Géométrie analytique dans le plan et l'espace

Sommaire

Introduction

Problème de minimum. Dans le plan, on considère un cercle $\mathcal{C}$ et une parabole Γ n'ayant aucun point en commun. Trouver un segment de longueur minimale s'appuyant sur les deux courbes.

On peut considérer un cas explicite : $\mathcal{C}$ décrit par l'équation $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ et Γ par $x=-y^2$.

Aires. Dans le plan euclidien on considère le triangle $[ABC]$. On note par M, N et P les points appartenant aux côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, respectivement, tels que

$$\frac{AP}{PB}=\frac{BM}{MC}=\frac{CN}{NA}=\frac{p}{q},$$

où $p,q\in\mathbb{N}^*$. Si $\{E\}=(BN)\cap(CP)$, $\{F\}=(CP)\cap(AM)$ et $\{G\}=(AM)\cap(BN)$, calculer le rapport entre l'aire du triangle $[EFG]$ et celle du triangle initial $[ABC]$.

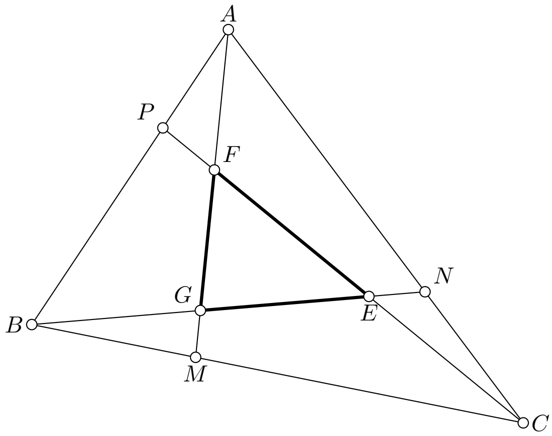


Figure 1: La représentation graphique du cas $p=1$ et $q=2$.

Étude de trajectoires. On considère une table de billard parfaite (sur laquelle la bille se déplace sans frottement et les réflexions sur les murs se font avec des angles égaux) de forme rectangulaire. En lançant une bille, nous voulons comprendre le comportement de sa trajectoire en fonction de point initial et de la direction du vecteur vitesse : est-elle périodique, ou “remplira”-t-elle toute la table ? On pourrait aussi considérer une table de forme circulaire !

1. Le plan affine

1.1. Systèmes de coordonnées cartésiennes du plan

Par définition, tout élément de $\mathbb{R}^2$ est un couple de nombres réels, c'est-à-dire

$$\mathbb{R}^2=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}.$$

Dans ce cours, nous considérons le *plan affine réel* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ muni d'un repère Oxy —O est l'origine et x et y les deux coordonnées. Le plan affine muni d'un repère s'identifie à $\mathbb{R}^2$:

- O s'identifie à $(0,0)$
- l'axe des coordonnées x à $\mathbb{R}\times\{0\}$
- l'axe des coordonnées y à $\{0\}\times\mathbb{R}$

Un élément de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ est appelé un point est sera noté $P = (a, b)$. En général, les points seront désignés par des lettres majuscules (A, B, P, etc.) ; les droites par des lettres majuscules calligraphiques ($\mathcal{D}$ ou encore $\mathcal{L}$, ou bien par (AB) —la droite passant par les points A et B) ; le segment ayant pour extrémités les points A et B sera noté $[AB]$; le triangle dont les sommets sont A, B et C sera noté $[ABC]$, et ainsi de suite.

Si $P = (a, b)$, alors on appelle a et b les deux coordonnées du point P. Il y a trois points distingués dans notre identification, $O = (0, 0)$, $X = (1, 0)$ et $Y = (0, 1)$. En général trois points non alignés définissent un repère, ou un système de coordonnées. Ici, les points O, X et Y définissent le système de coordonnées dans lequel le point P a les coordonnées a et b.

Les points $X = (1, 0)$ et $Y = (0, 1)$ déterminent "l'unité" le long des droites (OX) et (OY) respectivement. En notant x et y les coordonnées le long de ces droites, nous écrirons

$$(OX) = \{(x, y) \mid y = 0\} \quad \text{et} \quad (OY) = \{(x, y) \mid x = 0\}.$$

Par la suite, quand il n'y aura pas de confusion possible, nous utiliserons la notation abrégée $(OX) = \{y = 0\}$ (et $(OY) = \{x = 0\}$). Nous utiliserons aussi la notation usuelle Oxy pour le repère (O, X, Y) qui met en évidence l'origine O et le système (naturel ou canonique) de coordonnées (x, y). Dans ce système de coordonnée, si $P = (a, b)$, nous écrirons $x(P) = a$ ou $x_P = a$ et $y(P) = b$ ou $y_P = b$.

Définition 1.1. Une droite dans le plan affine muni du repère Oxy est un sous-ensemble $\mathcal{D}$ pour lequel il existe trois réels α, β et γ tels que

1) $\mathcal{D} = \{P \mid \alpha\, x_P + \beta\, y_P + \gamma = 0\}$
2) α et β ne sont pas simultanément nuls.

On dit que $\mathcal{D}$ est la droite d'équation (cartésienne) $\alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0$.

Deux aspects sont à approfondir dans cette définition. D'abord, les trois constantes α, β et γ ne sont pas uniques ; toutes les équations $\lambda\alpha\, x + \lambda\beta\, y + \lambda\gamma = 0$ avec $\lambda \neq 0$ définissent la même droite. Puis, la définition dépend du repère choisi Oxy. Le premier aspect sera discuté par la suite ; nous reviendrons sur le deuxième dans certains exercices et à la fin du cours.

Définition 1.2. Deux droites distinctes sont dites parallèles si elles n'ont aucun point commun. On dit que les droites ne s'intersectent pas.

Lemme 1.3. *Deux droites $\mathcal{D} : \alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0$, et $\mathcal{D}' : \alpha'\, x + \beta'\, y + \gamma' = 0$ sont parallèles si et seulement si $\alpha\beta' = \alpha'\beta$.*

Démonstration. De manière générale, deux sous-ensembles X et Y (d'un certain ensemble) ont un élément en commun signifie, par définition, $X \cap Y \neq \varnothing$. Par exemple pour deux courbes dans le plan affine, avoir un point en commun revient à dire qu'il existe un point dont les coordonnées satisfont les équations choisies pour décrire les courbes. Explicitement, pour étudier les points communs des deux courbes, nous devons étudier le système formé avec leurs équations.

Pour établir l'implication $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Longrightarrow \alpha\beta' = \alpha'\beta$, nous supposons $\alpha\beta' \neq \alpha'\beta$ et montrons que le système

$$\begin{cases} \alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0 \\ \alpha'\, x + \beta'\, y + \gamma' = 0 \end{cases}$$

admet la solution $x_0 = -\frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$, $y_0 = -\frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$.

Pour l'autre implication, nous supposons par l'absurde l'existence d'un point commun $P = (x_0, y_0)$. Comme $\alpha\beta' = \alpha'\beta$, en supposant (on peut le faire, voire la définition 1.2) $\alpha \neq 0$, on a

$$\beta' = \frac{\alpha'}{\alpha}\, \beta.$$

Alors, ou bien $\beta = \beta' = 0$ et $\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\alpha' x_0}{\alpha x_0} = \frac{\alpha'}{\alpha}$, ou bien $\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha'}{\alpha}$ et $= \frac{\gamma'}{\gamma}$ en utilisant P_0. Donc les droites sont identiques. □

Le lemme dont une interprétation équivalente du parallélisme, celle utile dans les calculs. Elle est “presque” équivalente à la condition $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$ qui exprime mieux la proportionnalité des coefficients de x et de y des deux droites. Il faut noter que sous cette forme, l'égalité n'a pas toujours de sens (par exemple si $\beta' = 0$)

Proposition 1.4 (v$^{\text{e}}$ postulat d'Euclide[1])**.** *Soit $\mathcal{D}$ une droite et P un point tel que $P \notin \mathcal{D}$. Alors il existe une unique droite passant par P et parallèle à $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Soit $\alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0$ une équation de $\mathcal{D}$ et soit $P = (a, b)$. On pose $\mathcal{D}'$: $\alpha\,(x - a) + \beta\,(y - b) = 0$. La droite $\mathcal{D}'$ est parallèle à $\mathcal{D}$ et passe par P. Pour finir, on vérifie l'unicité. □

Dans la preuve précédente, toutes les droites d'équation $\alpha\, x + \beta\, y + \gamma' = 0$, avec $\gamma' \in \mathbb{R}$, sont parallèles à $\mathcal{D}$. Cet ensemble de droites est appelé **le faisceau des droites** parallèles à $\mathcal{D}$.

Proposition 1.5 (I$^{\text{er}}$ postulat d'Euclide)**.** *Si $A \neq B$, alors il existe une unique droite (AB) (c'est-à-dire une droite passant par A et B) et elle admet pour équation*[2]

$$(y_B - y_A)\, x - (x_B - x_A)\, y + \big(- (y_B - y_A)\, x_A + (x_B - x_A)\, y_A \big) = 0.$$

Corollaire 1.6. *Les points deux à deux distincts A, B et C sont alignés si, et seulement si,*

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (y_B - y_A)(x_C - x_A).$$

Remarque 1.7. Trois points non alignés et ordonnés dans le plan, Ω, S et T, forment un repère noté (Ω, S, T). En notant par s et t les coordonnées le long des axes (ΩS) et (ΩT) respectivement, le repère est noté aussi Ωst —comme Oxy pour le repère naturel de $\mathbb{R}^2$ (*cf.* figure 2).

Pour trouver les coordonnées s_P et t_P d'un point P, on considère les droites passant par P et parallèles à (ΩT) et (ΩS) respectivement ; elles intersectent (ΩS) en A et (ΩT) en B. L'abscisse s_P du point P dans le système de coordonnées (s, t) est obtenue comme suit : notons a le réel positif ou nul tel que $\Omega A = a\, \Omega S$ —on mesure des segments le long d'une droite pour

[1] Euclide a été actif vers 300 av. J. C. à Alexandrie.

[2] La forme $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$ est peut-être plus facile à retenir, même si elle n'est pas toujours bien définie.

laquelle ΩS représente l'unité. Alors $s_P = a$ si A et S sont du même côté par rapport à Ω, et $s_P = -a$ sinon.

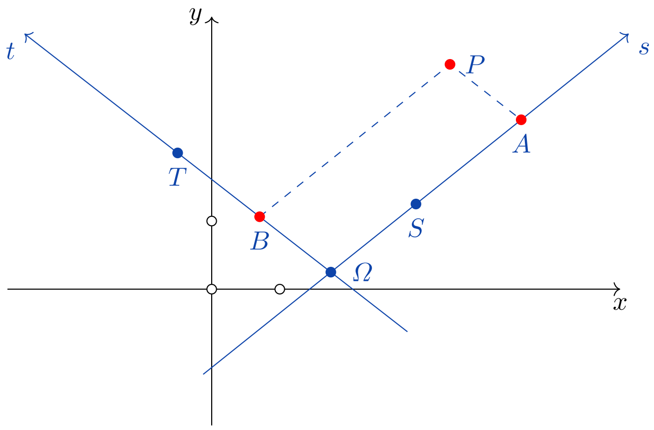


Figure 2: Deux repères du plan affine

1.2. Équations cartésiennes et paramétriques d'une droite

En général, une droite peut être décrite de plusieurs façons équivalentes. On a vu qu'une droite admet une infinité d'équations. On peut obtenir une écriture unique en posant

$$\mathcal{D} : y = px + q.$$

La droite $\mathcal{D}$ décrite ci-dessus est la droite qui coupe l'axe des y en $(0, q)$ et dont la pente est p : si (x, y) est un point de $\mathcal{D}$, alors l'ordonnée du point de $\mathcal{D}$ ayant pour abscisse $x + 1$ est $y + p$ —à une augmentation d'une unité pour la coordonnée x correspond une augmentation de p unités pour la coordonnée y.

Cette description d'une droite est bien unique, car on a défini p et q par des propriétés géométriques de la droite. **Le problème est que cette description ne convient pas à toutes les droites du plan.** Les droites verticales (de même direction que l'axe des y) sont décrites par des équations du type $x = c$.

On peut décrire aussi une droite $\mathcal{D}$ de manière dynamique, en fonction d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.8. *Étant donnés deux points distincts A et B, la droite (AB) est décrite par une représentation paramétrique*

$$\begin{cases} x = (x_B - x_A)\,t + x_A \\ y = (y_B - y_A)\,t + y_A, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Réciproquement, toute représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \alpha\, t + a \\ y = \beta\, t + b, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec α et β non simultanément nuls, décrit une droite passant par le point de coordonnées (a, b).

Démonstration. Pour la première partie, notons d'abord que les coefficients $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ ne sont pas simultanément nuls —les points A et B sont distincts. Posons $t = \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}$ dans l'équation de $\mathcal{D}$ vue dans la proposition 1.5. Réciproquement, comme α et β ne sont pas tous deux nuls, éliminons t dans la représentation paramétrique. $\square$

La présentation paramétrique (1.1) de la droite $\mathcal{D}$ n'est pas unique ; elle dépend, au moins, du choix initial des deux points A et B.

Faisceau des droites parallèles.. Pour α et β fixés non simultanément nuls, on a introduit le faisceau $\mathcal{D}_\lambda : \alpha\, x + \beta\, y + \lambda = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. En équations paramétriques...

Vecteur directeur.. Si $x = at + x_0, y = bt + y_0$ est une paramétrisation de la droite $\mathcal{D}$ avec $t \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{D}$ est la droite passant par $P_0 = (x_0, y_0)$ de *vecteur directeur* $\boldsymbol{v} = (a, b)$. **Dans cette écriture $\boldsymbol{v}$ est un élément de $\mathbb{R}^2$ —on ne fait pas l'identification de $\mathbb{R}^2$ avec le plan affine ! On a un vecteur et non pas un point.** La liaison entre le plan affine et les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est la suivante. Un vecteur $\boldsymbol{v}$ est la donnée d'une paire ordonnée de points (A, B) dans le plan, l'origine et l'extrémité de $\boldsymbol{v}$, c'est-à-dire d'une flèche issue de A et d'extrémité B ; on a

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A).$$

- à partir du repère (O, X, Y) on forme deux vecteurs particuliers, $\boldsymbol{e}_x := \overrightarrow{OX} = (1, 0)$ et $\boldsymbol{e}_y = \overrightarrow{OY} = (0, 1)$.
- Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux ou identiques si les quatre points A, B, C et D vérifient l'égalité suivante,

$$(x_B - x_A, y_B - y_A) = (x_D - x_C, y_D - y_C),$$

  ce qui revient à dire que, composante par composante, $x_B - x_A = x_D - x_C$ et $y_B - y_A = y_D - y_C$. Géométriquement, les quatre points forment un parallélogramme $[ABDC]$, avec $[AB]$ et $[CD]$ deux côtés parallèles.
- Tout vecteur peut être représenté par une flèche issue d'un point quelconque du plan.
- Dans le système canonique de coordonnées, tout vecteur a un représentant distingué : la flèche issue de l'origine et ayant la pointe en un certain point P. Dans ce cas $\boldsymbol{v} = (x_P, y_P)$, où x_P et y_P sont les coordonnées du point P. De cette façon, après avoir fixé une origine dans le plan, c'est-à-dire après avoir choisi un point O, on obtient une correspondance bijective entre les points du plan et les vecteurs : à tout point correspond un unique vecteur, et à tout vecteur correspond un unique point.
- L'ensemble des vecteurs $\mathbb{R}^2$ est muni naturellement de deux opérations algébriques : la multiplication d'un vecteur par un nombre réel et l'addition de deux vecteurs. En particulier, $\boldsymbol{v} = (a, b) = a\,\boldsymbol{e}_x + b\,\boldsymbol{e}_y$. De plus, pour A, B et C dans $\mathbb{A}^2$, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles[3]).
- On dit que deux vecteurs $\boldsymbol{v} = (a, b)$ et $\boldsymbol{w} = (c, d)$ sont colinéaires s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{w}$ ou $\boldsymbol{w} = k\boldsymbol{v}$. De manière équivalente, cela se ramène à la relation $ad - bc = 0$.
- **L'addition de deux points de $\mathbb{A}^2$ n'existe pas.** En revanche, on peut donner un sens à l'addition d'un point et d'un vecteur. Si $P \in \mathbb{A}^2$ est un point du plan et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur, alors $Q = P + \boldsymbol{v}$ est le point du plan représentant l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{v}$ vu comme flèche issue de P, c'est-à-dire $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{v}$. En coordonnées, si $\boldsymbol{v} = (a, b)$, on a

$$(x_Q, y_Q) = Q = P + \boldsymbol{v} = (x_P, y_P) + (a, b) = (x_P + a, y_P + b).$$

[3]Michel Chasles, Épernon 1793 –Paris 1880

Proposition 1.9. *Si $\mathcal{D} : \alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0$, alors $(-\beta, \alpha)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Réciproquement, si $\boldsymbol{v} = (a, b)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D} : -b\, x + a\, y + c = 0$.*

définition	**équation cartésienne (ou implicite)**	**paramétrisation**
$\mathcal{D}_{P_0,\boldsymbol{v}}$ est la droite passant par $P_0 = (x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\boldsymbol{v} = (a, b)$	$-bx + ay + (bx_0 - ay_0) = 0$ ou $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$	$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$ ou $(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b),\ t \in \mathbb{R}$

Table 1: La droite passant par P_0 de vecteur directeur $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$.

Remarque 1.10 (Paramétrisation d'un segment)**.** Soient A et B deux points du plan affine. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ permet d'écrire une paramétrisation du segment $[AB]$ en l'interprétant comme "vecteur vitesse". L'identité

$$P_t = A + t\,\overrightarrow{AB}$$

pour $t \in [0, 1]$ décrit les points P_t du segment $[AB]$. En coordonnées on obtient

$$x_t = (1 - t)x_A + tx_B \quad \text{et} \quad y_t = (1 - t)y_A + ty_B.$$

Définition. Pour A, B, C trois points sur une droite $\mathcal{D}$ tels que $A \neq B$, on appelle rapport algébrique $\overline{AC}/\overline{AB}$ la constante k définie par $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.

Théorème 1.11 (Thalès)**.** *Soit $[ABC]$ un triangle et soit $\mathcal{D}$ une droite qui coupe les droites (AB) et (AC) en B' et C', respectivement. Alors $\mathcal{D} \parallel (BC)$ si et seulement si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$.*

Démonstration. . . . □

2. Produit scalaire et distance dans le plan

2.1. Le produit scalaire et la distance

La distance entre les points P et Q, notée PQ, est par définition la longueur du segment $[PQ]$. La notation $d(P, Q)$ souligne le fait que d est une distance sur $\mathbb{A}^2$, c'est-à-dire une fonction $d : \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2 \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés énumérées dans le lemme 2.3 ci-dessous. Puisque la distance entre deux points se trouvant sur un axe de coordonnées s'exprime en utilisant l'unité de mesure le long de cet axe, la distance PQ s'exprime à l'aide de la formule de Pythagore,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}.$$

Le plan affine muni de la distance d introduite ci-dessus devient le *plan euclidien*, noté $\mathbb{E}^2$; cette distance nous permet de "comparer" des segments, de calculer des aires, ou encore d'introduire la notion de perpendicularité. On dit que deux segments $[AB]$ et $[AC]$ sont perpendiculaires —l'angle $\widehat{BAC}$ est droit —si le triangle $[ABC]$ vérifie la formule de Pythagore,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

De manière générale, la *mesure* de l'angle formé par les segments $[AB]$ et $[AC]$ est introduite en termes de longueur : si $C' \in (AB)$ est tel que l'angle $\widehat{AC'C}$ est droit, alors

$$AC' = \pm AC\,\cos(\widehat{BAC}).$$

Le signe est $+$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ pointent dans la même direction et $-$ sinon. La relation précédente, pour des raisons de symétrie, peut s'écrire comme

$$AB\,AC\,\cos(\widehat{BAC}) = \pm AB\,AC'.$$

Voir la figure 3.

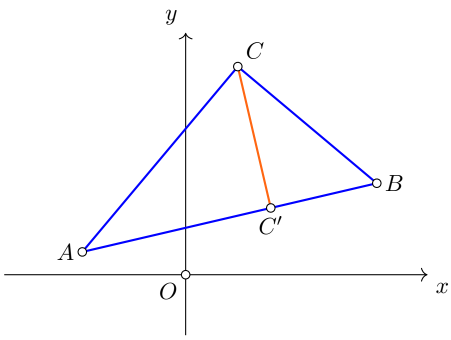


Figure 3: Le triangle $[ABC]$ est rectangle en C et $C' \in [AB]$ tel que la droite (CC') est perpendiculaire à (AB) ; les triangles $[ABC]$ et $[ACC']$ sont semblables.

Dans le lemme suivant on interprète cette égalité en utilisant les coordonnées des points.

Lemme 2.1. $AB\,AC\,\cos(\widehat{BAC}) = (x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A)$.

Démonstration. Comme le membre de droite est invarié par les translations, on peut supposer que A est l'origine du système de coordonnées cartésiennes On veut donc démontrer la relation

$$OB\,OC\,\cos(\widehat{BOC}) = x_B x_C + y_B y_C.$$

Par la suite, pour la clarté, on suppose que le triangle $[BOC]$ est aigu en O. On a vu lors la discussion précédente que si C' est la projection de C sur la droite (OB), alors

$$OB\,OC\,\cos(\widehat{BOC}) = OB\,OC'.$$

Mais le point C' est tel que le triangle $[OC'C]$ est rectangle en C'. Soit P un point quelconque appartenant à la demi droite $[OB)$. On a

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OB} \quad \text{avec} \quad \lambda \geq 0.$$

On cherche le scalaire $\lambda_0 \geq 0$ tel que $P = C'$. Une condition nécessaire pour trouver λ_0 est

$$OC^2 = OP^2 + PC^2$$

c'est-à-dire
$$x_C^2 + y_C^2 = \lambda^2(x_B^2 + y_B^2) + (x_C - \lambda x_B)^2 + (y_C - \lambda y_B)^2.$$
On obtient
$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{x_B x_C + y_B y_C}{x_B^2 + y_B^2} =: \lambda_0.$$
On conclut
$$OB\,OC\,\cos(\widehat{BOC}) = OB\,OC' = OB\,\lambda_0\,OB = (x_B^2 + y_B^2)\,\frac{x_B x_C + y_B y_C}{x_B^2 + y_B^2} = x_B x_C + y_B y_C.$$
□

La formule pour le cosinus de l'angle engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ établie dans le lemme précédent, suggère la définition suivante :

Définition 2.2. Quels que soient deux vecteurs $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \mathbb{R}^2$, le produit scalaire de $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)$ et $\boldsymbol{v}' = (\alpha', \beta')$ est le nombre réel
$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \rangle = \big\langle (\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \big\rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta'.$$

En prenant $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP}$ et $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{OQ}$ des vecteurs non nuls, on trouve
$$PQ = d(P, Q) = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle} = \sqrt{\langle \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v} \rangle}$$
et
$$\cos(\widehat{POQ}) = \frac{\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \rangle}{OP\ OQ} = \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle}{\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|}$$
où $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$.

Une conséquence immédiate est l'inégalité de Cauchy-Schwarz[4] dans $\mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire canonique:
$$\text{pour tous} \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{on a} \quad \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \leq \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\| \quad \text{avec égalité ssi} \quad \boldsymbol{w} = k\boldsymbol{v} \quad \text{avec} \quad k \geq 0. \tag{2.1}$$
(Dans la dernière partie on suppose $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$.) En utilsant cette inégalité, on obtient le lemme suivant.

Lemme 2.3. *La distance euclidienne $d(P, Q)$ vérifie les propriétés suivantes.*
- *La positivité, c'est-à-dire que pour tous points P et Q dans le plan $\mathbb{A}^2$, $d(P, Q) \geq 0$, avec égalité si et seulement si, $P = Q$.*
- *La symétrie, c'est-à-dire que pour tous points P et Q dans le plan $\mathbb{A}^2$, $d(P, Q) = d(Q, P)$.*

[4] Cette inégalité est aussi appellée l'inégalité de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, car A.-L. Cauchy en 1821, V. Bunyakovsky en 1859 et A. H. Schwarz en 1888 ont démontré les inégalités
$$\begin{aligned}
&\big(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\big)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2), && \forall\, a_j, b_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n \\
&\left(\int_a^b f(t) g(t)\, dt\right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2 dt \int_a^b g(t)^2 dt && \forall\, f, g \in \mathcal{C}([a, b]) \\
&\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \leq \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\| && \forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in (E, \langle , \rangle)
\end{aligned}$$
respectivement.

- *L'inégalité triangulaire, c'est-à-dire que pour tous points P, Q et R dans le plan $\mathbb{A}^2$,*

$$d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R), \tag{2.2}$$

avec égalité si et seulement si, les trois points sont alignés de telle sorte que Q se trouve entre P et R.

Démonstration. La positivité et la symétrie sont évidentes. Nous traduisons l'inégalité du triangle en utilisant des vecteurs : si $\boldsymbol{v} = (a, b) = \overrightarrow{QP}$ et $\boldsymbol{w} = (c, d) = \overrightarrow{QR}$, alors

$$\begin{aligned}
&d(P, Q) = d(Q, P) = \sqrt{\langle \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QP} \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2} \\
&d(Q, R) = \sqrt{c^2 + d^2} \\
&d(P, R) = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \rangle} = \sqrt{\langle -\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, -\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \rangle} = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}.
\end{aligned}$$

L'inégalité (2.2) devient

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}.$$

Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, en élevant au carré, nous obtenons l'inégalité équivalente

$$(a^2 + b^2) + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} + (c^2 + d^2) \geq (c - a)^2 + (d - b)^2,$$

ou encore

$$\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} \geq -ac - bd.$$

Ceci est l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (2.1). L'inégalité (2.2) est une égalité si, et seulement si, les vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ vérifient $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$, ou $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{w}$ pour un $\lambda \leq 0$. Cette condition de proportionnalité des vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ est équivalente à la condition d'alignement des trois points P, Q et R, avec le point Q placé entre les points P et R. □

Remarque. En coordonnées, l'inégalité (2.1) devient

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}.$$

On peut la vérifier directement. Si le membre de gauche est strictement négatif, alors cette inégalité est toujours vérifiée strictement. S'il est positif ou nul, nous élevons au carré les deux membres pour arriver à l'inégalité équivalente

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Or,

$$\begin{aligned}
(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) \\
&= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = (ad - bc)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

2.2. La perpendicularité

D'après le lemme 2.1, les droites (AB) et (AC) forment un angle droit (sont perpendiculaires) si et seulement si, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$. On introduit la notion suivante :

Définition 2.4. Deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^2$ sont dits *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul, soit encore

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0.$$

Ainsi deux droites sont perpendiculaires si et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, ou un vecteur est orthogonal à une droite si et seulement si, le vecteur est orthogonal à un vecteur directeur de la droite.

Théorème 2.5 (Théorème de Pythagore généralisé)**.** *Les longueurs des côtés du triangle* $[ABC]$ *vérifient*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\, AB\, AC\, \cos(\widehat{BAC}).$$

Démonstration. En utilisant le point de vue de la preuve du lemme 2.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} BC^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \\ &= \big((x_C - x_A) - (x_B - x_A)\big)^2 + \big((y_C - y_A) - (y_B - y_A)\big)^2 \\ &= (x_C - x_A)^2 - 2\,(x_C - x_A)(x_B - x_A) + (x_B - x_A)^2 \\ &\quad + (y_C - y_A)^2 - 2\,(y_C - y_A)(y_B - y_A) + (y_B - y_A)^2 \\ &= AC^2 + AB^2 - 2\,\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.6. *Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$. Alors le vecteur $\boldsymbol{n} = (a, b)$ est un vecteur orthogonal à $\mathcal{D}$. (On dira que $\boldsymbol{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.)*

Démonstration. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est le vecteur $\boldsymbol{v} = (b, -a)$. Alors

$$\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle = ab + b(-a) = 0.$$

□

Définition. La distance d'un point P_0 à une droite $\mathcal{D}$ est la plus petite des distances entre P_0 et $P \in \mathcal{D}$. On la note $d(P_0, \mathcal{D})$.

Proposition 2.7 (Distance d'un point à une droite)**.** *Soit $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ une droite et soit P_0 un point de coordonnées (x_0, y_0). Alors,*

$$d(P_0, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

et cette distance est atteinte par l'unique point $Q \in \mathcal{D}$ tel que les droites $\mathcal{D}$ et (P_0Q) sont perpendiculaires : $P_0Q = d(P_0, \mathcal{D})$.

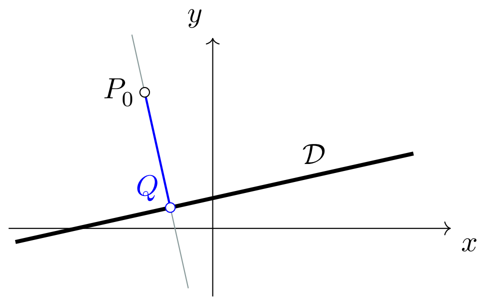


Figure 4: Les droites $\mathcal{D}$ et (P_0Q) sont perpendiculaires. Par exemple, dans la figure, la distance de $P_0 = (-1, 2)$ à $\mathcal{D} : 2\,x-9\,y+4 = 0$, c'est-à-dire P_0Q, est obtenue en calculant $\frac{|2\cdot(-1)-9\cdot 2+4|}{\sqrt{2^2+9^2}} = \frac{16}{\sqrt{85}}$.

Démonstration. L'idée de la preuve du lemme 2.1 peut être adaptée pour obtenir ce résultat par un argument d'optimisation. En utilisant la formule de Pythagore, on voit que la distance minimale est atteinte en $Q \in \mathcal{D}$ pour lequel la droite (P_0Q) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$. On écrit l'équation de (P_0Q), la droite qui passe par P_0 et dirigée par le vecteur $\boldsymbol{v} = (a, b)$

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Les coordonnées de Q, l'intersection de $\mathcal{D}$ et de (P_0Q), sont la solution de

$$\begin{cases} ax + by = -c & \text{(équation pour } \mathcal{D}\text{)} \\ bx - ay = bx_0 - ay_0. & \text{(équation pour } (P_0Q)\text{)} \end{cases}$$

On obtient

$$x_Q = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad y_Q = \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2},$$

Donc,

$$\begin{aligned} P_0Q^2 &= (x_Q - x_0)^2 + (y_Q - y_0)^2 \\ &= \left(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2} - y_0\right)^2 \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2}[(-a^2x_0 - aby_0 - ac)^2 + (-abx_0 - b^2y_0 - bc)^2] \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2}[a^2(ax_0 + by_0 + c)^2 + b^2(ax_0 + by_0 + c)^2] \\ &= \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

□

2.3. Le cercle

Définition. Le cercle de centre A et rayon $r > 0$, est l'ensemble des points du plan euclidien situés à la distance r de A. On le note $\mathcal{C}_{A,r}$.

Lemme 2.8. *Si* $A = (a, b)$, *alors* $\mathcal{C}_{A,r} = \{P = (x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$.

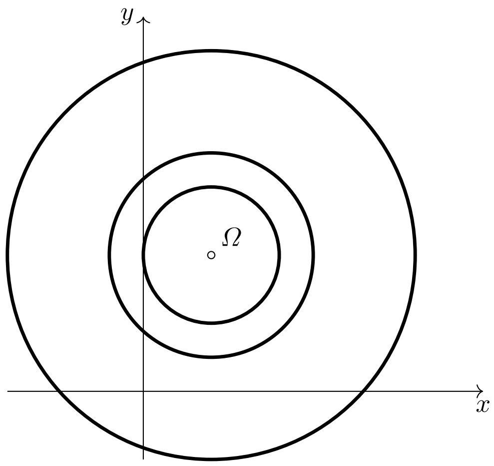


Figure 5: Plusieurs cercles décrits par l'équation $x^2 + y^2 + 2x + 4y + \gamma = 0$, avec $\gamma \in \{-14, -29/4, -6\}$. Leurs centre est le point $\Omega = (2, 1)$.

Proposition 2.9. *Étant donné les nombres réels α, β, γ, l'ensemble des points qui vérifient l'équation*

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

est

i) *le cercle $\mathcal{C}_{\Omega,\rho}$ avec $\Omega = (-\alpha/2, -\beta/2)$ et $\rho = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$ si $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma > 0$;*

ii) *le point $\Omega = (-\alpha/2, -\beta/2$ si $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma = 0$;*

iii) *vide si $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma < 0$.*

Démonstration. Il suffit, dans l'expression ci-dessus, de grouper des carrés en x et en y :

$$0 = x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma.$$

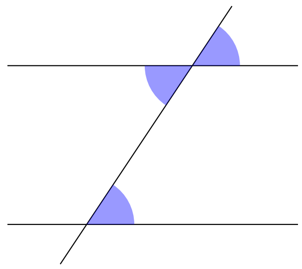
□

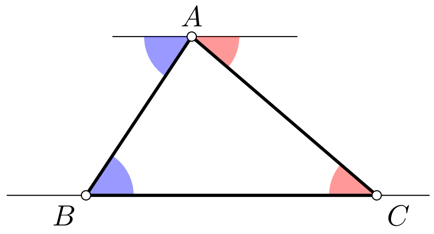
Lemme 2.10. *Soit $\mathcal{C}$ un cercle et $[AB]$ une corde, c'est-à-dire $A, B \in \mathcal{C}$. Si Ω est le centre de $\mathcal{C}$, alors le triangle $[\Omega AB]$ est isocèle.*

Ce lemme est trivial car $[\Omega A]$ et $[\Omega B]$ sont des rayons. Il s'ensuit l'égalité (ou la congruence) entre les angles $\widehat{\Omega AB}$ et $\widehat{AB\Omega}$. Dans la suite, *un angle sera toujours déterminé par un point et deux demi droites issues de ce point, ou, de manière équivalente, un point et deux vecteurs.* Nous ne distinguerons pas entre un angle et sa mesure. C'est là un abus de langage qui simplifiera l'exposé et, nous espérons, ne jettera pas de confusion. La configuration **point** + 2 **vecteurs** fait apparaître deux "angles" dont la somme vaut 2π ou 360°. L'angle introduit ci-dessus est toujours le plus petit des deux.

Théorème 2.11. *Dans le plan euclidien, la somme des angles d'un triangle est égale à π.*

Démonstration. On utilise la proposition 1.4 et les dessins ci-dessus.





□

Corollaire 2.12. *Quatre points sont cocycliques si et seulement si, dans le quadrilatère qu'ils forment la somme des angles opposés est* π*.*

Démonstration. Soient A, B et C trois des points et soit $\mathcal{C}$ l'unique cercle circonscrit au triangle $[ABC]$. Nous supposons d'abord que $D \in \mathcal{C}$ et que nous avons la configuration de la figure 6. La somme des angles du quadrilatère vérifie

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 2\pi.$$

En utilisant les triangles isocèles $[A\Omega B]$, $[B\Omega C]$, $[C\Omega D]$ et $[D\Omega A]$, voir le lemme 2.10, on a, par exemple,

$$2\pi = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 2(\widehat{DA\Omega} + \widehat{\Omega AB} + \widehat{BC\Omega} + \widehat{\Omega CD} = \widehat{A} + \widehat{C}.$$

La réciproque découle facilement en considérant le cercle par trois des points, disons A, B et C. Alors il intersecte la droite (CD) en C et en encore un point D'. Mais, comme les points A, B, C et D' sont cocycliques, $\widehat{B} + \widehat{D'} = \pi = \widehat{B} + \widehat{D}$ par hypothèse. Donc $D = D'$. □

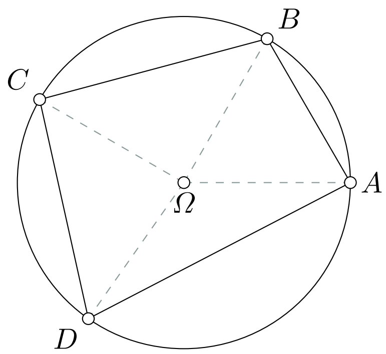


Figure 6: Quatre point cocycliques

2.4. L'intersection d'une droite avec un cercle

On considère le cercle $\mathcal{C}_{O,r}$, avec $r > 0$ et une droite quelconque $\mathcal{D}$. Nous voulons décrire la position de la droite par rapport au cercle.

On suppose que $\mathcal{D}$ n'est pas verticale dans le système de coordonnées cartésiennes choisi, Oxy. Soit $B = (0, b)$ le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'axe des y. Pour faire l'étude, nous utiliserons une description paramétrique de la droite $\mathcal{D}$. Si $\boldsymbol{u} = (\alpha, \beta)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, nous avons

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x = \alpha t,\ y = b + \beta t,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Nous pouvons supposer que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, c'est-à-dire que la norme de $\boldsymbol{u}$ vaut 1. Étudier la position de $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{B,\boldsymbol{u}}$ par rapport au cercle est équivalent à déterminer les solutions du système (non linéaire)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x = \alpha t \\ y = b + \beta t. \end{cases}$$

En substituant x et y dans la première égalité, nous obtenons

$$(\alpha t)^2 + (b + \beta t)^2 = r^2$$

c'est-à-dire

$$t^2 + 2\beta b\, t + (b^2 - r^2) = 0.$$

Le discriminant de cette équation de degré 2 en t vérifie

$$\Delta/4 = \beta^2 b^2 - (b^2 - r^2).$$

On conclut que $\mathcal{D}$ coupe le cercle $\mathcal{C}_{O,r}$

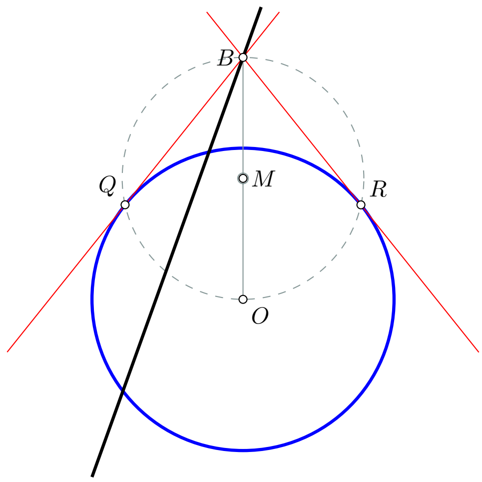


Figure 7: Droites passant par B et cercle de centre O ; la droite noire coupe le cercle en deux points distincts. Les droites rouges le coupent chacune avec multiplicité 2 —elles sont tangentes au cercle. Sur la figure sont marqués aussi le centre M du segment $[OB]$ ainsi que le cercle (en pointillé) de centre M et diamètre $[OB]$. Remarquer que les points de tangence Q et R se trouvent sur ce cercle.

- en deux points distincts si $|b| < r$, ou si $|b| \geq r$ et $\beta^2 b^2 - (b^2 - r^2) > 0$ (géométriquement ceci veut dire qu'on a deux points d'intersection distincts si, ou bien le point B est à l'intérieur du cercle, ou bien il est sur le cercle ou à l'extérieur et le vecteur unitaire directeur de la droite satisfait une condition numérique)
- en un unique point (avec multiplicité 2) si $|b| \geq r$ et $\beta^2 b^2 - (b^2 - r^2) = 0$
- en aucun point si $\beta^2 b^2 - (b^2 - r^2) < 0$.

Remarque 2.13. D'abord il faut noter que $\beta^2 b^2 - (b^2 - r^2) < 0$ implique $|b| \geq r$. Par la suite, il faut clarifier l'expression “en un unique point avec multiplicité 2”. Soit $\mathcal{C}$ une courbe dans le plan décrite par une équation $f(x, y) = 0$. Soit $B = (a, b)$ un point appartenant à $\mathcal{C}$ et soit $\mathcal{D}$ une droite passant par B. On étudie la position de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{C}$ dans un voisinage de B. Pour ce faire, nous considérons une paramétrisation de la droite, ($x = a+\alpha t$ et $y = b+\beta t$) telle que B corresponde au paramètre $t = 0$. La résolution du système qui contrôle l'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{C}$ nous amène à l'équation en t

$$\varphi(t) := f(a + \alpha t, b + \beta t) = 0.$$

Comme $\varphi(0) = 0$, le développement de Taylor de φ en 0 est de la forme $\varphi(t) = ct^m + \cdots$. La *multiplicité d'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{C}$ dans le voisinage de B* est l'entier m.

Définition 2.14. Doit $\mathcal{C}$ une courbe et $P \in \mathcal{C}$. Une droite $\mathcal{D} \ni P$ est dite *droite tangente à $\mathcal{C}$ en P* si la multiplicité d'intersection $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{C}$ dans le voisinage de P est ≥ 2.

Exemple 2.15. La droite tangente à un cercle $\mathcal{C}_{\Omega,r}$ en $P \in \mathcal{C}$ est la droite passant par P et perpendiculaire au “rayon” (ΩP).

2.5. Les éléments d'Euclide. Le plan euclidien

Euclide a donné une présentation axiomatique des mathématiques (connues à son époque dans la civilisation hellénique). Il a commencé par fixer 25 définitions, 5 postulats et 5 notions communes, les fondations de son système. Cet ensemble axiomatique lui a permis de démontrer les propositions des 13 volumes des “Éléments”. Les 5 postulats sont les suivants :

I. Par deux points distincts on peut *tracer* un unique segment de droite les joignant.
II. Un segment de droite peut *être prolongé* indéfiniment des deux côtés.
III. En tout point et pour tout nombre strictement positif, on peut *construire* un cercle centré sur le point et de rayon le nombre.
IV. Deux angles droits sont égaux (coïncident).
V. Par un point extérieur à une droite on peut *tracer* une unique droite parallèle à celle-ci.

Les quatre premiers postulats imposent certaines caractéristiques au plan euclidien : les II^{e} et III^{e} impliquent que le plan est infini et qu'il ne contient pas “de trou” ; le IV^{e} que le plan est homogène et isotrope (c'est-à-dire le même en tout point et dans toute direction) et le I^{er} fixe la nature des droites. Enfin, le V^{e} tient une place spéciale et impose une unicité concernant les parallèles.

Le plan affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ avec la distance canonique induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (voir la définition 2.2) fournit un modèle[5] du plan euclidien ; il sera appelé le *plan euclidien* et sera noté $\mathbb{E}^2$ par la suite.

Remarque 2.16. Notre modèle du plan euclidien est construit sur $\mathbb{R}^2$. Nous savons que $\mathbb{R}^2$ peut être vu comme l'ensemble des nombres complexes en posant $z = x+iy$; cette identification nous permet d'utiliser les nombres complexes dans les raisonnements géométriques. Pour un point $P = (a, b)$ dans le plan muni du repère Oxy, on appelle affixe de P le nombre complexe $z + P = a + ib$.

[5] Un modèle est une construction qui vérifie les cinq postulats. Une géométrie différente peut être obtenue en considérant la sphère (dans l'espace euclidien usuel) et en définissant les droites comme étant les grands cercles. La distance entre deux points est la distance mesurée sur la sphère. Quels seront les postulats d'Euclide non vérifiés par cette géométrie ?

2.6. Faisceaux de cercles

Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles de centres $\Omega_1 \neq \Omega_2$. On veut étudier le faisceau des cercles déterminé par Γ_1 et Γ_2 —la famille de “cercles” dont les équations sont des combinaisons linéaires des équations de Γ_1 et Γ_2. Explicitement, si $\Omega_j = (a_j, b_j)$ et si $r_j > 0$ est le rayon de Γ_j, alors chaque courbe de la famille est définie par une équation du type

$$\lambda_1[(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2] + \lambda_2[(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2] = 0$$

pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ non simultanément nuls.

Premier cas. Les deux cercles se coupent en deux points distincts, E et F. Alors la droite (EF) est perpendiculaire à $(\Omega_1\Omega_2)$ et tout autre cercle du faisceau passe par E et F. En particulier, le centre d'un tel cercle appartient à $(\Omega_1\Omega_2)$. La droite (EF) est un des cercles de la famille (un cercle de rayon infini). Elle est obtenue pour $\lambda_1 = -\lambda_2$ et est appelée *l'axe radical* de Ω_1 et Ω_2.

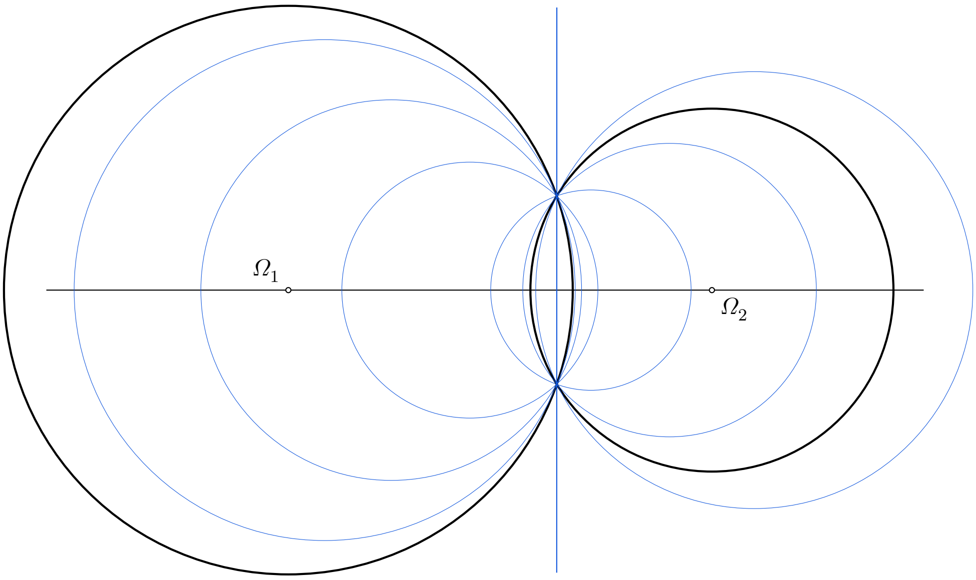


Figure 8: Faisceau de cercles passant par deux points ; tous les cercles du faisceau sont réels.

Deuxième cas. Les deux cercles ne se coupent pas. Alors, quels que soient deux éléments Γ et Γ' du faisceau, Γ et Γ' n'ont aucun point en commun.

Comme dans le premier cas, dans ce faisceau il y a une unique droite Δ, l'axe radical des deux cercles, qui est perpendiculaire à (Ω_1, Ω_2). De plus, la famille contient exactement deux cercles dégénérés, c'est-à-dire deux points A et B. La droite Δ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Remarque. Dans ce cas, le faisceau contient une infinité de cercles imaginaires.

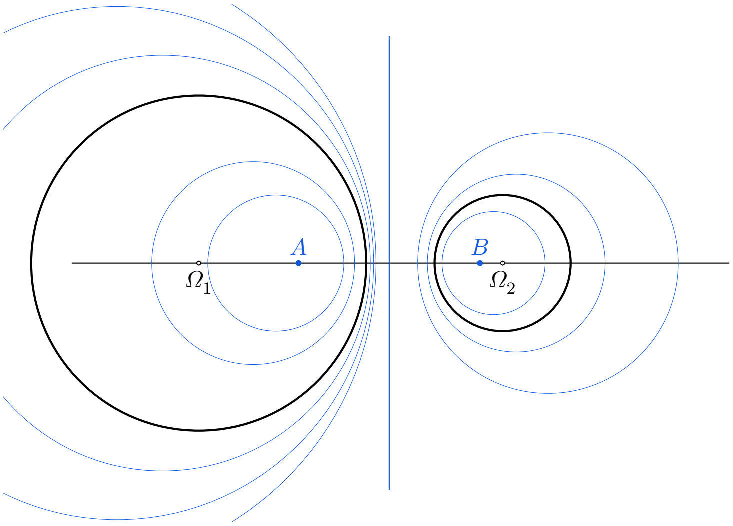


Figure 9: Faisceau de deux cercles qui ne se coupent pas ; les deux points A et B sont les deux cercles dégénérés du faisceau. Une infinité des cercles du faisceau sont imaginaires. Pour un point P (quelconque) de l'axe radical du faisceau, sa puissance par rapport à tout cercle du faisceau est la même.

3. Vers le Déterminant d'une matrice 2×2

3.1. Aires d'un parallélogramme et d'un triangle

Comme application de la proposition 2.7 nous calculons l'aire d'un parallélogramme en fonction des coordonnées de ses sommets.

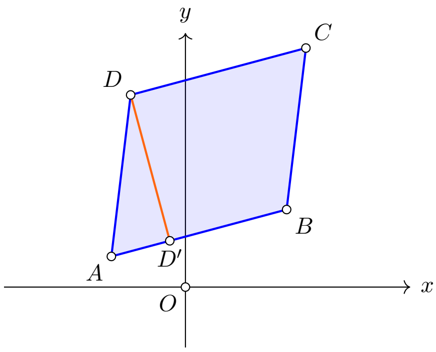


Figure 10: L'aire du parallélogramme $[ABCD]$ est donnée par le produit $AB \cdot DD'$, où les droites (DD') et (AB) sont perpendiculaires.

Proposition 3.1. *Soient A, B, C et D les sommets d'un parallélogramme. Alors l'aire du parallélogramme $[ABCD]$ est égale à*

$$\sigma([ABCD]) = |(x_B - x_A)(y_D - y_A) - (x_D - x_A)(y_B - y_A)|.$$

Démonstration. Comme

$$\sigma([ABCD]) = AB\ d(D, (AB)),$$

et, d'après la proposition 1.5,

$$(AB) : (y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + \big(- (y_B - y_A)x_A + (x_B - x_A)y_A\big) = 0,$$

on obtient, en utilisant la proposition 2.7,

$$d(D,(AB)) = \frac{|(y_B - y_A)x_D - (x_B - x_A)y_D + \big(- (y_B - y_A)x_A + (x_B - x_A)y_A\big)|}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}}.$$

Donc

$$\sigma([ABCD]) = |(x_D - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_D - y_A)|.$$

□

Si $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)$ et $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{w} = (\gamma, \delta)$, la formule de la proposition précédente devient

$$\sigma(\square_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}}) = |\alpha\delta - \beta\gamma| \tag{3.1}$$

où l'on désigne par $\square_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}}$ le parallélogramme engendré par les vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$. On remarque que les points A, B et D sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ sont *liés* —leurs coordonnées sont proportionnelles —, c'est-à-dire si et seulement si,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0,$$

ce qui correspond au fait que l'aire du parallélogramme $\square_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}}$ est nulle.

Remarque 3.2. La quantité $\alpha\delta - \beta\gamma$ associée aux vecteurs $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)$ et $\boldsymbol{w} = (\gamma, \delta)$ sera appelée le *déterminant des vecteurs* $\boldsymbol{v}$ *et* $\boldsymbol{w}$ (dans le système de coordonnées choisi). On verra plus loin que c'est la notion centrale de nos études géométriques dans le plan et dans l'espace. (Voir aussi la remarque 3.6.)

Corollaire 3.3. *Soient A, B et C trois points dans le plan. Alors*

$$\sigma([ABC]) = \frac{1}{2}\,|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|.$$

Exemple 3.4. Soient A, B et C trois points distincts. Le lieu géométrique des points M du plan tels que $\sigma([ABC]) = \sigma([ABM])$ est la réunion de deux droites : la droite $\mathcal{D}$ parallèle à (AB) et passant par C et la droite symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à (AB).

Nous voulons justifier cette affirmation. Pour simplifier les notations, nous supposons que le point A est l'origine du système de coordonnées. Maintenant, si M est un point quelconque de coordonnées (x, y) qui satisfait à la propriété $\sigma([ABC]) = \sigma([ABM])$, alors

$$\frac{1}{2}\,|x_B\, y_C - y_B\, x_C| = \sigma([ABC]) = \sigma([ABM]) = \frac{1}{2}\,|x_B\, y - y_B\, x|.$$

Par conséquent, M satisfait, ou bien à l'équation

$$x_B\, y_C - y_B\, x_C = -(x_B\, y - y_B\, x),$$

ou bien à l'équation

$$x_B\, y_C - y_B\, x_C = x_B\, y - y_B\, x.$$

Nous arrivons à l'ensemble formé par les deux droites parallèles

$$\mathcal{D} : y_B\, x - x_B\, y - (y_B\, x_C - x_B\, y_C) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : y_B\, x - x_B\, y + (y_B\, x_C - x_B\, y_C) = 0.$$

3.2. Intersection de droites et systèmes d'équations à deux inconnues

Lors de la démonstration de la formule pour la distance d'un point P_0 à une droite $\mathcal{D}$ (voir la Proposition 2.7), nous avons utilisé la construction d'un point (le point Q) comme intersection de deux droites, à savoir la droite $\mathcal{D}$ et la droite passant par P_0 et perpendiculaire à $\mathcal{D}$. En général, l'étude de la position relative de deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dans le plan est équivalente à l'étude du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

formé avec une équation de chacune des droites. Tout point de coordonnées (x^*, y^*) satisfaisant les deux équations du système appartient nécessairement à chacune des droites décrites par $(*)$. Pour résoudre le système, multiplions la première équation par b_2 et la deuxième par $-b_1$. En les additionnant, nous obtenons la relation

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x^* = b_1c_2 - b_2c_1.$$

On conclut que la solution du système est unique et donnée par

$$x^* = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{et} \quad y^* = \frac{-a_1c_2 + a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

si et seulement si, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Les positions relatives de deux droites dans le plan affine sont caractérisées dans le tableau suivant. On peut remarquer la relation forte entre la configuration géométrique des deux droites et le comportement algébrique du système formé par les équations qui définissent ces deux droites.

géométrie	**algèbre**	**calcul**
les deux droites se coupent	le système $(*)$ admet une solution unique	$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ (vecteurs normaux non liés)
les deux droites sont parallèles (distinctes)	le système $(*)$ n'admet aucune solution	$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (vecteurs normaux liés) et équations non proportionnelles
les deux droites sont confondues	le système $(*)$ admet une infinité de solutions	équations proportionnelles

Remarque 3.5. Si les deux équations d'un système sont proportionnelles, le système admet une infinité de solutions. L'ensemble de ces solutions est la droite elle-même, c'est-à-dire $\{(x, -\frac{a}{b}\,x - \frac{c}{b}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ si, par exemple, $b \neq 0$. Dans cette expression, x paramètre les points de la droite.

En résumé, résoudre un système linéaire à deux inconnues est équivalent à décrire la position relative de deux droites dans le plan. Dans ce qui suit nous introduisons le déterminant de deux vecteurs et présentons quelques applications basées sur l'intersection des droites.

Remarque 3.6 (Définition)**.** L'existence d'une solution unique pour le système $(*)$ est contrôlée par l'expression $a_1b_2 - a_2b_1$. Celle-ci dépend des coefficients de x et y dans les deux équations, c'est-à-dire des vecteurs normaux $\boldsymbol{u}_1 = (a_1, b_1)$ et $\boldsymbol{u}_2 = (a_2, b_2)$ aux deux droites. On introduit les notations

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(M) = \det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

et l'on appelle M la *matrice* formée par les vecteurs $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ (ou les éléments $a_1, \ldots, b_2$) et $\det(M)$ le *déterminant* de M, ou le déterminant des vecteurs $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$.

Situations rencontrées précédemment qui font intervenir le déterminant :

- *L'aire du parallélogramme $\square_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}}$ est calculée par la formule $|\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|$.*
- La solution du système $(*)$, si elle existe et qu'elle est unique, est donnée par[6]

$$x^* = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y^* = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

- Une équation de la droite passant par $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ peut s'écrire comme

$$\begin{vmatrix} x - x_B & y - y_B \\ x_A - x_B & y_A - y_B \end{vmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

Proposition 3.7. *Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle.*

Démonstration. On choisit le système des coordonnées tel que les sommets du triangle $[ABC]$ deviennent $B = (0, 0)$, $C = (c, 0)$ et $A = (a, \alpha)$, où $\alpha \neq 0$ car le triangle est supposé non aplati.

La hauteur issue de A intersecte (BC) en $A' = (a, 0)$. La hauteur issue de B est la droite passant par l'origine (c'est-à-dire B) et de vecteur normal $\overrightarrow{CA} = (a - c, \alpha)$. On obtient, si B' est son point d'intersection avec (AC),

$$(BB') : (a - c)x + \alpha y = 0.$$

Le point H d'intersection de (AA') et (BB') est $H = (a, -\frac{a(a-c)}{\alpha})$. Il suffit de vérifier que $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont perpendiculaires. □

Théorème 3.8 (Ceva[7]). *Soit $[ABC]$ un triangle et soient $P \in [BC]$, $Q \in [AC]$ et $R \in [AB]$ trois points distincts de A, B et C. Alors les trois droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes si, et seulement si,*

$$\frac{AR}{BR} \frac{BP}{CP} \frac{CQ}{AQ} = 1.$$

Démonstration. Si les droites sont concourantes en J, alors

$$\frac{\sigma(AJB)}{\sigma(AJC)} = \frac{\sigma(APB) - \sigma(JPB)}{\sigma(APC) - \sigma(JPC)} = \frac{BP}{CP}.$$

[6] Ces expressions sont appelées "formule de Cramer". Elles sont valables dans un cadre plus général, à savoir d'un système linéaire carré de n équations et n inconnues.

[7] Giovanni Ceva, Milan 1647 –Mantoue 1734

Le résultat s'ensuit en obtenant des égalités analogues pour les deux autres quotients de la formule. Dans l'autre sens, on utilise l'implication précédente en considérant la droite passant par C et le point d'intersection des droites (AP) et (BQ). □

Corollaire 3.9. *Les bissectrices (resp. médianes) d'un triangle sont concourantes.*

Démonstration. Pour les bissectrices il faut d'abord démontrer que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, où (AD) est la bissectrice de $\widehat{A}$, avec $D \in [BC]$. Nous considérons $(BP) \parallel (AD)$, avec $P \in (AC)$ et nous appliquons Thalès en remarquant que $AB = AP$. (Voir la figure 11.) □

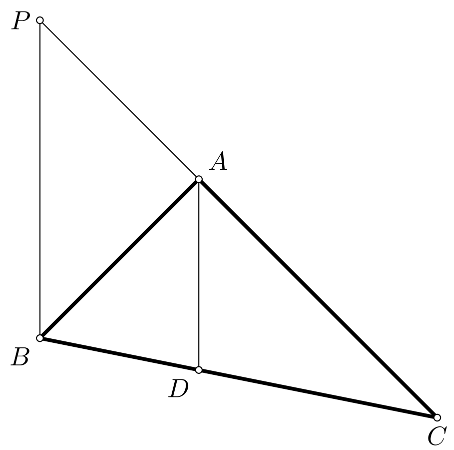


Figure 11: Construction utilisée dans la preuve de l'affirmation concernant les bissectrices dans un triangle. Les droites (AD) et $BP)$ sont parallèles.

4. Géométrie dans l'espace affine et l'espace euclidien

Comme pour le plan affine ou euclidien, nous allons considérer l'espace affine $\mathbb{A}^3$ muni d'un système de coordonnées $Oxyz$, système qui sera supposé cartésien pour l'espace euclidien. L'espace affine muni du système de coordonnées s'identifie à $\mathbb{R}^3$. Un point de l'espace est représenté par ses coordonnées ; à tous deux points A, B, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dont les coordonnées sont

$$x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A, \quad y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A, \quad z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A.$$

4.1. Plans dans $\mathbb{A}^3$

Définition 4.1. Un plan dans l'espace est un sous-ensemble $\mathcal{P}$ pour lequel il existe a, b, c et d quatre réels tels que

$$\mathcal{P} = \{P \mid a\,x_P + b\,y_P + c\,z_P + d = 0\}$$

avec a, b, c non simultanément nuls.

On dit que $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$. Donc les plans de $\mathbb{A}^3$ sont les sous-ensembles définis par des équations de degré 1 en les coordonnées.

Soit $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$. On suppose $a \neq 0$ et on résout l'équation définissant le plan comme équation en x. On obtient

$$x = -\frac{d}{a} - \frac{b}{a}\, y - \frac{c}{a}\, z$$

avec $y, z \in \mathbb{R}$. On obtient une description paramétrique du plan :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad s, t \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Remarque 4.2. Les éléments apparaissant dans le membre de droite de (4.1) sont, dans l'ordre, un point $P_0 = (-\frac{d}{a}, 0, 0)$ appartenant au plan et deux vecteurs $\boldsymbol{u} = (-\frac{b}{a}, 1, 0)$ et $\boldsymbol{v} = (-\frac{c}{a}, 0, 1)$ qui sont linéairement indépendants.

Il est utile de noter que le point est une solution particulière de l'équation définissant le plan, et que les deux vecteurs sont des solutions particulières de l'équation homogène associée à l'équation du plan. Les combinaisons linéaires $s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ avec $s, t \in \mathbb{R}$ représentent toutes les solutions de l'équation homogène associée.

Connaître une paramétrisation du plan $\mathcal{P}$ signifie

- un point A et deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ linéairement indépendants (c'est-à-dire non proportionnels)
- trois points A, B, C non alignés.

(Pour l'équivalence entre ces deux ensembles de données, il suffit de poser $B = A + \boldsymbol{u}$ et $C = A + \boldsymbol{v}$.)

Étant donnée une paramétrisation du plan $\mathcal{P}$, comment peut-on obtenir une équation cartésienne de celui-ci ? En pratique, on doit éliminer les paramètres. Par exemple, si $\mathcal{P}$ est décrit par le point $A = (1, 0, 2)$ et les vecteurs $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ et $\boldsymbol{v} = (-2, 1, 1)$, alors on sait que

$$\begin{cases} x = 1 + s - 2t \\ y = 2s + t \\ z = 2 + 3s + t. \end{cases}$$

Ceci est un système de trois équations et cinq inconnues, x, y, z, s et t. En éliminant s et t, on obtient, successivement,

$$\begin{cases} s = 1 - 2t - x \\ y = 2 - 3t - 2x \\ z = 5 - 5t - 3x \end{cases} \qquad \begin{cases} s = 1 - 2t - x \\ y = 2 - 3\big(1 - \frac{3}{5}\, x - \frac{1}{5}\, z\big) - 2x \\ t = 1 - \frac{3}{5}\, x - \frac{1}{5}\, z \end{cases}$$

et donc, la deuxième équation du deuxième système dans laquelle les paramètres s et t n'apparaissent plus. Elle est une équation cartésienne du plan initial, c'est-à-dire

$$\mathcal{P} : 7x - 5y + 3z - 5 = 0.$$

En théorie, l'élimination des paramètres fait apparaître naturellement la formule (de développement) du déterminant d'une matrice 3×3.

Proposition 4.3. *Le plan déterminé par le point A et les vecteurs linéairement indépendants $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ est défini par l'équation cartésienne*

$$(x-x_A)\begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix} - x_{\boldsymbol{u}}\begin{vmatrix} y-y_A & z-z_A \\ y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix} + x_{\boldsymbol{v}}\begin{vmatrix} y-y_A & z-z_A \\ y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration. Comme $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont linéairement indépendants, on suppose que $\begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix} \neq 0$. Dans la paramétrisation

$$\begin{cases} x = x_A + x_{\boldsymbol{u}} s + x_{\boldsymbol{v}} t \\ y = y_A + y_{\boldsymbol{u}} s + y_{\boldsymbol{v}} t \\ z = z_A + z_{\boldsymbol{u}} s + z_{\boldsymbol{v}} t \end{cases}$$

on interprète les deux dernières équations comme un système en s et t ; en appliquant la formule de Cramer, on obtient la solution

$$s^* = \frac{\begin{vmatrix} y-y_A & y_{\boldsymbol{v}} \\ z-z_A & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{u}} & y_{\boldsymbol{v}} \\ z_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix}} \qquad \text{et} \qquad s^* = \frac{\begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{u}} & y-y_A \\ z_{\boldsymbol{u}} & z-z_A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{u}} & y_{\boldsymbol{v}} \\ z_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix}}.$$

La première équation devient

$$x = x_A + x_{\boldsymbol{u}} \frac{\begin{vmatrix} y-y_A & y_{\boldsymbol{v}} \\ z-z_A & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{u}} & y_{\boldsymbol{v}} \\ z_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix}} + x_{\boldsymbol{v}} \frac{\begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{u}} & y-y_A \\ z_{\boldsymbol{u}} & z-z_A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{u}} & y_{\boldsymbol{v}} \\ z_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix}}.$$

On multipliant avec le dénominateur commun des deux fractions et en réarrangeant[8] les termes, on a

$$(x-x_A)\begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix} - x_{\boldsymbol{u}}\begin{vmatrix} y-y_A & z-z_A \\ y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix} - x_{\boldsymbol{v}}\begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ y-y_A & z-z_A \end{vmatrix} = 0.$$

La formule désirée est obtenue après un dernier changement de signe sur le dernier déterminant. □

Par analogie au déterminant d'une matrice de taille 2×2, en utilisant la proposition précédente, on introduit le déterminant d'une matrice (un tableau) de taille 3×3 (par la suite on notera $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille 3×3 à coefficients réels)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

comme étant

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \tag{4.2}$$

[8] On a utilisé aussi le fait que pour une matrice de taille 2×2, $\det(M) = \det(M^T)$.

La formule de la proposition 4.3 donnant une équation pour le plan passant par A et dirigé par $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ devient
$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_{\boldsymbol{u}} & y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ x_{\boldsymbol{v}} & y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque 4.4. La formule (4.2) utilisée pour définir le déterminant peut être écrite comme
$$\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\det(A_{11}) + (-1)^{2+1}a_{21}\det(A_{21}) + (-1)^{3+1}a_{31}\det(A_{31})$$
où la matrice A_{ij} est la sous-matrice de A obtenue en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Cette formule généralise celle pour les déterminants 2×2 :
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\det(a_{22}) - a_{21}\det(a_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Corollaire 4.5. *Trois points non alignés P_1, P_2 et P_3 déterminent un unique plan $(P_1P_2P_3)$ d'équation*
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

4.2. Déterminants 3×3

On avait introduit le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ dans la section précédente par la formule
$$\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\det(A_{11}) + (-1)^{2+1}a_{21}\det(A_{21}) + (-1)^{3+1}a_{31}\det(A_{31})$$
Pour tous $1 \leq i, j \leq 3$, dans l'écriture a_{ij}, i désigne la ligne et j la colonne sur lesquelles l'élément a_{ij} est placé dans A. La formule ci-dessus est appelée la formule de développement du déterminant d'après la première colonne.

Lemme-Définition. *Si $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$, alors*
$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Démonstration. D'après la formule (4.2) introduisant le déterminant,
$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + \cdots .\end{aligned}$$
□

Cette formule paraît compliquée, mais il y a plusieurs façons de la comprendre et donc de l'utiliser.

Première règle de calcul.. On peut trouver la valeur du déterminant de A en développant depuis n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne ; par exemple, depuis la deuxième ligne on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

On vérifie facilement que l'on retrouve les six termes de la définition.

Deuxième règle de calcul.. Dans la formule du déterminant il y a trois termes apparaissant avec le signe $+$ et trois apparaissant avec le signe $-$. Chaque terme, indépendamment du signe, est le produit de trois éléments de la matrice. Il s'ensuit qu'on peut penser chaque terme dans la formule du déterminant comme un triangle dont les sommets se trouvent sur certaines positions de la matrice. La figure 12 représente ces six triangles (isocèles). Il est possible d'utiliser ces schémas comme moyen mnémotechnique pour retrouver la formule du déterminant.

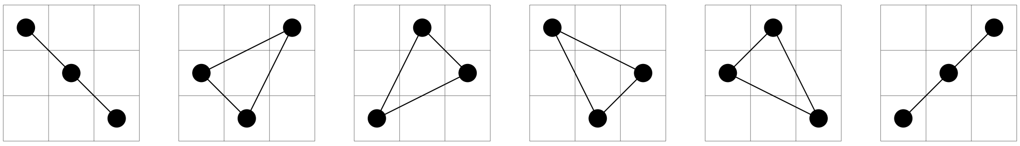


Figure 12: Les six termes du déterminant d'une matrice 3×3 représentés comme triangles isocèles sur les positions de la matrices. Le quatrième triangle correspond au terme $-a_{1\,1}a_{3\,2}a_{2\,3}$.

4.3. Droites dans l'espace

Par la suite, nous définissons une droite dans l'espace. Le point de vue initial est dynamique, c'est-à-dire en utilisant une paramétrisation de la droite.

Définition 4.6. Une droite dans l'espace est l'ensemble des points image d'une application $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (a + \alpha t, b + \beta t, c + \gamma t)$, avec $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$. On notera cette droite par $\mathcal{D}_{A,\boldsymbol{v}}$ et on l'appellera la droite passant par le point $A = (a, b, c)$ de vecteur directeur $\boldsymbol{v}$.

Donc $\mathcal{D}_{A,\boldsymbol{v}} = \{A + t\boldsymbol{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ est la droite passant par A et ayant $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ comme vecteur directeur. À travers la paramétrisation, $\boldsymbol{v}$ représente le vecteur vitesse du mouvement qui a comme image la droite.

Définition 4.7. Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont dits non parallèles si les parties homogènes des équations les définissant ne sont pas proportionnelles.

Après l'introduction du vecteur normal, on verra que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si ils admettent des vecteurs normaux liés (ou proportionnels).

Proposition 4.8. *Un sous ensemble $\mathcal{D}$ se l'espace est une droite si et seulement si il existe deux plans non parallèles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ tels que $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.*

Démonstration. Si $\mathcal{D}$ est une droite, d'après la définition 4.6, si $A \neq B \in \mathcal{D}$, alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{A,\overrightarrow{AB}}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{D} \ni (x, y, z) = (x_A + tu, y_A + tv, z_A + tw), \quad t \in \mathbb{R}$$

où $\overrightarrow{AB} = (u, v, w)$. On peut supposer $w \neq 0$, car $A \neq B$. On a

$$t = \frac{z - z_A}{w}$$

et

$$(x, y, z) \in \mathcal{D} \quad \text{si et seulement si,} \quad \begin{cases} x - x_A - \frac{z-z_A}{w}\, u \;=\; 0 \\ y - y_A - \frac{z-z_A}{w}\, v \;=\; 0\,. \end{cases}$$

Le système, en réorganisant les termes, devient

$$\begin{cases} wx \qquad - uz = wx_A - uz_A \\ \qquad wy - vz = wy_A - vz_A \end{cases}$$

et les deux plans définis par les deux équations ne sont pas parallèles. Réciproquement, on résout le système de deux équations et trois inconnues en prenant une des inconnue comme paramètre. □

4.4. Le produit scalaire

Par analogie avec l'étude du plan euclidien $\mathbb{E}^2$, on considère le produit scalaire défini par $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$ pour tous $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$. Le produit scalaire permet de mesurer les longueur des vecteurs ainsi que l'angle formé par deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et donc les distance et les angles dans $\mathbb{E}^3$. En particulier, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ sont orthogonaux si et seulement si, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0$.

Par exemple, pour le plan $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$, le vecteur $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ est appelé un *vecteur normal*, car pour tous les points $P, Q \in \mathcal{P}$, $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{PQ}$. Pour voir ceci, il suffit de faire la différence des identités

$$ax_P + by_P + cz_P + d = 0$$
$$ax_Q + by_Q + cz_Q + d = 0$$

On obtient

$$0 = a(x_Q - x_P) + b(y_Q - y_P) + c(z_Q - z_P) = \langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{PQ} \rangle.$$

Lemme 4.9. *La distance d'un point P_0 au plan $\mathcal{P}$, $d(P_0, \mathcal{P}) = \min\{P_0P \mid P \in \mathcal{P}\}$ est donnée par $d(P_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. De plus, $d(P_0, \mathcal{P}) = P_0Q$, où $Q \in \mathcal{P}$ tel que $(P_0Q) \perp \mathcal{P}$.*

Démonstration. On considère la droite passant par P_0 de vecteur directeur $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$, un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Soit Q le point d'intersection de cette droite avec $\mathcal{P}$. Pour tout autre point $P \in \mathcal{P}$, le triangle $[P_0QP]$ est rectangle en Q, donc $P_0P > P_0Q$. Le lemme s'ensuit en calculant P_0Q. Comme les coordonnées des points de la droite $\mathcal{D}_{P_0,\boldsymbol{n}}$ vérifient (voir la définition 4.6)

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt \quad \text{et} \quad z = z_0 + ct,$$

le t^* correspondant au point Q est obtenu en remplaçant les identités ci-dessus dans l'équation du plan $\mathcal{P}$. On a

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0,$$

donc $t^* = \frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$ et, par conséquent,

$$Q = (x_0 + a\,t^*, y_0 + b\,t^*, z_0 + c\,t^*).$$

□

Définition. Soit P_0 un point et $\mathcal{P}$ un plan dans l'espace. Le point $Q \in \mathcal{P}$ tel que $(P_0Q) \perp \mathcal{P}$ est appelé le *projeté orthogonal* de P_0 sur $\mathcal{P}$.

Plus tard, on utilisera le résultat technique suivant (voir la figure 13) :

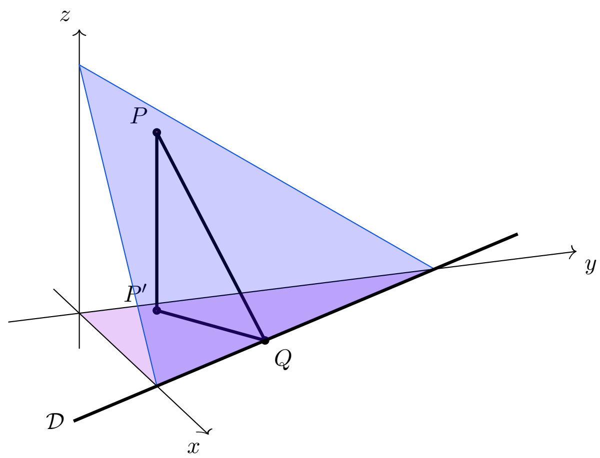


Figure 13: Les éléments du lemme 4.10 : $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\{z = 0\}$, P' est la projection de $P \in \mathcal{P}$ sur $\{z = 0\}$ et $(PQ) \perp \mathcal{D}$.

Lemme 4.10. *Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^3$ un plan non parallèle au plan de coordonnées $\{z = 0\}$. Soit $\boldsymbol{n}$ un vecteur normal unitaire de $\mathcal{P}$. On note par $\mathcal{D}$ la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et du plan de coordonnées $\{z = 0\}$. Si $P \in \mathcal{P}$, $Q \in \mathcal{D}$ tel que $(PQ) \perp \mathcal{D}$ et P' est le projeté orthogonal de P sur $\{z = 0\}$, alors $P'Q = |z_{\boldsymbol{n}}|\, PQ$.*

Démonstration. Si $\boldsymbol{n} = a\,\boldsymbol{e}_x + b\,\boldsymbol{e}_y + c\,\boldsymbol{e}_z$, alors $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ a $\boldsymbol{u} = (b, -a, 0)$ comme vecteur directeur —vue comme droite dans le plan $\{z = 0\}$, le vecteur $(b, -a)$ doit être non nul. Si $\overrightarrow{PQ} = \alpha\,\boldsymbol{e}_x + \beta\,\boldsymbol{e}_y + \gamma\,\boldsymbol{e}_z$, alors, d'après les hypothèses,

$$0 = \langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{PQ}\rangle = a\alpha + b\beta + c\gamma, \quad 0 = \langle \boldsymbol{u}, \overrightarrow{PQ}\rangle = b\alpha - a\beta \quad \text{et} \quad 1 = a^2 + b^2 + c^2. \qquad (*)$$

On peut exprimer α et β en fonction de γ car a et b ne sont pas simultanément nuls : on a

$$\alpha = -\frac{ac}{a^2+b^2}\,\gamma, \quad \beta = -\frac{bc}{a^2+b^2}\,\gamma.$$

Alors

$$PQ^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \left(\frac{a^2c^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2c^2}{(a^2+b^2)^2} + 1\right)\gamma^2 = \left(\frac{c^2}{a^2+b^2} + 1\right)\gamma^2 = \frac{\gamma^2}{1-c^2}$$

en utilisant la dernière identité de $(*)$. En même temps, $\overrightarrow{P'Q} = \alpha\,\boldsymbol{e}_x + \beta\,\boldsymbol{e}_y$ (on a projeté sur $\{z = 0\}$), donc

$$P'Q^{\,2} = \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{a^2c^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}\right)\gamma^2 = \frac{c^2\gamma^2}{a^2+b^2} = \frac{c^2\gamma^2}{1-c^2} = c^2\,PQ^2.$$

□

5. Volume, produit vectoriel

5.1. Le produit vectoriel

Dans la proposition 4.3, on a exprimé l'équation du plan déterminé par le point A et les vecteurs directeurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ par la formule

$$(x - x_A)\begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix} - x_{\boldsymbol{u}}\begin{vmatrix} y - y_A & z - z_A \\ y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix} + x_{\boldsymbol{v}}\begin{vmatrix} y - y_A & z - z_A \\ y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \end{vmatrix} = 0$$

interprétée comme l'annulation du déterminant 3×3

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_{\boldsymbol{u}} & y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ x_{\boldsymbol{v}} & y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix} = 0.$$

En utilisant le développement du déterminant d'après la première ligne, on voit que le vecteur

$$\left(\begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ x_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_{\boldsymbol{u}} & y_{\boldsymbol{u}} \\ x_{\boldsymbol{v}} & y_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix} \right) =: \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$$

est un vecteur normal au plan, c'est-à-dire orthogonal aux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. Il est appelé le produit vectoriel de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. Symboliquement,

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ x_{\boldsymbol{u}} & y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ x_{\boldsymbol{v}} & y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix}.$$

Le produit vectoriel satisfait les propriétés suivantes :

- $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$
- $\boldsymbol{u} \times (b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}) = b\,\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + c\,\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$
- $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle = \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

Proposition 5.1. *Deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont liés si et seulement si, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Plus généralement, la norme du produit vectoriel, $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|$, est l'aire du parallélogramme déterminé par les deux vecteurs.*

La preuve de cette proposition sera donnée dans la section suivante.

5.2. Aire d'un triangle $[P_1P_2P_3]$

On considère trois points $P_j = (x_j, y_j, z_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ dans l'espace. On veut calculer l'aire du triangle $[P_1P_2P_3]$. Si $\boldsymbol{n}$ est un vecteur normal de norme 1 au plan $(P_1P_2P_3)$, alors ses composantes relient l'aire du triangle aux aires des triangles projetés sur les plans de coordonnées. Pour voir ceci, on utilise le lemme 4.10.

Lemme 5.2. *Soit $[P_1P_2P_3]$ un triangle non dégénéré dans l'espace et soit $\boldsymbol{n}$ un vecteur normal unitaire au plan $(P_1P_2P_3)$. Si Q_1, Q_2 et Q_3 sont les projections orthogonales des points sur le plan de coordonnées $\{z = 0\}$, alors*

$$\sigma([Q_1Q_2Q_3]) = \pm z_{\boldsymbol{n}}\, \sigma([P_1P_2P_3]).$$

Démonstration. On peut supposer que le plan de projection passe par un des trois points car l'aire du triangle projeté ne change pas. Si P_1 est ce point, alors $\mathcal{D} = (P_1P_2P_3) \cap \{z = z_{P_1}\}$.

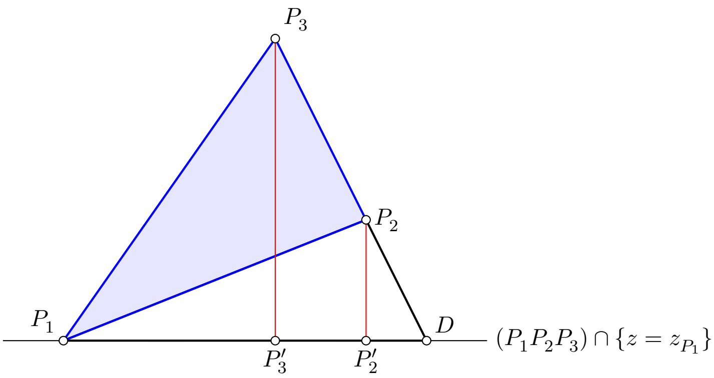


Figure 14: L'aire du triangle $[P_1P_2P_3]$ est la différence de l'aire du triangle $[P_1DP_3]$ et celle de $[P_1DP_2]$.

Soit D le point d'intersection dans le plan $(P_1P_2P_3)$ des droites (P_2P_3) et $\mathcal{D}$ (voir la figure 14). Alors

$$\sigma([P_1P_2P_3]) = \sigma([P_1DP_3]) - \sigma([P_1DP_2]) = \frac{P_1D}{2}\,(P_3P_3' - P_2P_2')$$

et, dans le plan $\{z = z_{P_1}\}$, où $Q_1 = P_1$, $Q_2' = P_2'$ et $Q_3' = P_3'$,

$$\begin{aligned}\sigma([Q_1Q_2Q_3]) &= \sigma([Q_1DQ_3]) - \sigma([Q_1DQ_2]) = \sigma([P_1DQ_3]) - \sigma([P_1DQ_2])\\ &= \frac{P_1D}{2}\,(Q_3P_3' - Q_2P_2').\end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit en utilisant le Lemme 4.10. □

Corollaire 5.3.

$$4\,\sigma([P_1P_2P_3])^2 = \begin{vmatrix} y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}^2.$$

Démonstration. On utilise la formule du lemme 5.2,

$$z_{\boldsymbol{n}}^2\,\sigma([P_1P_2P_3])^2 = \sigma([Q_1Q_2Q_3])^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}^2$$

pour exprimer l'aire du triangle projeté sur le plan $\{z = 0\}$ en fonction de la composante z du vecteur normal. On finit en considérant les trois projections et le fait que la norme du vecteur normal $\boldsymbol{n}$ vaut 1. □

Ce corollaire nous offre une démonstration pour la proposition 5.1. Soit P_3 un point de l'espace et soient $P_1 = P_3 + \boldsymbol{u}$ et $P_2 = P_3 + \boldsymbol{v}$. Alors

$$\sigma(\square\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^2 = 4\,\sigma([P_1P_2P_3])^2 = \begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ x_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_{\boldsymbol{u}} & y_{\boldsymbol{u}} \\ x_{\boldsymbol{v}} & y_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix}^2 = \|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|^2.$$

5.3. Volume du tétraèdre $[P_1P_2P_3P_4]$

On considère quatre points $P_J = (x_j, y_j, z_j)$ $(j = 1, \dots, 4)$ dans l'espace et on veut calculer le volume du tétraèdre $[P_1P_2P_3P_4]$, noté $\mu(P_1P_2P_3P_4)$.

Proposition 5.4.

$$\mu(P_1P_2P_3P_4) = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}.$$

Démonstration. $\mu(P_1P_2P_3P_4) = \frac{1}{3}\, P_1Q_1 \cdot \sigma(P_2P_3P_4)$, où Q_1 est le projeté orthogonal de P_1 sur le plan $(P_2P_3P_4)$. On utilise la formule pour la distance de P_1 au plan $(P_2P_3P_4)$ ainsi que la proposition 5.1. □

5.4. Quelques compléments sur les déterminants

Proposition 5.5. *Soient $\boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{e}_x + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{e}_y + z_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ non simultanément nuls tels que $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w} = 0$ si et seulement si*

$$\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \begin{vmatrix} x_{\boldsymbol{u}} & y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ x_{\boldsymbol{v}} & y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \\ x_{\boldsymbol{w}} & y_{\boldsymbol{w}} & z_{\boldsymbol{w}} \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration. Si $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w} = 0$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ non simultanément nuls, alors, en supposant $\alpha \neq 0$, on a $\boldsymbol{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\,\boldsymbol{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\,\boldsymbol{w} =: b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$ et on obtient

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_{\boldsymbol{u}} & y_{\boldsymbol{u}} & z_{\boldsymbol{u}} \\ x_{\boldsymbol{v}} & y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \\ x_{\boldsymbol{w}} & y_{\boldsymbol{w}} & z_{\boldsymbol{w}} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} bx_{\boldsymbol{v}} + cx_{\boldsymbol{w}} & by_{\boldsymbol{v}} + cy_{\boldsymbol{w}} & bz_{\boldsymbol{v}} + cz_{\boldsymbol{w}} \\ x_{\boldsymbol{v}} & y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \\ x_{\boldsymbol{w}} & y_{\boldsymbol{w}} & z_{\boldsymbol{w}} \end{vmatrix} \\ &= (bx_{\boldsymbol{v}} + cx_{\boldsymbol{w}})\begin{vmatrix} y_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \\ y_{\boldsymbol{w}} & z_{\boldsymbol{w}} \end{vmatrix} - (by_{\boldsymbol{v}} + cy_{\boldsymbol{w}})\begin{vmatrix} x_{\boldsymbol{v}} & z_{\boldsymbol{v}} \\ x_{\boldsymbol{w}} & z_{\boldsymbol{w}} \end{vmatrix} + (bz_{\boldsymbol{v}} + cz_{\boldsymbol{w}})\begin{vmatrix} x_{\boldsymbol{v}} & y_{\boldsymbol{v}} \\ x_{\boldsymbol{w}} & y_{\boldsymbol{w}} \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dans l'autre sens, on suppose que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas proportionnels. Si le déterminant est nul, alors, d'après la proposition 5.4, les vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$, vus comme vecteurs issus de l'origine, se trouve dans un même plan (histoire d'un tétraèdre aplati). Par conséquent, il existe un vecteur $\boldsymbol{n}$ non nul (normal à ce plan) qui est orthogonal sur les trois vecteurs. On choisit un repère centré en O et ayant les axes dirigées par $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{n}$. Alors $\boldsymbol{w}$ s'exprime en fonction de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ seulement. □

Cette proposition établit l'équivalence entre l'annulation du déterminant et la dépendance linéaire pour trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On avait obtenu un résultat analogue pour deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Une conséquence de la proposition 5.5 est la caractérisation suivante (pour un système de trois équations à trois inconnues, ou géométriquement, pour l'intersection de trois plans) : Le système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

admet une solution unique (c'est-à-dire les trois plans s'intersectent en un unique point) si et seulement si,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

(c'est-à-dire les trois vecteurs normaux aux trois plans ne sont pas liés).

A. Transformations du plan : translations, rotations, réflexions, homothéties

On fixe un repère cartésien Oxy. Par la suite nous décrirons certaines transformations du plan euclidien $\mathbb{E}^2$: translations, rotations et réflexions. Le cadre est le suivant : une transformation affine est une application $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ pour laquelle il existe six constantes réelles α, β, γ, δ, $a, b \in \mathbb{R}$ telles que, en coordonnées,

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) + (a, b)$$

et

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Cette deuxième condition est équivalente à f bijective. L'expression pour $f(x, y)$ est plus facile à comprendre si on utilise le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

Lemme A.1. *Si $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ est une transformation affine et si $\mathcal{D}$ est une droite, alors $f(\mathcal{D})$ est une droite.*

Les transformations qui nous intéressent ici, sont celles qui conservent les distances, c'est-à-dire pour tous $P, Q \in \mathbb{E}^2$, $\|\overrightarrow{PQ}\| = d(P, Q) = d(f(P), f(Q)) = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\|$. Une transformation qui converse les distances s'appelle une *isométrie.*

Lemme A.2. *Si $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ est une isométrie et si Γ est un cercle, alors $f(\mathcal{D})$ est un cercle.*

Exemple (translation)**.** La translation $T_{\boldsymbol{v}}$ de vecteur $\boldsymbol{v}$: $P \mapsto P + \boldsymbol{v}$. Si $\boldsymbol{v} = (a, b)$, alors, en coordonnées on a

$$(x, y) \mapsto (x + a, y + b).$$

En utilisant les matrices,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Exemple (rotation)**.** La rotation $R_{O,\theta}$ de centre O et d'angle θ : $P \mapsto Q$, où Q est tel que $OP = OQ$ et l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ est de mesure θ. En utilisant les fonctions trigonométriques, et en commençant éventuellement avec $\|\overrightarrow{OP}\| = 1$, on a la rotation de centre O et d'angle θ est donnée par

$$(x, y) \mapsto (\cos(\theta)\, x - \sin(\theta)\, y, \sin(\theta)\, x + \cos(\theta)\, y).$$

La formule (A.1) devient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

et en utilisant les nombres complexes z et w, les affixes des points P et $Q = R_{O,\theta}(P)$ respectivement, la rotation $R_{O,\theta}$ est décrite par

$$w = e^{i\theta} z. \tag{A.2}$$

La rotation $R_{\Omega,\theta}$ de centre Ω et d'angle θ admet une description géométrique simple. L'écriture en coordonnées dans le système Oxy ne l'est pas ; elle s'obtient en effectuant un changement de repère. Soit $\Omega x'y'$ le système de coordonnées centré en Ω, ayant les axes parallèles aux axes de Oxy. Le passage entre les deux systèmes est donné par

$$\begin{cases} x' = x - x_\Omega \\ y' = y - y_\Omega \end{cases} \iff \quad z' = z - \omega,$$

où ω est l'affixe du oint Ω (par rapport au système Oxy). Dans le nouveau système de coordonnées, d'après (A.2), la rotation $R_{\Omega,\theta}$ est décrite par $w' = e^{i\theta} z'$. On obtient alors,

$$w - \omega = e^{i\theta}(z - \omega),$$

c'est-à-dire

$$w = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta})\omega.$$

Lemme A.3. *Si $\theta \neq 0 \mod 2\pi$, alors Ω est l'unique point fixe de $R_{\Omega,\theta}$. (Un point fixe est un point P tel que $R_{\Omega,\theta}(P) = P$.)*

Démonstration. Soit P un point fixe. Si z est l'affixe de P, alors

$$z = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta})\omega.$$

On obtient $(1 - e^{i\theta})(z - \omega) = 0$, d'où le résultat. □

Proposition A.4. *Soit $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ l'application définie par $f(z) = e^{i\theta} z + a$.*

1) *Si $\theta \neq 0 \mod 2\pi$, alors f est la rotation de centre Ω et d'angle θ, où l'affixe de Ω est $\frac{a}{1-e^{i\theta}}$.*
2) *Si $\theta = 0 \mod 2\pi$, alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, où l'affixe de A est a.*

Exemple (réflexion)**.** $S_{\mathcal{D}}$, la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}$: si $Q = S_{\mathcal{D}}(P)$, alors $[PQ]$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et est divisé en deux segments égaux par $\mathcal{D}$. D'après la définition, tout point de la droite $\mathcal{D}$ est un point fixe pour la réflexion $S_{\mathcal{D}}$.

Proposition A.5. *Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par l'origine et faisant un angle θ (cet angle est défini modulo π) avec l'axe des x. Si z est l'affixe d'un point P et w est l'affixe du point $S_{\mathcal{D}}(P)$, alors*

$$w = e^{2i\theta}\bar{z}.$$

Démonstration. On remarque que si $\mathcal{D}$ est l'axe des x alors $w = \bar{z}$. On change le système de coordonnées tel que $\mathcal{D}$ devient l'axe des x' du nouveau système, c'est-à-dire $z' = e^{-i\theta}z$ et on applique la remarque précédente. □

Exemple (homothétie)**.** $H_{O,k}$, l'homothétie de centre O et rapport $k \notin \{0,1\}$: si $Q = H_{O,k}(P)$, alors $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$. En écriture complexe, on a $w = kz$.

Lemme A.6. *L'image d'une droite (un cercle) par une homothétie est une droite (un cercle). De plus, des droites parallèles sont envoyées dans des droites parallèles.*

Bibliographie

[1] M. Audin, *Géométrie.* Éditions scientifiques et culturelles, 1998

[2] H. S. M. Coxeter, *Geometry.* Wiley Classics Library, 1969

[3] W. H. McCrea, *Analytic geometry of three dimensions.* Univ. Mathematical Texts, 1953