

Introduction à la géométrie affine



Sommaire

1	Exemples et motivations	1
2	Premières définitions	2
2.1	Homothéties	5
3	Théorèmes de Desargues et de Pappus	7
4	Convexité	11
5	Vers la théorie générale espaces et sous-espaces affines	12
6	Indépendance affine. Repères affines et systèmes de coordonnées barycentriques	15
7	Applications affines	16

1. Exemples et motivations

- Le développement de Taylor à l'ordre 1 en $a \in \mathbb{R}$
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire (non homogène) : $Ax = b$ est résoluble si et seulement si $\text{rank}(A) = \text{rank}(Ab)$. Dans ce cas, $S(A, b) = x_0 + F$, où $F = \ker(A)$, c'est-à-dire l'ensemble des solutions est de la forme **point plus sous-espace vectoriel**.

La différence de deux points $p_2 - p_1$ est un vecteur.

- Les translations ne sont pas des applications linéaires; en particulier, l'image d'un sous-espace linéaire par une translation n'est pas un sous-espace vectoriel. On peut dire que $S(A, b) = t_{x_0}(F)$.
- On veut pouvoir considérer des homothéties ayant des centres différents. Par exemple, si $h_{a,k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'homothétie de centre a et rapport $k \neq 0, 1$, alors

$$h_{a,k}(x) = a + k(x - a)$$

(h coïncide avec son développement de Taylor à l'ordre 1). On peut aussi l'écrire comme

$$h_{a,k}(x) = (1 - k)a + kx.$$

Pour calculer la composition et comprendre ce qu'elle représente, le calcul est plus facile si on utilise les [combinaisons affines de points](#) :

$$\begin{aligned}(h_{a',k'} \circ h_{a,k})(x) &= h_{a',k'}((1-k)a + kx) = (1-k')a' + k'((1-k)a + kx) \\ &= (1-k')a' + k'(1-k)a + k'kx.\end{aligned}$$

On en déduit que la composition de deux homothéties est une homothétie de rapport $k'k$. Si $k'k \neq 1$, alors

$$b = \frac{(1-k')a' + k'(1-k)a}{1-k'k}$$

est son centre (le point fixe) et on a

$$(h_{a',k'} \circ h_{a,k})(x) = (1-k'k)b + k'kx = b + k'k(x-b).$$

Si $k'k = 1$, alors

$$(h_{a',k'} \circ h_{a,k})(x) = x + (1-k')a' + (k'-1)a = x + (1-k')(a' - a).$$

- En considérant une courbe plane, c'est-à-dire l'image d'une paramétrisation, on voit apparaître la courbe comme ensemble de points et les vecteurs tangents. Par exemple, pour $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, on a comme image la courbe définie par $x^2 + y^2 = 1$, c'est-à-dire le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. La dérivée en tout point représente un vecteur tangent.
- L'espace affine est l'univers naturel pour les logiciels qui touchent à la géométrie 3D. Il faut savoir distinguer un point d'un vecteur (même s'ils sont représentés tous les deux par des triplets de réels), et éviter des opérations dépourvues de sens (comme additionner deux points).

Remarque. Que veut dire "opérations dépourvues de sens"? Il faudrait parler du système de coordonnées et du changement de ces systèmes...

2. Premières définitions

Définition 2.1. L'espace affine $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$ est \mathbb{R}^n vu comme un ensemble de points muni de l'*action naturelle* de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n (définie sur cet ensemble de points par)

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n \times \mathbb{A}^n & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\ \psi & & \psi \\ (\vec{v}, A) & \longmapsto & A + \vec{v}\end{array}$$

où $A + \vec{v}$ est le point correspondant au vecteur $A + \vec{v}$.

Les propriétés suivantes découlent de cette définition :

1. Pour tous $A, B \in \mathbb{A}^n$ il existe un unique vecteur \overrightarrow{AB} tel que $A + \overrightarrow{AB} = B$.
2. Pour tout $A \in \mathbb{A}^n$ et tous $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, on a $(A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w})$.
3. Pour tous $A \in \mathbb{A}^n$ et tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, si $B = A + \vec{v}$, alors pour tout $O \in \mathbb{A}^n$ on a $\overrightarrow{OA} + \vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Remarque. Les deux premières propriétés ci-dessus plus l'axiome $A + \vec{0} = A$ pour tout A , vues comme éléments d'une définition, mènent à la notion abstraite de structure affine et donc d'espace affine (voir §5).

Deux directions s'ouvrent avec ce point de vue ; la première est celle qui nous permet de définir les sous-espaces affines, les repères affines et les applications affines. La deuxième est celle allant vers la notion de barycentre et, plus tard, celle de convexité.

Définition 2.2. Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{A}^n$ non vide est dit sous-espace affine s'il existe $\vec{S} \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel et un point $A \in S$ tel que $S = A + \vec{S}$.

On démontre que si S est un sous-espace affine la propriété est vérifiée par tout point $P \in S$. Puis que S est un sous-espace affine si et seulement si pour tous $A, B \in S$, on a $(AB) \subset S$. (Pour la preuve de la réciproque, on note par X le sous-ensemble de \mathbb{R}^n défini par $P - A$ avec $A \in S$ fixé. On montre, en utilisant l'hypothèse et les parallélogrammes, que X est un sous-espace vectoriel.)

Définition 2.3. Un *repère cartésien* (ou repère affine à origine fixée) est la donnée d'un point de \mathbb{A}^n et d'une base de \mathbb{R}^n . Notation : $(A, (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n))$.

Le repère cartésien met en évidence $n + 1$ points ordonnés de \mathbb{A}^n , $A, A_1 = A + \vec{v}_1, \dots$. Ceci pointe dans la deuxième direction à laquelle on faisait référence plus haut. On appelle *repère affine*, ou *base affine* dans \mathbb{A}^n , $n + 1$ points $(B_1, B_2, \dots, B_{n+1})$ tel qu'il n'existe pas un hyperplan les contenant. Alors, pour tout point $P \in \mathbb{A}^n$ il existe $n + 1$ scalaires $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que

- $P = \beta_1 B_1 + \dots + \beta_{n+1} B_{n+1}$
- $\beta_1 + \dots + \beta_{n+1} = 1$
- $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$ sont uniques.

Les $n + 1$ scalaires $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ sont appelés les *coordonnées affines* (ou *barycentrique*) de P .

Les opérations et notions de géométrie affines doivent être cohérents aux changements de repères affines. C'est pour cette raison que la somme de deux points est dépourvue de sens en géométrie affine.

Définition 2.4. Une fonction $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^n$ est dite *application affine* s'il existe $p_0 \in \mathbb{A}^m$ et $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire tels que pour tout $p \in \mathbb{A}^m$

$$f(p) = f(p_0) + L(p - p_0).$$

L est dite l'application linéaire associée à f et est notée \vec{f} ou Df (voir le lemme ci-dessous).

L'application affine $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ est dite *transformation affine* si f est bijective.

Lemme 2.5. Si $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^n$ est une application affine, alors pour tout $q_0 \in \mathbb{A}^m$ et pour tout $p \in \mathbb{A}^m$ on a

$$f(p) = f(q_0) + \vec{f}(p - q_0).$$

Démonstration. Il existe un point p_0 avec cette propriété d'après la définition. On a

$$f(p) = f(p_0) + \vec{f}(p - p_0) = f(p_0) + \vec{f}(q_0 - p_0) + \vec{f}(p - q_0) = f(q_0) + \vec{f}(p - q_0). \quad \square$$

Exemple 2.6 (Projection parallèle). Soit \mathcal{D} une droite de \mathbb{A}^3 et soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{A}^3$ un plan tels que \mathcal{D} coupe \mathcal{P} en exactement un point. On définit l'application $\pi : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathcal{P}$ par

$$\mathbb{A}^3 \ni P \mapsto P' \in \mathcal{P}$$

où P' est l'unique point d'intersection de la droite \mathcal{D}_P passant par P et parallèle à \mathcal{D} et du plan \mathcal{P} . L'application ainsi définie est affine et s'appelle *la projection sur \mathcal{P} parallèle à \mathcal{D}* .

Pour justifier cette affirmation, soit Q' le point d'intersection de \mathcal{D} et \mathcal{P} . Alors $\pi(Q') = Q'$ et

$$\pi(P) = Q' + \pi_{\vec{\mathcal{P}}, \vec{\mathcal{D}}}(\overrightarrow{Q'P})$$

où $\pi_{\vec{\mathcal{P}}, \vec{\mathcal{D}}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est la projection sur le sous-espace $\vec{\mathcal{P}}$ parallèle au sous-espace $\vec{\mathcal{D}}$.

Si $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^n$ est une application affine, et si $(O, (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m))$ et $(\Omega, (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n))$ sont des repères cartésiens, alors f s'écrit en coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

où A est la matrice associée à \vec{f} dans les bases (\vec{v}_j) et (\vec{w}_k) , et b_1, \dots, b_n sont les coordonnées cartésiennes du point $f(O)$.

Exemple 2.7 (Symétrie parallèle). De la même manière on introduit, dans le plan affine, la symétrie $s = s_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$ par rapport à une droite \mathcal{D} parallèle à une droite \mathcal{D}' , où \mathcal{D} et \mathcal{D}' se coupent en un point. Les points de la droite \mathcal{D} sont fixés par s et les droites parallèles à \mathcal{D}' sont invariées par s . L'application linéaire associée est

$$\overrightarrow{s_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}} = s_{\vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{D}'}}.$$

La notion se généralise dans l'espace \mathbb{A}^n en utilisant deux sous-espaces affines de dimensions complémentaires qui se coupent en un point.

Remarque 2.8. Si on note par $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines de \mathbb{A}^n dans \mathbb{A}^n , et par $GA(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des transformations affines de \mathbb{A}^n , alors

- $GA(n, \mathbb{R}) \subset \text{Aff}(n, \mathbb{R})$ est un groupe, le *groupe des transformations affines*
- la géométrie affine (dans l'espace affine \mathbb{A}^n) est l'étude des objets et propriétés géométriques invariants sous l'action du groupe $GA(n, \mathbb{R})$.

Proposition 2.9. Soit $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ une transformation affine. Alors :

- 1) L'image par f d'une droite est une droite.
- 2) Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
- 3) Pour tous A, B, C points distincts alignés, on a $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ où $A' = f(A), \dots$

Démonstration. Vérification directe. □

Théorème 2.10. Soient $A, B, C \in \mathbb{A}^2$ trois points non alignés et soient aussi $A', B', C' \in \mathbb{A}^2$ trois points non alignés. Alors il existe une unique transformation affine f telle que

$$f(A) = (A), \quad f(B) = B' \quad \text{et} \quad f(C) = C'.$$

Ce théorème est un cas particulier d'un résultat analogue pour deux familles de $n + 1$ points affinement indépendants en \mathbb{A}^{n+1} .

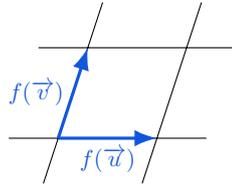
La preuve est un exercice d'algèbre linéaire en se plaçant dans le repère affine $(A, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))$ par exemple. On peut raisonner directement en utilisant la théorie des bases des espaces vectoriels. Il est instructif de donner une preuve géométrique à ce résultat qui dit que *tous les triangles sont équivalents en géométrie affine*. La preuve géométrique construit f par composition de

- $t = t_{\overrightarrow{AA'}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$
- r la rotation d'angle $t(\widehat{B})A'B'$
- h l'homothétie de centre A' qui applique $r(t(B))$ sur B'
- g la transformation affine qui fixe point par point la droite $(A'B')$ et qui applique $C_1 = h(r(t(C)))$ sur C' . Dans la base $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C_1})$, la matrice de \overrightarrow{g} est $\begin{pmatrix} 1 & x_{C'} \\ 0 & y_{C'} \end{pmatrix}$.

Théorème 2.11. Si $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ est une application bijective telle que pour toute droite \mathcal{D} l'image $f(\mathcal{D})$ est une droite, alors f est une transformation affine.

Démonstration. On suit les étapes suivantes :

- 1) On peut supposer que f admet un point fixe. On considère¹ f comme une fonction bijective de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 telle que toute droite (sous-ensemble de la forme $\overrightarrow{v} + L$ avec $L \subset \mathbb{R}^2$ sous-espace vectoriel de dimension 1) est envoyée sur une droite. **On veut montrer que f est linéaire.**
- 2) f applique droites parallèles sur droites parallèles.
- 3) Si \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} sont libres, alors leurs images par f sont libres.
- 4) Si \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} sont libres, alors $f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ — en utilisant 2) et 3).



- 5) f est additive, c'est-à-dire pour tous \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} on a $f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$. (Quand \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} sont liés, on utilise un troisième vecteur non proportionnel.)
- 6) Pour tout vecteur $\overrightarrow{v} \neq 0$ on définit la fonction $\varphi_{\overrightarrow{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(a\overrightarrow{v}) = \varphi_{\overrightarrow{v}}(a) f(\overrightarrow{v})$. (Il faut justifier que $\varphi_{\overrightarrow{v}}$ est bien définie.)
- 7) Soit \overrightarrow{u} fixé et soit \overrightarrow{v} non nul et non proportionnel avec \overrightarrow{u} . Alors $\varphi_{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}} = \varphi_{\overrightarrow{u}} = \varphi_{\overrightarrow{v}}$. On en déduit que $\varphi_{\overrightarrow{u}}$ est indépendante de \overrightarrow{u} .
- 8) φ est additive et multiplicative.
- 9) φ est l'identité sur $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- 10) φ est strictement croissante, donc φ est l'identité. □

Dans ce résultat fondamental, on peut remplacer \mathbb{R}^2 par \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$. Par contre le corps des réels est nécessaire.

2.1. Homothéties

Proposition 2.12. Soit $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ une transformation affine telle que pour toute droite \mathcal{D} l'image $f(\mathcal{D})$ est une droite parallèle à \mathcal{D} . Alors f est ou bien une translation ou bien une homothétie.

Démonstration. Soit A un point de \mathbb{A}^n . En remplaçant f par $t_{\overrightarrow{f(A)A}} \circ f$, on peut supposer que f admet un point fixe. On démontre que si f admet un point fixe A et f n'est pas l'application identité, alors f est une homothétie de centre A .

¹De manière plus précise, on considère un point $A \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ et l'application $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $F(\overrightarrow{v}) = f(A + \overrightarrow{v}) - f(A)$, c'est-à-dire on fait apparaître l'application tangente associée à f .

Comme l'image d'une droite par f est une droite parallèle, il s'ensuit que toute droite passant par A est fixée (globalement) par f . Alors, pour tout $B \neq A$, il existe $k_B \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$f(B) = A + k_B \overrightarrow{AB}.$$

Alors en fixant un point $B \neq A$, on montre en utilisant des parallélogrammes, que $k_P = k_B$ pour tout $P \notin (AB)$, d'où le résultat. \square

Théorème 2.13 (Ménélaos). Soient $A, B, C \in \mathbb{A}^2$ trois points non alignés et soient $M \in (BC)$, $N \in (CA)$ et $P \in (AB)$ différents des points initiaux A, B et C . Alors M, N et P sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1.$$

Première démonstration. On considère le repère affine centré $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Dans ce système de coordonnées, on a $N = (0, n)$, $P = (p, 0)$ et $M = (m, 1 - m)$. Alors les trois points sont alignés si

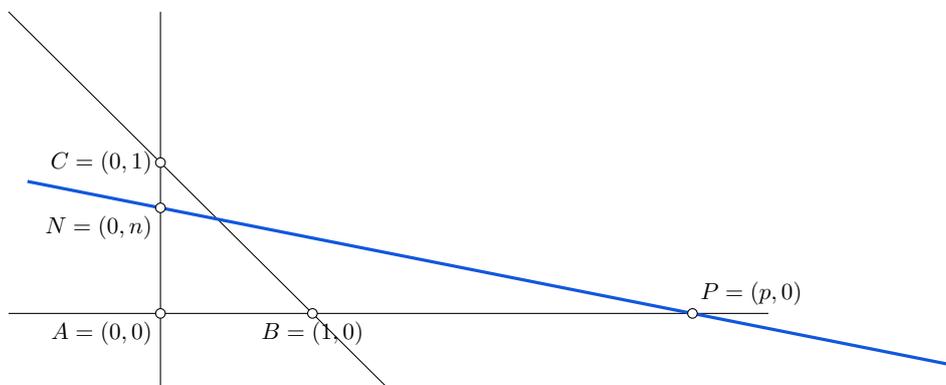


Figure 1: Les éléments du théorème de Ménélaos vus dans un système de coordonnées bien choisi.

et seulement si

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & p & 0 \\ 1 & 0 & n \\ 1 & m & 1 - m \end{vmatrix} = np - mn - (1 - m)p = -mn + np + mp - p.$$

En même temps,

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{p}{p-1} \frac{m-1}{m} \frac{n-1}{n} = \frac{mnp - p(m+n) + p}{mnp - mn}.$$

Il faut regarder les deux sens. Par exemple, si ce produit vaut 1, alors on a

$$mnp - p(m+n) + p = mnp - mn \quad \text{c'est-à-dire} \quad p(m+n) = mn + p. \quad \square$$

Deuxième démonstration. On exprime chacun des points M, N et P comme barycentres de deux points pondérés; on a

$$M = (1 - \mu)B + \mu C, \quad N = (1 - \eta)C + \eta A \quad \text{et} \quad P = (1 - \pi)A + \pi B$$

avec $\mu, \eta, \pi \notin \{0,1\}$. Les trois points sont alignés si et seulement si

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 - \mu & \mu \\ \eta & 0 & 1 - \eta \\ 1 - \pi & \pi & 0 \end{vmatrix} = \mu\eta\pi + (1 - \mu)(1 - \eta)(1 - \pi)$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\frac{\mu\eta\pi}{(1-\mu)(1-\eta)(1-\pi)} = -1.$$

En même temps

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{-\pi}{1-\pi} \frac{-\mu}{1-\mu} \frac{-\eta}{1-\eta} = -\frac{\mu\eta\pi}{(1-\mu)(1-\eta)(1-\pi)},$$

donc le résultat. □

$$P = (1-\pi)A + \pi B \iff 0 = (1-\pi)\overrightarrow{PA} + \pi\overrightarrow{PB}$$

Troisième démonstration. On considère la composition des homothéties

$$F = h_{P, \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}} \circ h_{M, \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}} \circ h_{N, \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}}$$

qui fixe le point A .

- Si M, N et P sont alignés, alors F est, soit une homothétie de centre situé sur la droite (M, N, P) , soit une translation de vecteur proportionnel à \overrightarrow{MN} . Comme $A \notin (M, N, P)$, il s'ensuit que F est l'identité. Donc le produit des rapports vaut 1.
- Si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$, alors F est une translation. Mais $F(A) = A$. Donc la composition est l'application identité. On en déduit que les centres sont alignés. □

3. Théorèmes de Desargues et de Pappus

Le théorème de Desargues appartient à la géométrie (projective) de l'espace: il ouvre le chemin vers l'étude des projections centrales et, par la suite, de la géométrie projective. Le théorème peut être énoncé dans le cadre de la géométrie affine, mais le nombre de cas spéciaux à considérer suggèrent que ce cadre n'est pas le "bon".

Théorème 3.1 (Desargues). *Soient $[ABC]$ et $[A'B'C']$ deux triangles dans l'espace tels que*

- les droites (AA') , (BB') et (CC') s'intersectent en un point
- $(AB) \cap (A'B') = \{P\}$, $(BC) \cap (B'C') = \{M\}$, $(AC) \cap (A'C') = \{N\}$.

Alors les points M, N et P sont alignés.

Comme les points A, B, A' et B' appartiennent à un même plan (celui engendré par les droites (OA) et (OB) d'après la première hypothèse), il s'ensuit que les droites (AB) et $(A'B')$, en général, s'intersectent. C'est ce cas général qui est imposé par la deuxième hypothèse (en bleu). Cette hypothèse évite le problème des cas spéciaux. Quel serait la conclusion si les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles et les points M et N existent ?

Démonstration. Les deux triangles engendrent deux plans dans l'espace affine. La preuve est facile si ces deux plans sont distincts. La difficulté apparaît quand les plans sont identiques. Noter que les plans ne peuvent pas être parallèles et distincts d'après la deuxième hypothèse.

Si les plans sont distincts, alors les points M, N et P appartiennent à ces deux plans en même temps, donc à leur droite d'intersection.

Si les plans coïncident, on propose quatre arguments qui utilisent, respectivement, une projection parallèle, le théorème de Ménélaos, les barycentres et le calcul vectoriel.

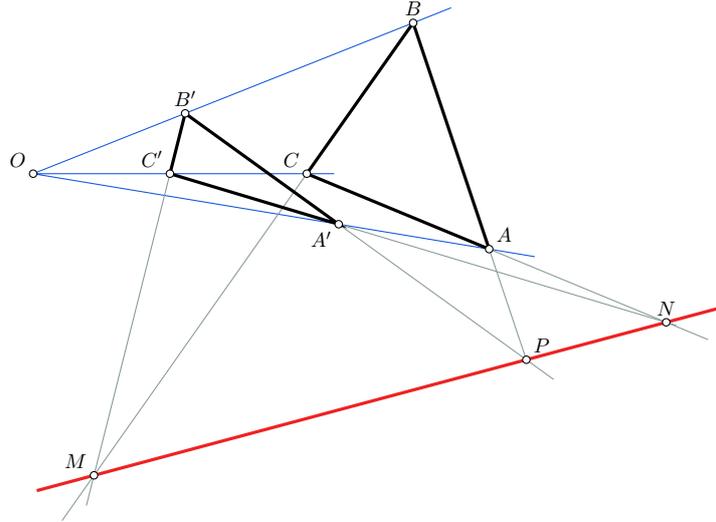


Figure 2: Le théorème de Desargues

PREMIER ARGUMENT. La figure 2 illustre la configuration du théorème dans un plan. On considère E un point qui ne se trouve pas dans le plan des triangles. Soit E' sur la droite (OE) tel que $(AE) \parallel (A'E')$. D'après la première partie, les points d'intersection

$$(EB) \cap (E'B') = \{P'\}, \quad (BC) \cap (B'C') = \{M\}, \quad (EC) \cap (E'C') = \{N'\}$$

sont alignés. On applique la projection sur le plan des triangles parallèle à la droite (AE) et il suffit de voir que P' est appliqué sur P et N' sur N .

DEUXIÈME ARGUMENT. On applique le théorème de Ménélaos successivement :

- au triangle $[OAB]$ et à la droite passant par A' , B' et P
- au triangle $[OBC]$ et à la droite passant par B' , C' et M
- au triangle $[OCA]$ et à la droite passant par C' , A' et N .

On obtient, en multipliant les relations algébriques ainsi obtenues, la réciproque du théorème de Ménélaos pour le triangle $[ABNC]$ et les points M , N et P qui montre que ces points sont alignés.

TROISIÈME ARGUMENT. On considère le repère affine (A, B, C) . Alors il existe α , β et γ réels tels que

$$O = \alpha A + \beta B + \gamma C \quad \text{et} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

En même temps, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} A' &= (1 - a)A + aO \\ B' &= (1 - b)B + bO \\ C' &= (1 - c)C + cO. \end{aligned}$$

Il reste à faire apparaître les trois points d'intersection M , N et P . Par exemple, pour M , il existe un unique μ tel que

$$\begin{aligned} M &= (1 - \mu)B' + \mu C' \\ &= (1 - \mu)((1 - b)B + bO) + \mu((1 - c)C + cO) \\ &= (1 - \mu)(1 - b)B + \mu(1 - c)C + ((1 - \mu)b + \mu c)(\alpha A + \beta B + \gamma C). \end{aligned}$$

Comme $M \in (BC)$, on en déduit que $(1 - \mu)b + \mu c = 0$. Donc

$$M = -\frac{(1 - b)c}{b - c} B + \frac{b(1 - c)}{b - c} C.$$

De la même manière, on a (par permutations circulaires)

$$N = -\frac{(1-c)a}{c-a}C + \frac{c(1-a)}{c-a}A \quad \text{et} \quad P = -\frac{(1-a)b}{a-b}A + \frac{a(1-b)}{a-b}B.$$

On vérifie qu'ils sont alignés.

QUATRIÈME ARGUMENT. Les hypothèses du théorème, exprimées en utilisant les points et les vecteurs, deviennent :

- Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que les vecteurs \overrightarrow{OA} et $\overrightarrow{OA'}$ satisfont la relation $\overrightarrow{OA'} = \alpha \overrightarrow{OA}$. De même, $\overrightarrow{OB'} = \beta \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC'} = \gamma \overrightarrow{OC}$.
- Il existe $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (1-\lambda')\overrightarrow{OA'} + \lambda'\overrightarrow{OB'}$. De même,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} &= (1-\nu)\overrightarrow{OA} + \nu\overrightarrow{OC} = (1-\nu')\overrightarrow{OA'} + \nu'\overrightarrow{OC'} \\ \overrightarrow{OM} &= (1-\mu)\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC} = (1-\mu')\overrightarrow{OB'} + \mu'\overrightarrow{OC'}. \end{aligned}$$

En utilisant le vecteur \overrightarrow{OP} , nous obtenons

$$\overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (1-\lambda')\overrightarrow{OA'} + \lambda'\overrightarrow{OB'} = (1-\lambda')\alpha\overrightarrow{OA} + \lambda'\beta\overrightarrow{OB}.$$

Donc

$$((1-\lambda) - (1-\lambda')\alpha)\overrightarrow{OA} + (\lambda - \lambda'\beta)\overrightarrow{OB} = \mathbf{0}.$$

Il s'ensuit (la diagonale du parallélogramme est nulle si et seulement si les côtés sont nuls) que

$$1-\lambda = (1-\lambda')\alpha \quad \text{et} \quad \lambda = \lambda'\beta.$$

En regardant ces deux relations comme un système en λ et λ' , nous arrivons à

$$\lambda = \frac{\beta - \alpha\beta}{\beta - \alpha} \quad \text{et} \quad \lambda' = \frac{1 - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Le même raisonnement pour \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{ON} implique

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\gamma - \beta\gamma}{\gamma - \beta} \quad \text{et} \quad \mu' = \frac{1 - \beta}{\gamma - \beta} \\ \nu &= \frac{\gamma - \alpha\gamma}{\gamma - \alpha} \quad \text{et} \quad \nu' = \frac{1 - \alpha}{\gamma - \alpha}. \end{aligned}$$

Pour finir la preuve, il faut comparer les vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{MP} . Nous avons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \\ &= (1-\nu)\overrightarrow{OA} + \nu\overrightarrow{OC} - (1-\mu)\overrightarrow{OB} - \mu\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{\alpha\gamma - \alpha}{\gamma - \alpha}\overrightarrow{OA} - \frac{\beta\gamma - \beta}{\gamma - \beta}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma - \alpha\gamma}{\gamma - \alpha}\overrightarrow{OC} - \frac{\gamma - \beta\gamma}{\gamma - \beta}\overrightarrow{OC} \\ &= (\gamma - 1)\left(\frac{\alpha}{\gamma - \alpha}\overrightarrow{OA} - \frac{\beta}{\gamma - \beta}\overrightarrow{OB} + \frac{(\beta - \alpha)\gamma}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}\overrightarrow{OC}\right), \end{aligned}$$

car

$$\frac{\gamma - \alpha\gamma}{\gamma - \alpha} - \frac{\gamma - \beta\gamma}{\gamma - \beta} = \frac{(\beta - \alpha)\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}.$$

En réorganisant les facteurs,

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\gamma - 1}{(\gamma - \alpha)(\beta - \gamma)} (\alpha(\beta - \gamma)\overrightarrow{OA} + \beta(\gamma - \alpha)\overrightarrow{OB} + \gamma(\alpha - \beta)\overrightarrow{OC}).$$

De la même façon,

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{\beta - 1}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)} (\alpha(\beta - \gamma) \overrightarrow{OA} + \beta(\gamma - \alpha) \overrightarrow{OB} + \gamma(\alpha - \beta) \overrightarrow{OC}).$$

Donc les points M , N et P sont alignés. \square

Théorème 3.2 (Pappus). *Si les points A_1, A_3 et A_5 sont alignés et les points A_2, A_4 et A_6 le sont aussi sur une autre droite, alors les points d'intersection des droites (A_1A_2) et (A_4A_5) , (A_2A_3) et (A_5A_6) , et (A_3A_4) et (A_6A_1) sont alignés.*

Démonstration. IL y a une preuve qui utilise le théorème de Ménélaos cinq fois et une fois de plus sous sa forme réciproque pour la conclusion.

On développe l'argument basé sur le calcul barycentrique car il demande de l'organisation pour qu'il reste raisonnable. On change les notations comme dans la figure 3 : les six points de

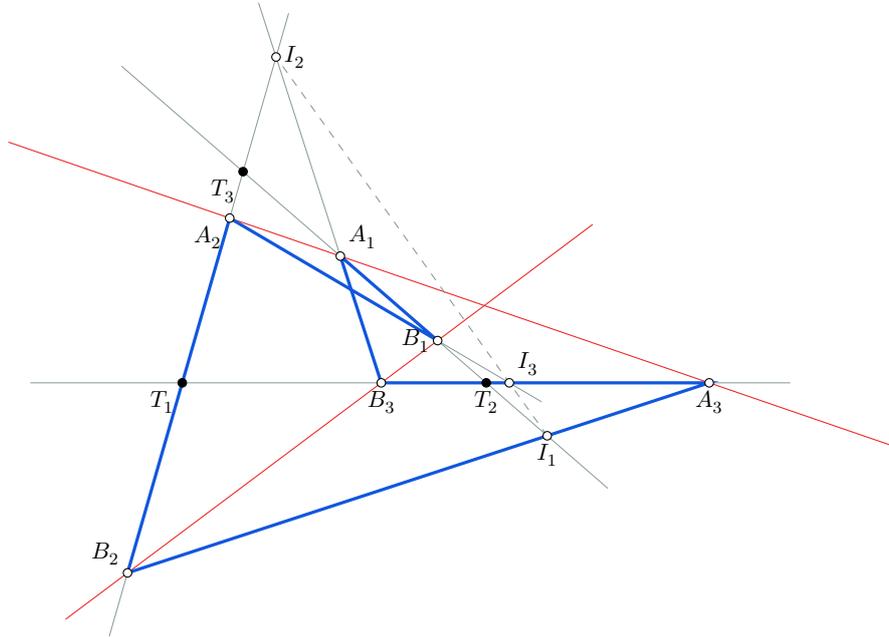


Figure 3: La configuration des neuf droites et neuf points (les A_j, B_j et I_j) du théorème de Pappus. L'hexagone de l'hypothèse est $[A_1B_1A_2B_2A_3B_3]$. Les trois points T_j , en noir, représente un choix "symétrique" pour le triangle auquel il faudrait appliquer le théorème de Ménélaos. ou pour une base affine.

l'hypothèse sont A_1, A_2 et A_3 , et B_1, B_2 et B_3 respectivement. On définit

$$\{I_j\} = (A_jB_j) \cap (B_{j+1}A_{j+2}).$$

On veut démontrer que les I_j sont alignés.

On considère la base affine formés par les T_j , $1 \leq j \leq 3$, les sommets du triangle dont les côtés se trouve sur les droites (A_jB_j) . On a $A_j, B_j \in (T_{j+1}T_{j+2})$.

On a

$$A_j = (1 - a_j)T_{j+1} + a_jT_{j+2} \quad \text{et} \quad B_j = (1 - b_j)T_{j+1} + b_jT_{j+2}.$$

Les réels a_1, a_2 et a_3 ne sont pas indépendants car les points A_j sont alignés. Donc

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 - a_1 & a_1 \\ a_2 & 0 & 1 - a_2 \\ 1 - a_3 & a_3 & 0 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 + (1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3). \quad (1)$$

De même pour les points B_j , c'est-à-dire

$$0 = b_1 b_2 b_3 + (1 - b_1)(1 - b_2)(1 - b_3). \quad (2)$$

Le point I_j se trouve sur les droites $(B_{j+1}A_{j+2})$ et $(T_{j+1}T_{j+2})$. On en déduit qu'il existe ν_j tel que

$$\begin{aligned} I_j &= (1 - \nu_j)B_{j+1} + \nu_j A_{j+2} \\ &= (1 - \nu_j)((1 - b_{j+1})T_{j+2} + b_{j+1}T_j) + \nu_j((1 - a_{j+2})T_j + a_{j+2}T_{j+1}) \\ &= ((1 - \nu_j)b_{j+1} + \nu_j(1 - a_{j+2}))T_j + \nu_j a_{j+2}T_{j+1} + (1 - \nu_j)(1 - b_{j+1})T_{j+2} \end{aligned}$$

avec

$$(1 - \nu_j)b_{j+1} + \nu_j(1 - a_{j+2}) = 0.$$

Alors

$$\nu_j = \frac{b_{j+1}}{a_{j+2} + b_{j+1} - 1} \quad \text{et} \quad 1 - \nu_j = \frac{a_{j+2} - 1}{a_{j+2} + b_{j+1} - 1}$$

et donc

$$I_j = \frac{a_{j+2}b_{j+1}}{a_{j+2} + b_{j+1} - 1}T_{j+1} + \frac{(a_{j+2} - 1)(1 - b_{j+1})}{a_{j+2} + b_{j+1} - 1}T_{j+2}.$$

On calcule le déterminant formé avec les coordonnées affines des points I_j ; on obtient, à une constante multiplicative près,

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 0 & a_3 b_2 & (a_3 - 1)(1 - b_2) \\ (a_1 - 1)(1 - b_3) & 0 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & (a_2 - 1)(1 - b_1) & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 + (a_1 - 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1)(1 - b_1)(1 - b_2)(1 - b_3) \\ &= a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 + a_1 a_2 a_3 (-b_1 b_2 b_3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour l'avant dernière égalité on a utilisé les identités (1) et (2). □

4. Convexité

Pour A et B deux points dans un espace affine, les combinaisons affines $(1 - \lambda)A + \lambda B$ décrivent (ou paramètre) la droite (AB) . Le segment $[AB]$ correspond aux combinaisons affines avec $\lambda \in [0, 1]$.

Définition 4.1. Un ensemble $X \subset \mathbb{A}^n$ est dit *convexe* si pour tous $A, B \in X$ le segment $[AB]$ est contenu dans X .

Par récurrence on montre que X est convexe si et seulement si pour tous $A_1, \dots, A_p \in X$ et pour tous $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_p \leq 1$ tels que $\sum_j \lambda_j = 1$, on a

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_p A_p \in X.$$

Théorème 4.2 (Lucas). *Soit P un polynôme de degré n à coefficients complexes. Alors les racines de P' sont contenues dans l'enveloppe convexe des racines de P .*

Démonstration. Si on suppose que les racines de P sont distinctes, alors

$$P(z) = (z - \omega_1)(z - \omega_2) \cdots (z - \omega_n)$$

et

$$P'(z) = \frac{P(z)}{z - \omega_1} + \frac{P(z)}{z - \omega_2} + \cdots + \frac{P(z)}{z - \omega_n},$$

c'est-à-dire

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - \omega_1} + \frac{1}{z - \omega_2} + \cdots + \frac{1}{z - \omega_n}.$$

Si ξ est une racine du polynôme dérivé, on obtient que

$$\frac{1}{\xi - \omega_1} + \frac{1}{\xi - \omega_2} + \cdots + \frac{1}{\xi - \omega_n} = 0.$$

En conjuguant et par la suite en multipliant chaque terme par $\xi - \omega_j$ au dénominateur et numérateur, on a

$$\frac{\xi - \omega_1}{|\xi - \omega_1|^2} + \frac{\xi - \omega_2}{|\xi - \omega_2|^2} + \cdots + \frac{\xi - \omega_n}{|\xi - \omega_n|^2} = 0.$$

On note $\lambda_j = \frac{1}{|\xi - \omega_j|^2} > 0$. La relation précédente peut s'écrire comme

$$\left(\sum_j \lambda_j \right) \xi = \sum_j \lambda_j \omega_j,$$

c'est-à-dire

$$\xi = \frac{\sum_j \lambda_j \omega_j}{\sum_k \lambda_k}.$$

Pour écrire l'argument dans le cas général, on évalue $P(z)\overline{P'(z)}$ en ξ . On arrive à

$$\begin{aligned} 0 &= P(\xi)\overline{P'(\xi)} \\ &= (\xi - \omega_1)|\xi - \omega_2|^2 \cdots |\xi - \omega_n|^2 + |\xi - \omega_1|^2(\xi - \omega_2) \cdots |\xi - \omega_n|^2 + \cdots \\ &\quad + |\xi - \omega_1|^2|\xi - \omega_2|^2 \cdots (\xi - \omega_n) \end{aligned}$$

□

5. Vers la théorie générale espaces et sous-espaces affines

Du point de vue géométrique, les courbes et les surfaces sont des sous-ensembles de points dans un espace constitué de "points". On est intéressé par des propriétés géométriques de ces objets, propriétés invariantes sous certaines transformations de l'espace (par exemple des translations, rotations, projections, ...).

Remarque. On pourrait voir l'espace des points comme un espace vectoriel. Mais ceci n'est pas entièrement satisfaisant — le vecteur nul joue un rôle spécial; on veut considérer des transformations qui ne sont pas vectoriels, par exemple les translations, etc.

Les propriétés géométriques d'un espace vectoriel sont définies par le groupe des applications linéaires bijectives (sont les propriétés invariantes par ce groupe). De même pour l'espace affine en utilisant le groupe des applications affines bijectives; les deux groupes sont "différents" et, par conséquent, les géométries sont différentes.

espace vectoriel	espace affine
vecteurs (forces)	points (particules)
combinaison linéaire de vecteurs	combinaison affine de points
sous-espace vectoriel	sous-espace affine
base	repère (cartésien ou affine)
système de coordonnées	système de coordonnées (cartésiennes ou barycentriques)
application linéaire	application affine

Définition. Soient \mathcal{E} un ensemble et E un espace vectoriel et soit $+$: $\mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}$ une application. Le triplet $(\mathcal{E}, E, +)$ est un *espace affine* si “+” vérifie les conditions suivantes :

- (A1) $P + \vec{0} = P$ pour tout $P \in \mathcal{E}$
(A2) $P + (\vec{u} + \vec{v}) = (P + \vec{u}) + \vec{v}$ pour tout $P \in \mathcal{E}$ et pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$
(A3) pour tous $P, Q \in \mathcal{E}$ il existe un unique $\vec{v} \in E$, noté \overrightarrow{PQ} , tel que $P + \vec{v} = Q$.

Remarque. Pour $A \in \mathcal{E}$, on considère les applications $E \rightarrow \mathcal{E}$ et $\mathcal{E} \rightarrow E$ définies par $\vec{v} \mapsto A + \vec{v}$ et $P \mapsto \overrightarrow{AP}$ respectivement. Elles sont inverses l’une l’autre (en particulier bijectives). Donc, pour $A \in \mathcal{E}$, on identifie \mathcal{E} avec E , c’est-à-dire on considère \mathcal{E} comme un espace vectoriel en prenant A comme l’origine de \mathcal{E} . On utilisera la notation $T\mathcal{E}_A$.

L’autre point de vue, équivalent à la définition : \mathcal{E} est muni d’une structure d’espace affine par la donnée de l’espace vectoriel E et de l’application $\Theta : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$,

$$(A, B) \mapsto \Theta(A, B) \stackrel{\text{not.}}{=} \overrightarrow{AB},$$

qui vérifie les conditions suivantes :

- (A’1) pour tout $A \in \mathcal{E}$, l’application $\Theta_A : \mathcal{E} \rightarrow E$, $\Theta_A(B) = \overrightarrow{AB}$ est une bijection
(A’2) pour tous $A, B, C \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (la relation de Chasles).
En caractéristique $\neq 2$, les deux propriétés entraînent $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ pour tout $A \in \mathcal{E}$.

Exemple. Tout espace vectoriel E a une structure canonique d’espace affine. On pose $\mathcal{E} = E$ et on définit l’action par la somme habituelle des vecteurs. Explicitement, on prend $(E, E, +)$.

Exemple. Dans \mathbb{K}^{n+1} avec le système de coordonnées naturel (x_1, \dots, x_{n+1}) , on considère le sous-ensemble $\mathcal{E} = \{x_{n+1} = 1\}$, le sous-espace vectoriel $E = \{x_{n+1} = 0\}$ et l’action “+” définie par la somme habituelle des vecteurs de \mathbb{K}^{n+1} .

Définition. Un sous-ensemble non vide $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ est un *sous-espace affine* s’il existe $S \subset E$ un sous-espace vectoriel tel que

- l’image de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ par l’action “+” est contenue dans \mathcal{S} , c’est-à-dire $+(\mathcal{S} \times \mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$, et
- $(\mathcal{S}, \mathcal{S}, +)$ est un espace affine.

L’équivalence doit être faite avec les affirmations suivantes :

- (1) Le sous-ensemble $S = \{Q - P \mid P, Q \in \mathcal{S}\} \subset E$ est un sous-espace vectoriel.
- (2) Pour tous $P_0, \dots, P_n \in \mathcal{S}$ et pour tous $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_j \lambda_j = 1$, le barycentre $\sum_j \lambda_j P_j \in \mathcal{S}$.

Proposition-Définition 5.1. Soit \mathcal{E} un espace affine et soient $P_1, P_2, \dots, P_m \in \mathcal{E}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_j \lambda_j = 1$, alors la fonction $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par

$$A \mapsto A + \sum_{j=1}^m \lambda_j \overrightarrow{AP_j}$$

est constante. L'unique point image est appelé le barycentre de la famille de points pondérés $(P_1, \lambda_1), \dots, (P_m, \lambda_m)$.

Démonstration. On a, pour $B \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} B + \sum_j \lambda_j \overrightarrow{BP_j} &= B + \sum_j \lambda_j (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP_j}) \\ &= B + \sum_j \lambda_j \overrightarrow{BA} + \sum_j \lambda_j \overrightarrow{AP_j} \\ &= B + \overrightarrow{BA} + \sum_j \lambda_j \overrightarrow{AP_j} \\ &= A + \sum_j \lambda_j \overrightarrow{AP_j}. \end{aligned}$$

□

Le fait que la définition d'un sous-espace affine est équivalente à (1) est évident. Il est aussi évident qu'elle implique (2). Il reste à démontrer que (2) implique (1).

Soit $S = \{Q - P \mid P, Q \in \mathcal{S}\} \subset E$. Si $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \in S$, c'est-à-dire $A, B \in \mathcal{S}$, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, d'après (2),

$$P_\lambda = (1 - \lambda)A + \lambda B \in \mathcal{S}.$$

Donc

$$S \ni P_\lambda - A = \overrightarrow{AP_\lambda} = \lambda(B - A) = \lambda \vec{v},$$

c'est-à-dire S est stable pour la multiplication par des scalaires. Pour voir que S est stable pour l'addition, soient $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{PQ}$ deux vecteurs de S . Alors, d'après (2), on a, successivement,

$$A + \overrightarrow{PQ} = C = A + (P - Q) \in \mathcal{S}$$

et

$$D = C + (B - A) = C + \overrightarrow{AB} = (A + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{AB} = A + (\vec{v} + \vec{w}) \in \mathcal{S}.$$

Donc $\vec{v} + \vec{w} \in S$.

Remarque. La définition du barycentre d'un système de points pondérés dépend de la condition $\sum_j \lambda_j = 1$. Si cette somme est nulle, alors l'expression

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_m P_m$$

définit un vecteur de E . Plus précisément, le vecteur défini par la combinaison linéaire

$$\lambda_1 \overrightarrow{AP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{AP_2} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{AP_m}$$

est indépendant du point A .

L'interprétation géométrique du barycentre et du vecteur définis par les expressions $\sum_j \lambda_j P_j$ est obtenue en considérant l'exemple de l'espace affine $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ défini par l'équation $x_{n+1} = 1$ dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+1} muni de la base canonique. Évidemment l'espace vectoriel associé

s'identifie avec le sous-espace vectoriel $H = \{x_{n+1} = 0\}$. Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathcal{H}$, alors l'élément

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m$$

appartient à \mathcal{H} si et seulement si $\sum_j \lambda_j = 1$; de plus, il appartient à H si et seulement si $\sum_j \lambda_j = 0$.

6. Indépendance affine. Repères affines et systèmes de coordonnées barycentriques

Soit \mathcal{E} un espace affine. Les points P_1, \dots, P_d sont dits affinement indépendants si les vecteurs $\overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_d}$ sont linéairement indépendants. (Il faut montrer que le choix de P_1 comme point de référence n'est pas significatif.)

Définition. Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension n . Les $n+1$ points A_0, \dots, A_n forment un *repère affine* si les points sont affinement indépendants.

Si (A_0, \dots, A_n) est un repère affine, alors $(\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n})$ est une base de E . Le couple $(A_0, (\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}))$ est appelé *repère affine d'origine A_0* . Il est noté aussi comme $n+1$ -uplet $(A_0; \overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n})$. On a les systèmes de coordonnées suivants avec des formules de passages dans les deux sens :

repère affine	\longleftrightarrow	coordonnées barycentriques
repère affine à origine fixée ou repère cartésien	\longleftrightarrow	coordonnées affines ou cartésiennes

Proposition 6.1. Soit \mathcal{E} un espace affine de direction E et soient (A_0, \dots, A_n) un système de coordonnées barycentriques. Si P_0, \dots, P_d sont $d+1$ points tels que, pour tout $0 \leq k \leq d$,

$$P_k = x_{k,0} A_0 + x_{k,1} A_1 + \dots + x_{k,n} A_n \quad \text{avec} \quad x_{k,0} + x_{k,1} + \dots + x_{k,n} = 1,$$

alors

$$\dim(\langle P_0, \dots, P_d \rangle) = \text{rank} \begin{pmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \dots & x_{0,n} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{d,0} & x_{d,1} & \dots & x_{d,n} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = \langle P_0, \dots, P_d \rangle$. La direction de \mathcal{F} est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{P_0 P_k}$, c'est-à-dire

$$F = \text{Vect}(\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_d}).$$

Comme

$$\begin{aligned}
P_k &= x_{k,0}A_0 + x_{k,1}A_1 + \cdots + x_{k,n}A_n \\
&= A_0 + \sum_{i=1}^n x_{k,i} \overrightarrow{A_0A_i} \\
&= P_0 + \overrightarrow{P_0A_0} + \sum_{i=1}^n x_{k,i} \overrightarrow{A_0A_i} \\
&= P_0 + \sum_{i=1}^n (x_{k,i} - x_{0,i}) \overrightarrow{A_0A_i},
\end{aligned}$$

on en déduit que $\overrightarrow{P_0P_k} = \sum_{i=1}^n (x_{k,i} - x_{0,i}) \overrightarrow{A_0A_i}$. Alors,

$$\dim(F) = \text{rank} \begin{pmatrix} x_{1,1} - x_{0,1} & \cdots & x_{1,n} - x_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{d,1} - x_{0,1} & \cdots & x_{d,n} - x_{0,n} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & x_{0,1} & \cdots & x_{0,n} \\ 0 & x_{1,1} - x_{0,1} & \cdots & x_{1,n} - x_{0,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_{d,1} - x_{0,1} & \cdots & x_{d,n} - x_{0,n} \end{pmatrix}$$

et, en utilisant $\sum_{i=0}^n x_{k,i} = 1$, on obtient le résultat. \square

7. Applications affines

Définition. Soient (\mathcal{E}, E) et (\mathcal{F}, F) deux espaces affines. Une application $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est dite application affine s'il existe $D\varphi : E \rightarrow F$ une application \mathbb{K} -linéaire, telle que le diagramme commute.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E} \times E & \xrightarrow{+} & \mathcal{E} \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
\mathcal{F} \times F & \xrightarrow{+} & \mathcal{F}
\end{array}$$

Remarque. Une application affine est une application qui coïncide, en chaque point du domaine de définition, avec son développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$\varphi(P) = \varphi(P_0) + D\varphi(\overrightarrow{P_0P}).$$

Proposition 7.1. $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application affine si et seulement si φ commute avec la construction des barycentres.

Démonstration. Si φ est une application affine, alors pour tous $P_0, \dots, P_n \in \mathcal{E}$ et pour tous

$\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ avec $\sum_j \lambda_j = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\sum_{j=0}^n \lambda_j P_j\right) &= \varphi\left(P_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j (P_j - P_0)\right) \\
&= \varphi(P_0) + D\varphi\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \overrightarrow{P_0 P_j}\right) \\
&= \varphi(P_0) + \sum_{j=1}^n \lambda_j D\varphi(\overrightarrow{P_0 P_j}) \\
&= \varphi(P_0) + \sum_{j=1}^n \lambda_j (\varphi(P_j) - \varphi(P_0)) \\
&= \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi(P_j).
\end{aligned}$$

Réciproquement, on définit $\vec{\varphi} : E \rightarrow E$ par $\vec{\varphi}(\overrightarrow{PQ}) = \varphi(Q) - \varphi(P)$. Il faut démontrer que $\vec{\varphi}$ est bien définie et qu'elle est \mathbb{K} -linéaire.

- Soient A, B, P, Q tels que $\vec{v} = B - A = Q - P$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= \varphi(A + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{PQ}) = \varphi(B + P - Q) = \varphi(B) + \varphi(P) - \varphi(Q) \\
&= \varphi(A) + \vec{\varphi}(\overrightarrow{AB}) - \vec{\varphi}(\overrightarrow{PQ}).
\end{aligned}$$

Donc $\vec{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \vec{\varphi}(\overrightarrow{PQ})$.

- Soit $A_\lambda = O + \lambda \vec{u} = (1 - \lambda)O + \lambda A$. Alors

$$\begin{aligned}
\vec{\varphi}(\lambda \vec{u}) &= \varphi(A_\lambda) - \varphi(O) = \varphi((1 - \lambda)O + \lambda A) - \varphi(O) \\
&= (1 - \lambda)\varphi(O) + \lambda\varphi(A) - \varphi(O) = \lambda(\varphi(A) - \varphi(O)) \\
&= \lambda \vec{\varphi}(\vec{u}).
\end{aligned}$$

- Le même argument pour l'addition que celui utilisé pour l'équivalence des définitions du sous-espace affine.

On pose $D\varphi = \vec{\varphi}$. □

On a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow GA(\mathcal{E}) \longrightarrow GL(E) \longrightarrow 1,$$

où l'épimorphisme est défini par le choix d'un point de l'espace affine, qui, en fixant un repère cartésien, induit le diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & GA(\mathcal{E}) & \longrightarrow & GL(E) \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & GA(n, \mathbb{K}) & \longrightarrow & GL(n, \mathbb{K}) \longrightarrow 1
\end{array}$$