $\vec{0}$ de l'espace d'arrivée a au plus un antécédent
3. $\text{Ker}(f) = \vec{0}$.
4. Toute colonne de la matrice de f contient un pivot.
5. Les vecteurs colonnes de la matrice de f forment une famille **libre**.