Calcul algébrique

Esquisse de cours

Mathematics is the art of explanation. If you deny students the opportunity to engage in this activity—to pose their own problems, make their own conjectures and discoveries, to be wrong, to be creatively frustrated, to have an inspiration, and to cobble together their own explanations and proofs—you deny them mathematics itself.

Paul Lockhart

Sommaire

1. Introduction

Ce cours introduit quelques objets mathématiques afin de répondre à des questions ou problèmes que notre expérience et imagination peuvent soulever. Pour commencer, à titre d'exemple, nous abordons le cheminement pour trouver la réponse à une question implicite apparaissant dans le livre *Liber abaci* de Fibonacci (1170–1250). Dans la deuxième partie de cette introduction, nous énumérons cinq questions auxquelles vous êtes invités à réfléchir. Ces questions peuvent être vues comme une motivation du cours. En avançant dans celui-ci, on peut raisonnablement espérer que vous arriverez à résoudre les trois premières questions et développer des intuitions pour les deux autres.

La suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est la suite de nombres entiers $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. Plus précisément, si on note u_1, u_2, u_3, ... les termes de cette suite, alors $u_1 = u_2 = 1$ et pour tout $n \geq 3$,

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}. \tag{1.1}$$

Peut-on exprimer le terme u_n comme une formule explicite de n (nombre entier dans un calcul et non pas un indice comme dans (1.1)) ?

Évidemment, si on veut connaître, disons, u_{20}, nous pouvons faire les calculs de proche en proche en utilisant (1.1) pour arriver à ce terme. Explicitement,

$$u_7 = u_6 + u_5 = 13 + 8 = 21$$
$$u_8 = u_7 + u_6 = 21 + 13 = 34$$

et ainsi de suite. Après encore treize itérations, nous avons

$$u_{19} = u_{18} + u_{17} = 2584 + 1597 = 4181$$
$$u_{20} = u_{19} + u_{18} = 4181 + 2584 = 6765.$$

Ce que nous cherchons est une formule nous permettant de produire le résultat $u_{20} = 6765$ sans passer par le calcul de tous les termes intermédiaires de la suite. Par exemple, qui est u_{101}, ou quel est l'ordre de grandeur de $u_{10\,000}$?

En utilisant un ordinateur, nous pouvons commencer par regarder les premiers termes de la suite de Fibonacci et les comparer avec des valeurs de fonctions très simples qui dépendent de n.

n	1	2	3	4	5	10	15	20	30
u_n	1	1	2	3	5	55	610	6765	832040
n^2	1	4	9	16	25	100	225	400	900
n^3	1	8	27	64	125	1000	3375	8000	27000

Nous remarquons que les termes de la suite croissent beaucoup plus rapidement que les puissances 2 et 3 de n. Probablement ce phénomène apparaît pour d'autres puissances aussi. Nous devrions chercher notre solution ailleurs !

Considérons le taux de croissance des termes de la suite, c'est-à-dire regardons le rapport u_n/u_{n-1} pour deux termes consécutifs.

n	2	3	4	5	10	15	20	30
u_n/u_{n-1}	1	2	1.5	1.666	1.617	1.618037	1.618033	1.618033

Il semble que le rapport tend à devenir un nombre réel dont la troncature à 6 décimales exactes est 1.618033. *Si cette affirmation est vraie*, alors on peut commencer à comprendre les termes de la suite ! Si q est la valeur vers laquelle tend le rapport u_n/u_{n-1}, alors, pour n grand[1],

$$u_n \approx q\, u_{n-1} \quad \text{et} \quad u_{n-1} \approx q\, u_{n-2}.$$

Donc la relation de récurrence (1.1) devient

$$q^2\, u_{n-2} \approx q\, u_{n-2} + u_{n-2}.$$

En simplifiant par u_{n-2} — tous les termes de la suite sont des entiers positifs non nuls —, on a $q^2 \approx q + 1$. En résolvant l'équation quadratique (ou de second degré) $q^2 = q + 1$, on obtient les solutions

$$q_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033 \quad \text{et} \quad q_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618033.$$

[1] Le symbole $\approx$ signifie "être proche de".

La solution positive correspond à la limite supposée du rapport u_n/u_{n-1}. Il s'ensuit que la suite de Fibonacci devrait être liée à la suite géométrique définie par

$$v_n = q_+^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Celle-ci satisfait à la relation (1.1) (donner une justification). Observons toutefois que ses termes initiaux ne sont pas ceux de la suite (u_n). À vrai dire, aucun terme de cette suite n'est un entier ! En utilisant la formule du binôme de Newton (voir § 4), on obtient

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = a + b\sqrt{5}$$

avec a et b deux nombres rationnels positifs, non nuls. (Pour être précis, il faudrait utiliser une notation signifiant que a et b dépendent de n, par exemple $a(n)$. Mais nous ne le ferons pas pour ne pas alourdir l'écriture ; la notation sera sous-entendue.) Si q_+^n intervenait dans l'expression de u_n, alors dans cette même expression il faudrait avoir des éléments qui feraient disparaître le nombre irrationnel $\sqrt{5}$. Or, il se trouve que

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = a - b\sqrt{5}.$$

En observant ces deux formules et après quelques (longs) moments de réflexion, nous pourrions penser que u_n est une combinaison des suites géométriques définies par q_+ et q_-. En d'autres termes, on essaye de voir s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \alpha q_+^n + \beta q_-^n.$$

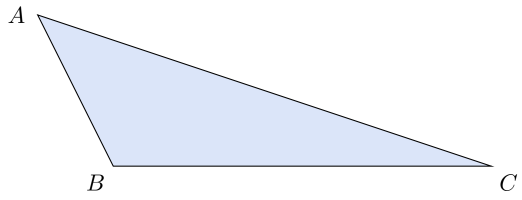
En utilisant $u_1 = u_2 = 1$, on obtient un système de deux équations en α et β ayant pour unique solution $\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Donc

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Remarque. Avant de poursuivre, vous devriez réfléchir à ce résultat et, plus généralement, à ce que nous avons appris tout au long de ce cheminement. D'abord, avons-nous réellement répondu à la question initiale ? Est-ce que l'expression ci-dessus est bien le terme général de la suite de Fibonacci ? Pouvons-nous le démontrer ? Quel est l'ordre de grandeur de $u_{10\,000}$? Si une autre suite était définie par une relation proche de (1.1), mais différente de celle-là, saurions-nous déterminer son terme général ? La curiosité de chacune et chacun d'entre nous soulèvera d'autres questions…

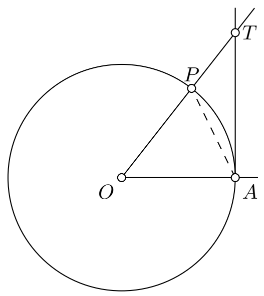
Cinq questions liées plus ou moins au cours

Première question. Si $[ABC]$ est un triangle dans le plan, on remarque qu'il existe un lien entre les longueurs de ses côtés et les mesures des angles opposés. Plus précisément, $AB < BC < AC$ si et seulement si $\widehat{C} < \widehat{A} < \widehat{B}$. Cette affirmation, confirmée par le triangle du dessin, est-elle vraie pour tout triangle ? En d'autres termes, peut-on la justifier au cas où elle serait vraie, ou donner un contre-exemple sinon ?



Deuxième question. Étant donnés un cercle $\mathcal{C}$ centré en O et deux points $A, P \in \mathcal{C}$, on considère les figures géométriques ci-dessous :

- le triangle défini par les trois points O, A et P
- le secteur circulaire défini par les trois points O, A et P
- le triangle $[OAT]$ défini par les demi-droites $[OA)$ et $[OP)$ et la tangente à $\mathcal{C}$ en A.



En comparant les aires de ces trois figures géométriques, on remarque que

$$\text{aire}([OAP]) < \text{aire}(\text{secteur circulaire}) < \text{aire}([OAT]).$$

Si on exprime (algébriquement) ces aires en fonction de θ, la mesure de l'angle $\widehat{AOP}$, quelles relations mathématiques ces inégalités révèlent-elles ? Que deviennent ces relations quand θ est très proche de 0 ? On pourra supposer le cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1.

Troisième question. Si a et b sont deux entiers, alors (a, b, c) est appelé un *triplet de Pythagore* si c est un entier positif vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$. On considère deux triplets de Pythagore (a, b, c) et (a', b', c'). Existe-t-il toujours un triplet de Pythagore de la forme $(*, *, cc')$?

Quatrième question (difficile)**.** Au XIV$^{\text{e}}$ siècle, Nicolas Oresme avait démontré la divergence de la série harmonique, en d'autres termes, que la somme

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

croît indéfiniment de façon non bornée, avec n. Que peut-on dire concernant la somme

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

comme fonction de n ? Croît-elle indéfiniment ? Sinon, peut-on approcher ou connaître la valeur de la somme infinie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots ?$$

Cette valeur est connue, voir la remarque 5.12. Nous n'y proposons pas une preuve complète, mais une idée de cheminement, des analogies… Il s'agit de comprendre les relations entre les racines d'un polynôme et ses coefficients, et de travailler avec les racines de $\sin(x) = 0$ comme si elles étaient les racines d'un "polynôme".

Cinquième question (difficile)**.** On se place en un point S dans un bassin, sous le niveau de l'eau. Voir la figure 1 qui représente une vue de profil. On regarde un cercle dessiné sur un mur vertical au-dessus du niveau de l'eau. Dans cette situation apparaissent deux angles que nous voulons comparer : β déterminé par le diamètre vertical du cercle vu comme s'il n'y avait pas d'eau dans le bassin (c'est-à-dire l'angle vertical sous lequel on verrait le cercle s'il n'y avait pas d'eau dans le bassin), et α déterminé par le diamètre vertical vu à travers l'eau. Y a-t-il une formule reliant ces deux angles dépendant des conditions initiales — profondeur de S, hauteur du cercle par rapport au niveau de l'eau, distance de S au mur du cercle ? Est-ce qu'un des angles est plus petit que l'autre ? Dans la figure on a $\alpha < \beta$. (On prendra l'indice de réfraction de l'eau égal à 1.33.)

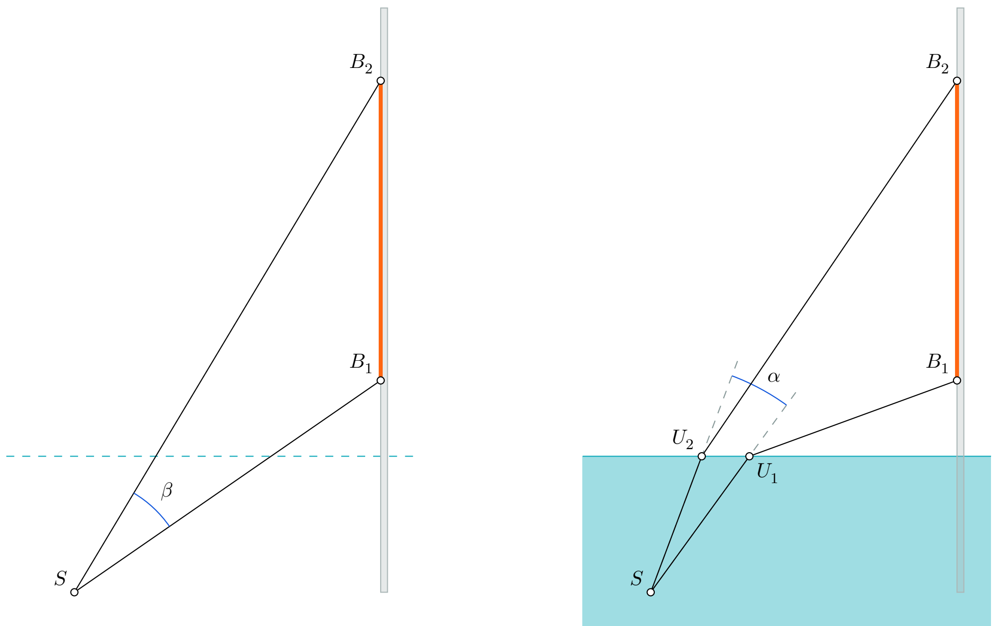


Figure 1: Les deux angles, sans et avec réfraction, déterminés par le diamètre vertical $[B_1B_2]$ et le point S.

2. Cercle trigonométrique. Fonctions trigonométriques

Définition de sinus et cosinus

Soit Oxy un système de coordonnées cartésiennes associé à un repère orthonormé dans le plan $\mathbb{R}^2$. Le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ est défini par l'équation $x^2 + y^2 = 1$; c'est le cercle de rayon 1 centré à l'origine. Sur le cercle on définit le *sens direct* ou *sens positif*, comme étant le sens inverse des aiguilles d'une montre. Alors tout point P du cercle trigonométrique détermine et est déterminé par l'*angle orienté* $\angle AOP$, où $A = (1, 0)$.

Définition. La *mesure principale* de l'angle orienté $\angle AOP$ est la longueur avec signe du plus petit arc déterminé par A et P sur le cercle trigonométrique. Par convention, la mesure principale de $\angle AOA'$, où $A' = (-1, 0)$, est π.

Par exemple, si P se trouve dans le quatrième quadrant, alors le plus petit arc déterminé par A et P est celui obtenu en allant dans le sens des aiguilles d'une montre — le sens négatif — de A à P. La mesure principale sera négative.

Définition. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Si P est le point du cercle trigonométrique correspondant à l'angle de mesure θ, alors les fonctions *cosinus* et *sinus* sont définies par les coordonnées cartésiennes du point P, c'est-à-dire $P = (\cos\theta, \sin\theta)$.

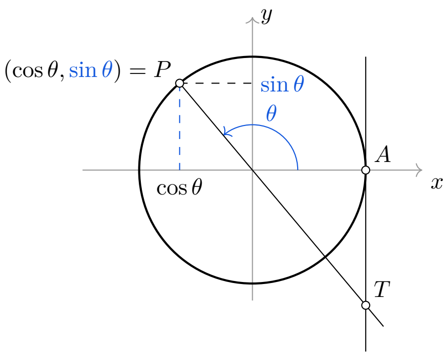


Figure 2: Le cercle trigonométrique et θ, la mesure principale de l'angle orienté déterminé par P. Les coordonnées cartésiennes de P sont alors $(\cos\theta, \sin\theta)$. Si T est le point d'intersection de la droite (OP) avec la *droite tangente* au cercle trigonométrique en A, alors les coordonnées de T sont $(1, \tan\theta)$.

Remarque 2.1. Soit P un point du cercle trigonométrique. La mesure principale de l'angle orienté $\angle AOP$ est comprise entre $-\pi$ et π. Soit θ_0 cette mesure principale. Alors, pour tout entier k, $\theta_0 + 2k\pi$ est aussi une mesure de cet angle. D'après la définition de sinus et cosinus on a

$$\sin(\theta_0 + 2k\pi) = \sin(\theta_0) \quad \text{et} \quad \cos(\theta_0 + 2k\pi) = \cos(\theta_0).$$

On dit que sinus et cosinus sont des fonctions périodiques de période principale 2π.

En réfléchissant sur la définition de sinus et cosinus et en examinant la figure 2, nous observons les propriétés suivantes :

- Pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, la définition de sinus et cosinus coïncide avec celle introduite en géométrie élémentaire pour les angles d'un triangle rectangle. Voir la figure 3.
  Le triangle $[OPQ]$ est rectangle en Q et le côté $[OP]$ est de longueur 1. Alors, $\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = PQ$, c'est-à-dire $\sin\theta$ est l'ordonnée du point P.
  Il faut comprendre qu'en utilisant le cercle trigonométrique, nous obtenons les fonctions périodiques sin et cos définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$.
- En utilisant le triangle $[OPQ]$ de la figure 3 et en remarquant que la mesure (principale)

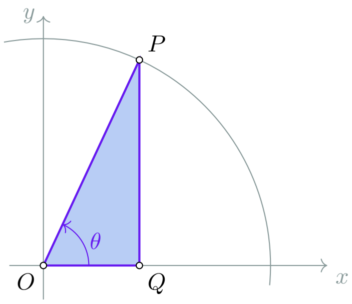


Figure 3: Liaison avec la définition du sinus et cosinus dans un triangle rectangle.

de l'angle P est $\pi/2 - \theta$, on obtient les relations

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta.$$

- On peut énumérer les valeurs exactes[2] “simples à calculer” de sinus et de cosinus :

$$\begin{array}{lllll} \sin 0 = 0 & \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} & \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\ \cos 0 = 1 & \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} & \cos\frac{\pi}{2} = 0. \end{array}$$

- L'esquisse du graphe de sinus est donnée dans la figure 4 ci-dessus. Pour justifier l'exactitude de ce graphe, il faudrait faire l'étude de la variation de la fonction $\theta \mapsto \sin\theta$. L'étude de la définition nous permet d'en déduire la monotonie, les zéros et les valeurs extrêmes, mais pas la convexité !

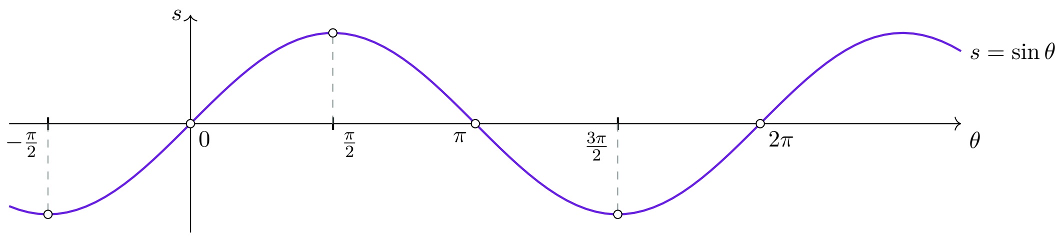
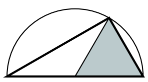


Figure 4: Le graphe de sinus. Il se prolonge sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- cos est paire et sin est impaire
- $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ et $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
- $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ et $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$.

Définition. La fonction *tangente*, notée tan, est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ par

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

[2] Pour calculer $\sin\frac{\pi}{6}$ il suffit d'étudier la figure  dans laquelle le triangle grisé est équilatéral et un de ses sommets est le centre du cercle trigonométrique.

Dans la figure 2, on trouve l'interprétation géométrique de $\tan\theta$: cette valeur est la longueur avec signe du segment $[AT]$, où T est le point d'intersection de la droite (OP) avec la *droite tangente* à $\mathcal{C}$ en A.

Résoudre l'équation $\sin t = b$

Si $f : X \to Y$ est une fonction, alors résoudre l'équation $f(x) = b$ veut dire trouver tous les antécédents de b, c'est-à-dire trouver tous les éléments du domaine de définition X qui ont pour image b.

La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$. En fait, le codomaine de la fonction a été fixé *a posteriori*, après avoir vu que les valeurs de sin — les ordonnées des points du cercle trigonométrique — sont comprises entre -1 et 1. L'équation

$$\sin t = b$$

n'a pas de solution si $|b| > 1$. Pour résoudre l'équation si $|b| \leq 1$, on considère en même temps la définition de sinus ainsi que l'interprétation de son graphe. Pour $b \approx 0.899$ on a la situation représentée dans la figure 5. On obtient deux infinités de solutions,

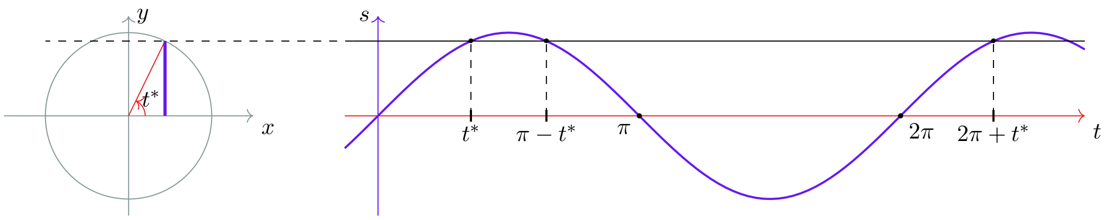


Figure 5: La recherche graphique des antécédents de $b = 0.899$. L'interprétation commence sur le cercle trigonométrique ; on trouve deux points sur le cercle pour lesquels le sinus des mesures (principales t^* et $\pi - t^*$) des angles vaut b. On trouve l'ensemble de tous les antécédents en intersectant le graphe de sin avec la droite horizontale $s = b$.

$$t^* + 2k\pi \quad \text{et} \quad \pi - t^* + 2k\pi,$$

où $k \in \mathbb{Z}$. Elles correspondent aux abscisses des points d'intersection du graphe de sin avec la droite horizontale $s = b$. Une valeur approchée pour t^* est 1.117.

Ce résultat est similaire pour tout $b \in [-1, 1]$. Explicitement,

Proposition 2.2. *Soit* $b \in [-1, 1]$.

- *Si* $-1 \leq b < 1$, *alors il existe un unique* $-\frac{\pi}{2} < t_b < \frac{\pi}{2}$ *tel que* $\sin(t_b) = b$ *et l'ensemble de tous les antécédents de* b *est l'ensemble*

$$\sin^{-1}(b) = \{t_b + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - t_b + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

- *Si* $b = \pm 1$, *alors* $\sin^{-1}(\pm 1) = \{\pm\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

En changeant légèrement le point de vue, mis à part les solutions de l'équation de départ, ce qu'on a rencontré dans la proposition précédente est la notion de fonction *inverse*, plus précisément l'*inverse de sinus restreinte à l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Remarque (inverse d'une fonction)**.** On rappelle que l'inverse d'une fonction $f : X \to Y$ existe si en inversant le sens de toutes les flèches de f on obtient encore une fonction. La fonction ainsi obtenue s'appelle l'*inverse* de f et est notée $f^{-1} : Y \to X$.

En vue de la définition d'une fonction, la signification de la phrase "en inversant le sens de toutes les flèches de f on obtient une fonction", est la suivante (exercice) :

$$\text{pour tout } y \in Y \text{ il existe un unique } x_y \text{ tel que } y \mapsto x_y$$

c'est-à-dire l'image de f est Y tout entier et il n'existe pas deux éléments distincts $x', x'' \in X$ tels que $f(x') = f(x'')$.

On remarque facilement qu'on ne peut pas renverser le sens des flèches pour $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ et obtenir une fonction (car sin n'est pas injective). Par contre, ce renversement est possible si on restreint sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; voir le graphe ci-dessous. L'inverse de sin est appelée *arc sinus* et est notée arcsin. On obtient son graphe en regardant le graphe du sinus depuis l'axe des ordonnées, c'est-à-dire en échangeant les rôles des deux axes des coordonnées.

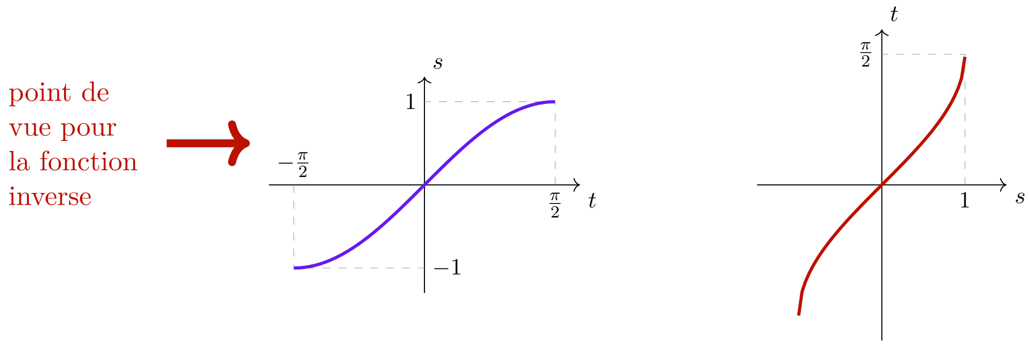


Figure 6: La restriction de sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est inversible (le graphe de gauche). L'inverse est obtenue en inversant les axe des coordonnées pour le graphe de sinus. À droite on obtient le graphe de $s \mapsto \arcsin(s)$.

Identités remarquables

Après avoir énoncé et établi l'identité de l'addition des angles pour sinus, nous obtiendrons comme corollaires les identités trigonométriques usuelles : l'addition des angles (pour cosinus et tangente), la duplication de l'angle, la linéarisation et les produit-somme et somme-produit.

Proposition 2.3. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \, \cos\beta + \cos\alpha \, \sin\beta.$$

En particulier, $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos\beta$.

Démonstration. Nous supposons $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Le cas général découle de celui-ci et des propriétés précédentes. Regardons la figure 7. Le $\sin(\alpha + \beta)$ est représenté par BB', la longueur du segment noir épais qui est la somme des longueurs des deux segments verticaux rouges, BI et PP'. Pour exprimer BI on utilise le triangle rectangle $[BIP]$ dont l'hypoténuse est $\sin\beta$ et l'angle en B est α ; donc $BI = \cos\alpha \, \sin\beta$. Pour PP', on applique le théorème de Thalès aux triangles $[OPP']$ et $[OAA']$ après avoir calculé OP dans le triangle rectangle $[OPB]$.

Pour l'identité $\cos\beta = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$, on applique la formule pour $\sin(\alpha+\beta)$ avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et en remplaçant β par $-\beta$. $\square$

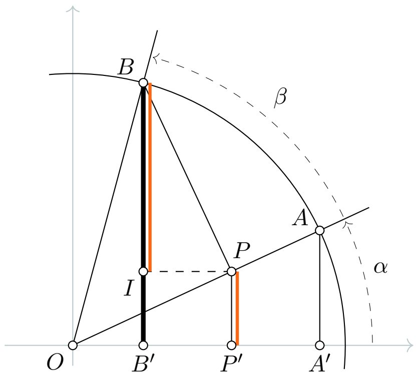


Figure 7: Les points A et B correspondent aux angles orientés de mesures α et $\alpha+\beta$ respectivement. La longueur du segment noir épais, BB', est égale à $\sin(\alpha+\beta)$. Cette longueur est la somme des longueurs des deux segments verticaux rouges.

Corollaire 2.4 (addition et différence)**.** *Pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, on a*

i) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$

ii) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta$

iii) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta}$.

Démonstration. Pour la première formule on a successivement :

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) && \text{(le cas particulier de la proposition 2.3)}\\
&= \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + (-\beta)\right)\\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\beta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta) && \text{(la proposition 2.3)}\\
&= \cos\alpha\,\cos(-\beta) + \sin\alpha\,\sin(-\beta) && \text{(le cas particulier de la proposition 2.3)}\\
&= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta.
\end{aligned}$$

La deuxième formule est la première dans laquelle on remplace β par $-\beta$ et on utilise les parités de sinus et cosinus.

Enfin, la formule pour tangente découle de celles pour sinus et cosinus et de la définition de la tangente, $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$. $\square$

Exemple. Comment peut-on trouver une expression exacte pour $\cos\frac{5\pi}{12}$? Comme

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{8\pi - 3\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4},$$

on a

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}\,\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{3}\,\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Corollaire 2.5 (duplication). *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

i) $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$

ii) $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Ces formules découlent des formules d'addition pour sinus et cosinus dans lesquelles on pose $\beta = \alpha$. Il est utile de remarquer qu'en utilisant la relation $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, la duplication pour le cosinus devient successivement

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Exercice. En utilisant la formule de l'addition pour sinus avec $\beta = 2\alpha$, montrer que

$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha. \tag{2.1}$$

Les formules de doublement de l'angle pour cosinus obtenues précédemment, lues de droite à gauche, fournissent les formules dites de linéarisation. (Une formule de linéarisation est une formule dans laquelle un produit de fonctions trigonométriques en θ s'exprime comme une somme de sinus et cosinus de multiples de θ.)

Corollaire 2.6 (linéarisation). *Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)) \quad \textit{et} \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha)).$$

Exemple. Comment peut-on trouver une expression exacte pour $\sin\frac{\pi}{10}$? Nous utiliserons les formules de doublement et triplement d'angle. Pour commencer, nous savons que

$$\sin\frac{2\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{10}\right) = \cos\frac{3\pi}{10}.$$

Alors, d'après le corollaire 2.5 i) et la formule similaire à (2.1) pour cosinus (à établir), l'égalité ci-dessus devient

$$2\sin\frac{\pi}{10}\,\cos\frac{\pi}{10} = 4\cos^3\frac{\pi}{10} - 3\cos\frac{\pi}{10}.$$

En divisant par $\cos\frac{\pi}{10}$, nous obtenons

$$2\sin\frac{\pi}{10} = 4\cos^2\frac{\pi}{10} - 3 = 1 - 4\,\sin^2\frac{\pi}{10},$$

c'est-à-dire que $\sin\frac{\pi}{10}$ vérifie l'équation quadratique (de second degré)

$$4\sin^2\frac{\pi}{10} + 2\sin\frac{\pi}{10} - 1 = 0.$$

Les racines de $4x^2+2x-1=0$ sont $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Donc

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Exemple. Le calcul d'une primitive de $\sin^3 x$ peut être fait en utilisant la formule qui exprime $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$ (voir plus haut) :

$$\int \sin^3 x\,dx=\int \frac{1}{4}\Big(3\sin x-\sin(3x)\Big)dx=-\frac{3\cos x}{4}+\frac{\cos(3x)}{12}+C.$$

Évidemment, on aurait pu arriver au même résultat en utilisant l'intégration par parties, mais le calcul serait moins direct.

Plus généralement, en utilisant les formules d'addition et la parité des fonctions trigonométriques, nous pouvons passer d'un produit de sinus et cosinus à une somme de sinus et de cosinus. (On dit que le produit a été linéarisé.)

Corollaire 2.7 (produit-somme)**.** *Pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, on a*

i) $\sin\alpha\,\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$

ii) $\cos\alpha\,\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$

iii) $\sin\alpha\,\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$.

Démonstration. Par exemple, pour iii), on utilise les formules d'addition et différence pour cosinus, voir le corollaire 2.4 :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta.\end{aligned}$$

Alors $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\,\sin\beta$. □

Exemple. Une application directe des formules produit-somme apparaît dans le calcul de certaines intégrales. Par exemple

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6}\cos(2x)\cos(8x)\,dx&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}\Big(\cos(6x)+\cos(10x)\Big)\,dx\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\big[\sin(6x)\big]_0^{\pi/6}+\frac{1}{10}\big[\sin(10x)\big]_0^{\pi/6}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{10}\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{20}\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\\ &=-\frac{\sqrt{3}}{40}.\end{aligned}$$

Corollaire 2.8 (somme-produit)**.** *Pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, on a*

i) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

ii) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Démonstration. Pour la preuve on utilise les égalités

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$$

et on calcule l'expression $\sin\alpha + \sin\beta$ en appliquant les formules d'addition et de différence, par exemple. $\square$

Toutes ces formules ne nécessitent pas d'être retenues par cœur ; il est plus judicieux de savoir les déduire de la formule d'addition pour sinus, c'est-à-dire la formule de la proposition 2.3.

Exemple 2.9. On suppose la limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ connue ; voir la deuxième question de l'introduction. On veut calculer la dérivée de sinus en $a \in \mathbb{R}$. On a, d'après le corollaire 2.8 i),

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(a+h) - \sin a}{(a+h) - a} &= \frac{\sin(a+h) + \sin(-a)}{h} \\
&= \frac{1}{h}\, 2\sin\frac{(a+h)+(-a)}{2} \cos\frac{(a+h)-(-a)}{2} \\
&= \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos\left(a + \frac{h}{2}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \cos a.
\end{aligned}$$

On en déduit $\sin'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{(a+h) - a} = \cos a$.

3. Nombres complexes

On définit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes comme étant l'ensemble de tous les nombres qui peuvent être obtenus par multiplication et somme à partir des nombres réels et du symbole i qui vérifie $i^2 = -1$. Alors pour tout nombre complexe z, il existe deux réels a et b tels que

$$z = a + ib.$$

Le symbole i est assujetti aux mêmes règles de calcul qu'un nombre réel ; par conséquent on obtient les opérations de somme et de multiplication des nombres complexes suivantes :

$$\begin{aligned}
(a+ib) + (a'+ib') &= (a+a') + i(b+b') \\
(a+ib)\cdot(a'+ib') &= (aa'-bb') + i(ab'+a'b).
\end{aligned}$$

Remarque 3.1. À première vue, l'expression pour la multiplication de deux nombres complexes peut paraître compliquée. Mais, en utilisant la relation $i^2 = -1$, elle reflète les propriétés usuelles des opérations avec les nombres réels (commutativité et associativité de $+$ et $\cdot$, et distributivité de $\cdot$ sur $+$) :

$$\begin{aligned}
(a+ib)\cdot(a'+ib') &= aa' + iab' + iba' + i^2bb' = aa' + iab' + ia'b - bb' \\
&= (aa'-bb') + i(ab'+a'b).
\end{aligned}$$

Quelques questions

1. Jusqu'à quel point les nombres complexes "ressemblent-ils" aux nombres réels ? Plus précisément, pour $z \neq 0$, peut-on définir le nombre complexe $\frac{1}{z}$? Existe-t-il une relation d'ordre pour les nombres complexes ?
2. Est-ce que le monde qui nous entoure nous montre des nombres complexes ? Il semble que les distances, le temps, ou autres quantités physiques soient quantifiés par les nombres réels. Quelle est la place ou le rôle des nombres complexes dans le monde réel ? Peut-on voir les nombres complexes ?
3. Quelle est l'utilité (mathématique par exemple) des nombres complexes ?

Notre cours essayera de répondre à la première question et effleurera seulement les réponses pour les deux autres. Les nombres complexes existent dans notre culture depuis à peu près 450 ans. Pendant 350 ans, les nombres complexes ont manifesté leur magie seulement par leurs rôles mathématiques (la résolution des équations polynomiales à coefficients réels ou complexes, la différentiabilité complexe. . .). Il est surprenant de voir que la physique quantique (découverte pendant le XX$^{\text{e}}$ siècle) est fondamentalement gouvernée par ces nombres.

Écrire $z = a + ib$ nécessite l'utilisation des nombres réels a et b pour représenter le nombre complexe z. Cette écriture s'appelle la *forme algébrique* du nombre complexe. Elle nous permet, non seulement de comprendre les opérations d'addition et de multiplication des nombres complexes, mais aussi de représenter graphiquement les nombres complexes : le couple de nombres réels (a, b) est le point de coordonnées (a, b) dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé usuel $(O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y)$.

Nous venons d'établir un dictionnaire entre $\mathbb{C}$ et le plan $\mathbb{R}^2$ muni de $(O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y)$. Pour passer dans un sens ou dans l'autre dans ce dictionnaire, on dit :

- au nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point $M_z = (a, b)$
- au point $P = (a, b)$ on associe le nombre complexe $z_P = a + ib$ nommé l'*affixe* du point P.

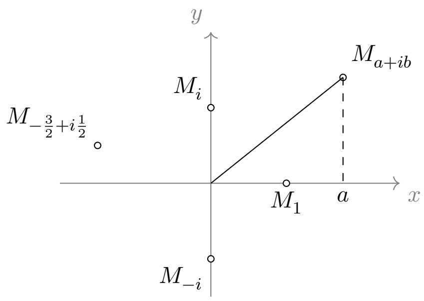


Figure 8: Représentation graphique des nombres complexes écrits sous forme algébrique. L'axe des abscisses correspond aux nombres réels et l'axe des ordonnées aux nombres imaginaires purs. *On a identifié le nombre complexe $a + ib$ au point (a, b) du plan $\mathbb{R}^2$.* Le plan muni du repère (O, e_x, e_y), après cette identification est appelé *plan complexe.* Il faut penser au cas des nombres réels ; ceux-ci sont identifiés graphiquement au points d'une droite munie d'un repère orthonormé (les points correspondant à 0 et à 1). Une telle droite est appelée *droite réelle* et, on ne distingue plus les points et les nombres correspondant.

Définition. Le *module* du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre réel positif ou nul $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Le *conjugué* du nombre complexe $z = a+ib$ est le nombre complexe $\overline{z} = a-ib$.

Du point de vue graphique, le module de z représente la distance de l'origine au point M_z (ou, en se plaçant dans le plan complexe, la distance de O à z). De plus, on vérifie par un calcul direct :

Lemme 3.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*
(1) $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$
(2) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Exercice. Pour deux nombres complexes quelconques a, b, est-ce que

(i) $|a\,b| = |a|\,|b|$? (ii) $|a + b| = |a| + |b|$

Si la réponse est affirmative, donner une démonstration ; si elle est négative, donner un contre-exemple.

La deuxième affirmation du lemme 3.2 nous permet de voir que pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, il existe $\frac{1}{z} \in \mathbb{C}$. Plus précisément ,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

En particulier, si $|z| = 1$, alors $\bar{z} = 1/z$.

Formes trigonométrique et exponentielle des nombres complexes

La forme algébrique d'un nombre complexe nous permet de comprendre et visualiser facilement l'addition des nombres complexes — on additionne séparément les parties réelles et les parties imaginaires. Du point de vue graphique, pour obtenir $z + z'$ à partir de z et z', on applique la règle du parallélogramme : le point $M_{z+z'}$ est le quatrième sommet du parallélogramme formé à partir des points O, M_z et $M_{z'}$. Pour comprendre la multiplication, on a besoin d'introduire la *forme trigonométrique* d'un nombre complexe non nul.

Un point dans le plan est repéré, ou bien par ses coordonnées cartésiennes, ou bien par ses coordonnées polaires. Ce sont les coordonnées polaires — la distance du point à l'origine et une mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_x, \vec{OP})$ — qui donnent la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

$$z = a + ib = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right) = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$. La mesure θ n'est pas uniquement définie mais **elle l'est modulo** 2π ; voir la remarque 2.1. On notera par $\mathrm{Arg}(z)$ la mesure principale de l'angle orienté concerné, c'est-à-dire $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$, et on l'appellera l'*argument principal* de z.

Lemme 3.3. *Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, alors*

$$zz' = \rho\rho'\big(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\big).$$

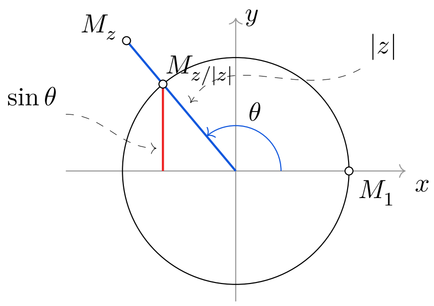


Figure 9: La forme trigonométrique du nombre complexe $z = a + ib$ est obtenue en utilisant le module de $|z|$ et l'argument θ pour exprimer a et b à travers les fonctions cos et sin respectivement. Sur la figure apparaît aussi le cercle trigonométrique.

Démonstration. En calculant le produit des deux nombres complexes, on a

$$\begin{aligned} zz' &= \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot\rho'(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \rho\rho'\big((\cos\theta\,\cos\theta' - \sin\theta\, sin\theta') + i(\sin\theta\,\cos\theta' + \cos\theta\,\sin\theta')\big) \\ &= \rho\rho'\big(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\big). \end{aligned}$$

□

Par conséquent, la multiplication des nombres complexes s'exprime naturellement en utilisant la forme trigonométrique. Explicitement, d'après le lemme précédent,

$$\begin{aligned} &|zz'| = |z|\,|z'| \\ &\operatorname{Arg}(zz') = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z') \mod 2\pi. \end{aligned}$$

Corollaire 3.4. *Soient $z, z' \neq 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$|z|^n = |z|^n \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg}(z) \mod 2\pi.$$

En particulier,

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(z') \mod 2\pi \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{Arg}(\bar{z}) = -\operatorname{Arg}(z).$$

Démonstration. On applique le lemme précédent et le fait que si $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors $\bar{z} = |z|(\cos\theta - i\sin\theta)$. □

Le comportement de l'argument lors de la multiplication est semblable au comportement des exposants lors de la multiplication de deux nombres réels écrits sous forme exponentielle. Ceci suggère la *forme exponentielle* des nombres complexes : en notant $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module 1, $\cos\theta + i\sin\theta$, on a

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\,e^{i\theta}. \tag{3.1}$$

Noter que

$$e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} \qquad \text{et que} \qquad e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta} = 1.$$

Remarque 3.5. Le symbole e dans la notation ci-dessus est le nombre d'Euler — apparaissant pour la première fois dans les travaux de John Napier sur les logarithmes. À vrai dire, (3.1) est plus qu'une notation, d'où l'utilisation du nombre d'Euler, mais pour l'instant nous ne pouvons pas justifier l'égalité $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ sur laquelle repose notre construction. Pour donner une idée du cheminement, il faut se rappeler que e est la somme d'un nombre **infini** de nombres réels,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots .$$

Alors la fonction exponentielle est définie par

$$x \mapsto e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cette définition s'étend naturellement à $\mathbb{C}$. Il faut, par la suite, arriver à une présentation similaire de sin et cos comme sommes infinies et, pour finir, établir l'égalité recherchée. Par exemple, il faut montrer que la définition géométrique du sinus est équivalente à $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$!

L'identité $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ peut être utilisée dans les deux sens. Par exemple, nous avons vu que si nous remplaçons θ par $-\theta$, alors $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$. En prenant la somme et, par la suite, la différence des deux identités pour $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, nous arrivons aux *formules d'Euler*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exemple 3.6 (duplication de l'angle)**.** Obtenons les formules de doublement de l'angle pour les fonctions trigonométriques en utilisant la forme exponentielle des nombres complexes. On a successivement,

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \frac{1}{2}(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) = \frac{1}{2}((e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 - 2) \\ &= \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{2} - 1 = \frac{4\cos^2\theta}{2} - 1 = 2\cos^2\theta - 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sin(2\theta) &= \frac{1}{2i}(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= \frac{1}{2i}\,(2\cos\theta)\,(2i\sin\theta) = 2\sin\theta\,\cos\theta. \end{aligned}$$

Notons que nous aurions pu choisir un autre chemin pour ces calculs ; par exemple

$$\begin{aligned} \sin(2\theta) &= \frac{1}{2i}(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) = \frac{1}{2i}((e^{i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^2) \\ &= \frac{1}{2i}((\cos\theta + i\sin\theta)^2 - (\cos\theta - i\sin\theta)^2) \\ &= \frac{1}{2i}(\cos^2\theta + 2i\sin\theta\,\cos\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta + 2i\sin\theta\,\cos\theta + \sin^2\theta) \\ &= \frac{4i\sin\theta\,\cos\theta}{2i} \end{aligned}$$

et de même pour $\cos(2\theta)$.

Dans le corollaire 2.5 nous avons obtenu ces formules en utilisant des arguments trigonométriques. Dans l'exemple précédent l'argument est basé sur le calcul algébrique usuel (avec des nombres réels **et** complexes). Ces calculs se généralisent pour obtenir les formules pour $\sin(n\theta)$ et $\cos(n\theta)$, pour tout entier $n \geq 2$. Ils représentent la relation qui existe entre la trigonométrie et les nombres complexes. Le résultat central qui illustre ce lien est l'identité de de Moivre (1667-1754) :

Théorème 3.7 (de Moivre)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a*

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

Démonstration. On a déjà donné un argument sur la page précédente. En utilisant la forme exponentielle des nombres complexes, on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

□

Remarquons que pour $n = 2$ nous retrouvons les formules de doublement de l'angle: on a

$$\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\sin\theta\,\cos\theta - \sin^2\theta$$

et il suffit d'identifier les parties réelles et imaginaires.

Exemple 3.8. Établissons les identités suivantes :

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} - e^{i\varphi} = 2i\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}.$$

Nous allons présenter trois solutions pour ces identités. Il n'y a pas de hiérarchie entre elles, c'est seulement une question de point de vue.

Première méthode. On calcule de droite à gauche :

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}} &= 2\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) + i\,\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\right] \\ &= 2\,\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) + 2i\,\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

Or, d'après le corollaire 2.7, on a $2\,\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\,\cos\frac{\theta-\varphi}{2} = \cos\theta + \cos\varphi$ et $2\,\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\,\sin\frac{\theta-\varphi}{2} = \sin\theta + \sin\varphi$. Le résultat s'ensuit.

Deuxième méthode. Les nombres complexes $e^{i\theta}$ et $e^{i\varphi}$ sont tous les deux de module 1. On remarque que l'argument de leur somme est égale à $\theta + \frac{\varphi-\theta}{2} = \frac{\theta+\varphi}{2}$ modulo 2π. Il reste à calculer le module de leur somme. Comme

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = (\cos\theta + \cos\varphi) + i(\sin\theta + \sin\varphi),$$

alors

$$\begin{aligned} |e^{i\theta} + e^{i\varphi}|^2 &= (\cos\theta + \cos\varphi)^2 + (\sin\theta + \sin\varphi)^2 \\ &= 2 + 2\,\cos\theta\,\cos\varphi + 2\,\sin\theta\,\sin\varphi \\ &= 2(1 + \cos(\theta - \varphi)) \\ &= 4\cos^2\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

Troisième méthode. Les deux méthodes précédentes s'appuient fortement sur les formules trigonométriques. Ici, on utilisera plus la forme exponentielle d'un nombre complexe :

$$e^{i\theta}+e^{i\varphi}=e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(e^{i\theta-i\frac{\theta+\varphi}{2}}+e^{i\varphi-i\frac{\theta+\varphi}{2}}\right)=e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}}+e^{-i\frac{\theta-\varphi}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}.$$

La dernière égalité est la formule d'Euler (pour la somme).

Les racines de l'unité

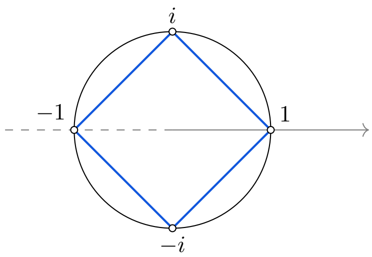
Le nombre complexe i vérifie la relation $i^2=-1$. L'argument principal de i est $\frac{\pi}{2}$ et cette relation, au niveau des arguments, devient

$$\pi=\operatorname{Arg}(-1)=2\operatorname{Arg}(i).$$

De même, les identités $i^3=-i$ et $i^4=1$ donnent

$$-\frac{\pi}{2}=\operatorname{Arg}(-i)=3\operatorname{Arg}(i)\mod 2\pi\quad\text{et}\quad 0=\operatorname{Arg}(1)=4\operatorname{Arg}(i)\mod 2\pi$$

respectivement. Graphiquement, dans le plan complexe[3], les quatre nombres complexes i, -1, $-i$ et 1 forment les sommets d'un carré inscrit dans le cercle trigonométrique, dont un des sommets est le nombre réel 1.



Ces quatre nombres complexes sont les seuls qui vérifient l'identité $z^4=1$. Ils sont appelés les *racines quatrièmes de l'unité (ou d'ordre 4)*. En général, pour tout entier $n\geq 1$, on dit que $\xi\in\mathbb{C}$ est une racine n-ème de l'unité si $\xi^n=1$. Toutefois, pour $n=2$, on parle de racines carrées et pour $n=3$ de racines cubiques de l'unité. Par exemple ±1 sont les racines carrées de l'unité.

Même si la preuve du lemme suivant est très simple — utilisation de la forme exponentielle des nombres complexes — elle sera très utile par la suite.

Lemme 3.9. *Le nombre complexe ξ tel que $|\xi|=1$ est une racine n-ème de l'unité si et seulement si $n\operatorname{Arg}(\xi)$ est un multiple entier de 2π.*

Corollaire 3.10. *Les racines n-èmes de l'unité sont au nombre de n et, dans le plan complexe, sont les sommets du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique et dont un des sommets est 1. Explicitement,*

$$\xi_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}},\quad k\in\{0,1,\dots,n-1\}.x$$

[3]En parlant des points du plan $\mathbb{R}^2$ et de leurs affixes, on utilise le dictionnaire entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. En parlant du plan complexe, on identifie un point avec sa *coordonnée complexe*.

Démonstration. Nous esquissons la preuve pour $n = 3$, le cas général étant similaire mais plus abstrait. Il est évident que $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et 1 sont des racines cubiques de l'unité et forment un triangle équilatéral. Il faut montrer qu'il n'existe pas d'autre racine cubique. Soit θ l'argument principal d'une telle racine. D'après le lemme 3.9,

$$3\theta = 0 \mod 2\pi.$$

Mais $\theta \in]-\pi, \pi]$, donc $-3\pi < 3\theta \leq 3\pi$. Il s'ensuit que les seules valeurs possibles de 3θ sont -2π, 0 et 2π. □

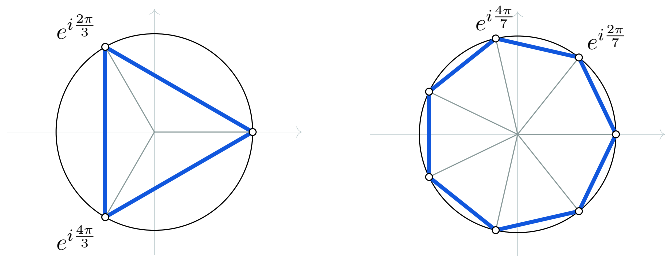


Figure 10: À gauche, les racines cubiques de l'unité. À droite les racines 7-èmes de l'unité. Elles forment les sommets d'un heptagone régulier.

Remarque 3.11. L'écriture explicite (probablement la plus simple) des racines n-ème de l'unité donnée dans le corollaire précédent montre que l'utilisation de l'argument dans la forme exponentielle d'un nombre complexe ne doit pas se limiter à l'argument principal.

4. Le binôme de Newton

Le but de cette section est de comprendre la formule du binôme de Newton : pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n,$$

où chaque *coefficient binomial* $\binom{n}{k}$ est donné par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n-k+1}{1}\,\frac{n-k+2}{2}\cdots\frac{n-1}{k-1}\,\frac{n}{k}. \tag{4.1}$$

Évidemment, $(a+b)^0 = 1$, $(a+b)^1 = a+b$ et $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. On vérifie aisément les égalités (4.1) dans chacun de ces cas. Pour aller plus loin, on calcule le développement de $(a+b)^n$ en utilisant celui de $(a+b)^{n-1}$. Explicitement, pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= (a^3+2a^2b+ab^2)+(a^2b+2ab^2+b^3)\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Pour $n = 4$, on a

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\\ &= (a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3)+(a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4)\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.\end{aligned}$$

De nouveau (4.1) est simple à vérifier. Par exemple,

$$6 = \binom{4}{2} = \frac{4-2+1}{1}\,\frac{4-2+2}{2} = \frac{3\cdot 4}{2}.$$

En général, la formule du binôme est obtenue par récurrence. On la suppose vraie pour $n-1$. Alors

$$\begin{aligned}(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1} &= (a+b)\left[\tbinom{n-1}{0}a^{n-1}+\tbinom{n-1}{1}a^{n-2}b+\cdots+\tbinom{n-1}{n-1}b^{n-1}\right]\\ &= \tbinom{n-1}{0}a^n+\tbinom{n-1}{1}a^{n-1}b+\cdots+\tbinom{n-1}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+\tbinom{n-1}{n-1}ab^{n-1}\\ &\qquad+\tbinom{n-1}{0}a^{n-1}b+\cdots+\tbinom{n-1}{k-1}a^{n-k}b^k+\cdots+\tbinom{n-1}{n-2}ab^{n-1}+\tbinom{n-1}{n-1}b^n\\ &= \tbinom{n}{0}a^n+\tbinom{n}{1}a^{n-1}b+\tbinom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\tbinom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+\tbinom{n}{n}b^n\end{aligned}$$

avec

$$\binom{n}{0} = \binom{n-1}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1} = 1$$

et

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{pour tout} \quad 1 \le k \le n-1. \tag{4.2}$$

Il reste à vérifier les identités (4.1) en les supposant connues si on remplace n par $n-1$. On obtient, en utilisant (4.2),

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.\end{aligned}$$

Les coefficients binomiaux se calculent, ou bien directement par la formule (4.1), ou bien de proche en proche en utilisant le *triangle de Pascal* (voir la figure (11)), c'est-à-dire en mettant en place l'identité 4.2. Une fois le binôme de Newton établi et l'identité (4.1) démontrée, nous pouvons en déduire quelques propriétés utiles des coefficients binomiaux ; la justification de ces propriétés découle, ou bien du triangle de Pascal, ou bien de (4.1).

Proposition 4.1. *Les coefficients binomiaux satisfont aux propriétés suivantes :*

- $\binom{n}{n} = 1$ *et* $\binom{n}{k} = 0$ *pour tout* $k > n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ *pour tout* $0 \le k \le n$
- $\binom{n}{k}$ *est le nombre des sous-ensembles à* k *éléments d'un ensemble à* n *éléments.*

Pour finir cette partie concernant le binôme de Newton, essayons de faire apparaître dans ce contexte les racines de l'unité étudiées plus haut. En prenant $a = 1$ et $b = x$ dans la formule du binôme, nous obtenons l'expression

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

n \ k	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	1	4	6	4	1

n \ k	0	1	2	3	4
0	$\binom{0}{0}$	0	0	0	0
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$	0	0	0
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	0	0
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$	0
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

Figure 11: Le triangle de Pascal. Notons $P_{n,k}$ la valeur de la case se trouvant sur la ligne n et la colonne k. Les valeurs des cases de la première ligne sont connues au départ : $P_{0,0} = 1$, $P_{0,1} = 0$, $P_{0,2} = 0, \dots$ Les valeurs des lignes suivantes (correspondant à $n = 1, 2, \dots$) s'obtiennent à partir des valeurs précédentes. Plus précisément, $P_{n,k} = P_{n-1,k} + P_{n-1,k-1}$. Voir les cases grisées dans la figure. Les valeurs ainsi construites sont les coefficients binomiaux, c'est-à-dire $\binom{n}{k} = P_{n,k}$, puisque $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En interprétant x comme un symbole, l'expression précédente devient une égalité entre deux polynômes de degré n. On y reviendra dans la section suivante. Si on pose $x = 1$, on obtient l'identité remarquable

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}. \tag{4.3}$$

Et si on pose $x = -1$, on arrive à

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}. \tag{4.4}$$

En effectuant l'addition des identités (4.3) et (4.4), on obtient la somme des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ avec k pair, c'est-à-dire

$$2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n} \quad \text{si } n \text{ est pair,}$$

ou

$$2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n-1} \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Remarque 4.2 (Projet)**.** L'identité précédente, c'est-à-dire la somme des coefficients binomiaux avec k pair, est obtenue en remplaçant x par les racines carrées de l'unité. Comment calculer la somme $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$?

Essayer d'imaginer le calcul de $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots$ et effectuer le en détails.

Exercice. Montrer que la suite $(a_n)_n$ définie par $a_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots$ pour tout entier $n \geq 1$ est la suite de Fibonacci. (Voir l'introduction pour la définition de la suite de Fibonacci.)

Remarque 4.3. L'expression $\frac{n-k+1}{1}\frac{n-k+2}{2}\cdots\frac{n}{k}$ qui calcule la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est un produit de k facteurs. Le numérateur de chaque facteur est $n-k+j$, avec $1 \leq j \leq k$. Cette expression peut être étendue à tout $n \in \mathbb{R}$. On obtient de cette façon une application

$$x \mapsto \binom{x}{k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

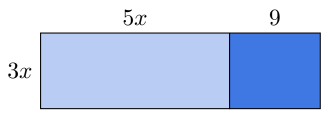
Il faut savoir que la formule du binôme établie par Newton était énoncée pour $n \in \mathbb{Q}$! Par exemple pour $n = \frac{1}{2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{2}} &= \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots .\end{aligned}$$

Le membre de droite est une somme infinie de termes ; on parle alors de *série*, notion qui sera étudiée dans un cours d'analyse.

5. Polynômes à coefficients réels ou complexes

Les polynômes sont utilisés pour représenter mathématiquement des valeurs qui sont des sommes de puissances de variables. Par exemple, si deux rectangles ont les côtés indiqués dans la figure ci-dessous,



on cherche à déterminer leurs dimensions pour que l'aire totale soit égale à 90. Pour ce faire, on calcule l'aire totale donnée par la formule

$$A(x) = 3x \cdot (5x+9) = 15x^2 + 27x$$

et, pour finir, on résout l'équation $A(x) = 90$.

Définition. On appelle polynôme en X à coefficients réels (ou complexes) de degré $n \in \mathbb{N}$ toute expression de la forme

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et $a_n \neq 0$. L'ensemble de tous les polynômes en X à coefficients réels (respectivement complexes) est noté $\mathbb{R}[X]$ (respectivement $\mathbb{C}[X]$).

Dans cette définition X est un symbole et il aurait pu être noté Y, ou T, ou x ... Quoique cette dernière notation prête à confusion car, d'habitude, on note x une inconnue réelle !

Les a_j dans l'expression du polynôme P ci-dessus sont appelés les coefficients de P ; a_n est dit le *coefficient dominant*. Le polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. On dit qu'il est de degré $-\infty$ et on écrit $\deg(0) = -\infty$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur de P en x est définie par $P(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$, c'est-à-dire on remplace le symbole X par le nombre réel x. Si x parcourt l'ensemble des nombres réels, alors à P on associe une correspondance de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

$$f_P : x \mapsto P(x).$$

En d'autres termes, on obtient la fonction[4] f_P appelée la *fonction polynomiale associée à* P qui fait correspondre à $x \in \mathbb{R}$ l'évaluation de P en x.

Définition. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On appelle *racine réelle* de P un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a) = 0$.

On donne la même définition pour une racine complexe. Un nombre $a \in \mathbb{C}$ est une racine complexe du polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ si $P(a) = 0$. Si P est un polynôme à coefficients réels, alors P peut être vu comme polynôme à coefficients complexes, car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; on parle, dans ce contexte, de racine complexe d'un polynôme réel.

Polynômes de degré 2*. Racines*

La forme générale d'un polynôme réel de degré 2 est $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour un tel polynôme il existe une formule permettant de calculer ses racines. On a, en forçant un carré,

$$\begin{aligned} P = aX^2 + bX + c &= a\Big(X^2 + \frac{b}{a}\,X + \frac{c}{a}\Big) \\ &= a\Big[\Big(X^2 + \frac{b}{a}\,X + \frac{b^2}{4a^2}\Big) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\Big] \\ &= a\Big[\Big(X + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big]. \end{aligned}$$

Par conséquent P a les racines (éventuellement complexes)

$$r_1 = \frac{1}{2a}\big(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\big) \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1}{2a}\big(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\big). \tag{5.1}$$

L'expression $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelée le *discriminant* de l'équation considérée. Comme on a supposé les coefficients réels, la signification de $\sqrt{\Delta}$ est la suivante :

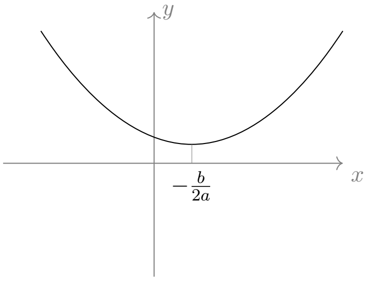
- la racine carrée positive ou nulle $\sqrt{\Delta}$ quand $\Delta \geq 0$
- le nombre imaginaire $i\sqrt{-\Delta}$ quand $\Delta < 0$.

Les deux racines sont égales si et seulement si $\Delta = 0$) ; on dit que P admet une racine double ou *de multiplicité* 2.

Il faut remarquer que les formules donnent aussi les racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients complexes — l'argument qui nous a permis d'obtenir les formules n'utilisait pas le fait que a, b et c étaient réels. Dans ce cas, pour fixer les idées, on supposera que $\sqrt{\Delta}$ représente la racine carrée (complexe) de Δ dont l'argument principal appartient à $[0, \pi]$.

[4]Pour des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, la correspondance *polynôme* $\leftrightarrow$ *fonction polynomiale* est bijective. En d'autres termes, même s'ils sont des objets mathématiques différents, le choix du point de vue pour travailler avec eux devient une question de goût ou dépend du contexte.

Remarque 5.1. Si P est un polynôme à coefficients réels, alors le comportement de la fonction polynomiale associée $f_P : x \mapsto y = P(x)$ est contrôlé par le signe du coefficient dominant a et par le signe du discriminant, $\Delta = b^2 - 4ac$. Par exemple, pour la première parabole dans la figure 12 on a $-\frac{b}{2a} > 0$; pour la deuxième, l'abscisse du sommet est négative.



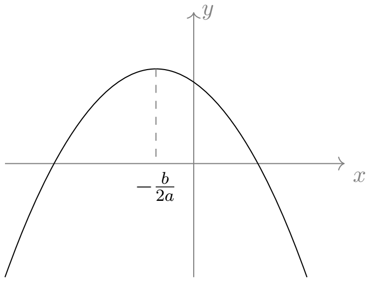
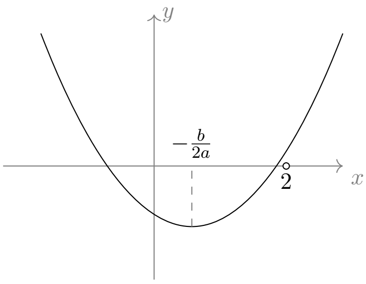
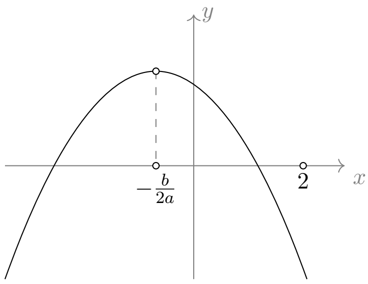


Figure 12: Les cas $a > 0$, $\Delta < 0$ et $a < 0$, $\Delta > 0$ respectivement.

Exemple 5.2. Toute condition sur les racines d'un polynôme de degré 2 correspond à une ou plusieurs conditions sur ses coefficients. On trouve ces conditions en étudiant toutes les possibilités pour qu'une parabole dont l'axe de symétrie est vertical corresponde au graphe de la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$.

Par exemple, si on veut connaître les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients de $P = aX^2 + bX + c$ pour que P admette deux racines réelles distinctes plus petites que 2, nous remarquons que les seules esquisses de paraboles pour le graphe de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ sont les suivantes :





Après quelques moments de réflexion, on en déduit les conditions *nécessaires et suffisantes*

$$\Delta > 0, \quad aP(2) > 0 \quad \text{et} \quad -\frac{b}{2a} < 2.$$

Essayer d'obtenir ces conditions en traduisant par calcul direct les hypothèses.

Racines des polynômes à coefficients complexes

Dans cette section nous voulons comprendre un résultat central de la théorie des polynômes à coefficients complexes, le théorème fondamental de l'algèbre. En résumé, il dit que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, il existe $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$P = a_n(X - r_1)(X - r_2)\cdots(X - r_n), \tag{5.2}$$

où a_n est le coefficients dominant de P. Les racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ne sont pas nécessairement distinctes. Il faut voir ce résultat comme une "généralisation" de (5.1) en degré n. On rappelle que pour un polynôme de degré 2, on a montré que

$$aX^2 + bX + c = a(X - r_1)(X - r_2),$$

avec des expressions explicites pour r_1 et r_2. En général, il n'existe pas de formule pour exprimer une racine d'un polynôme de degré ≥ 5, d'où la puissance, la difficulté et la profondeur du théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème 5.3 (fondamental de l'algèbre — Gauss-d'Alembert)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Alors P admet n racines complexes (comptées avec leurs multiplicités).*

Esquisse de preuve. La partie difficile et profonde est de montrer que P admet une racine complexe. On peut supposer P unitaire et $a_0 \neq 0$; sinon, 0 est une racine de P.

On note $z \mapsto f_P(z)$ la fonction polynomiale associée à P, $f_P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On considère $\mathcal{C}_R$ et $\mathcal{C}_\varepsilon$ deux cercles dans le plan complexe (des z) centrés à l'origine et de rayons R et ε respectivement, avec[5] $R \gg 0$ et $0 < \varepsilon \ll 1$. Alors (voir la figure 13)

— sur les points de $\mathcal{C}_R$ la fonction $f_P(z)$ se comporte à peu près comme z^n ; par conséquent l'image de $\mathcal{C}_R$ est une courbe dans le voisinage du cercle de rayon R^n, courbe qui tourne donc n fois autour de l'origine

— sur les points de $\mathcal{C}_\varepsilon$ la fonction $f_P(z)$ se comporte à peu près comme a_0, le terme constant de P ; par conséquent, l'image de $\mathcal{C}_\varepsilon$ est une courbe dans le voisinage de a_0, donc qui ne tourne pas autour de l'origine

— en déformant le cercle $\mathcal{C}_\varepsilon$ en $\mathcal{C}_R$ (on considère les cercles $\mathcal{C}_r$ avec $\varepsilon \leq r \leq R$) on passe, dans le plan complexe des images, d'une courbe qui ne tourne pas autour de l'origine, à une courbe qui tourne n fois autour de l'origine.

Il s'ensuit qu'il existe un r_0 pour lequel l'image du cercle $\mathcal{C}_{r_0}$ par $f_P(z)$ est une courbe qui contient l'origine. Donc il existe $z_0 \in \mathcal{C}_{r_0}$ tel que $P(z_0) = f_P(z_0) = 0$.

Pour montrer que P admet exactement n racines complexes — non nécessairement distinctes, c'est-à-dire dans le langage qui sera introduit plus tard, comptées avec leurs multiplicités — on applique la proposition 5.6 en prenant pour a la racine dont on vient d'établir l'existence. □

La dernière partie de cette preuve fait appel à un résultat de divisibilité. Ceci nous pousse a examiner les opérations que nous pouvons réaliser avec les polynômes. Introduisons les opérations naturelles d'addition et de multiplication des polynômes — elles doivent coïncider avec les opérations d'addition et de multiplication des nombres réels quand on remplace les polynômes par les fonctions correspondantes. Pour les comprendre, il suffit de savoir que

$$\begin{aligned} a_j X^j + b_j X^j &= (a_j + b_j) X^j \\ a_j X^j \cdot b_k X^k &= a_j b_k X^{j+k}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la somme est obtenue en additionnant les coefficients de même indice et la multiplication, en multipliant les coefficients et en additionnant les puissances des X corre-

[5] La notation $R \gg 0$ signifie “pour R suffisamment grand” ; la notation $0 < \varepsilon \ll 1$ signifie “pour ε positif et suffisamment petit”.

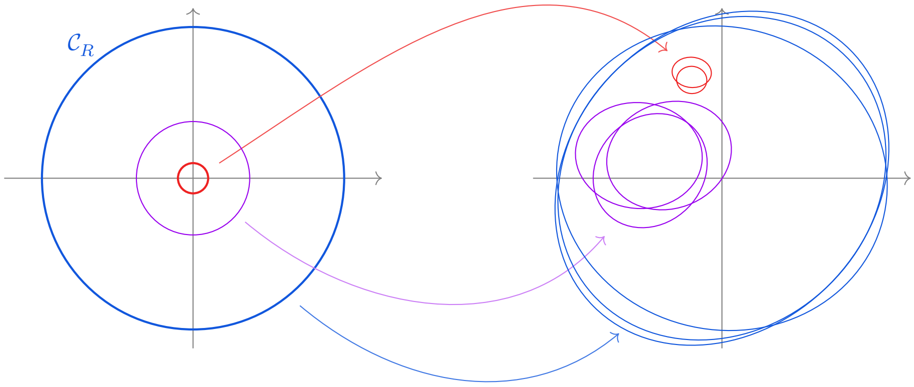


Figure 13: Le comportement de $f_P(z)$ sur des cercles centrés à l'origine. Le cercle bleu est le cercle de rayon R, avec R très grand, le cercle rouge et celui de rayon ε, avec $\varepsilon > 0$ très petit, et le cercle violet est celui de rayon r_0. Son image par $f_P(z)$ contient l'origine du plan complexe des images.

spondantes. Explicitement, sur un exemple, pour la multiplication on a

$$
\begin{aligned}
&(1-2X+3X^2)\left(\frac{1}{2}-X^2+5X^3\right)\\
&\quad = 1\cdot\frac{1}{2}+(-2)\cdot\frac{1}{2}X+\left(1\cdot(-1)+3\cdot\frac{1}{2}\right)X^2+(1\cdot 5+(-2)\cdot(-1))X^3\\
&\qquad +((-2)\cdot 5+3\cdot(-1))X^4+3\cdot 5X^5\\
&\quad = \frac{1}{2}-X+\frac{1}{2}X^2+7X^3-13X^4+15X^5.
\end{aligned}
$$

En général, si $A = a_0+a_1X+\cdots+a_{m-1}X^{m-1}+a_mX^m$ et $B = b_0+b_1X+\cdots+b_{n-1}X^{n-1}+b_nX^n$, alors

$$A\cdot B = c_0 + c_1X + \cdots + c_{m+n-1}X^{m+n-1} + c_{m+n}X^{m+n}$$

où $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0$ pour tout $0 \leq k \leq m+n$.

L'intérêt de la formule générale ci-dessus est la compréhension du comportement du degré par rapport à la multiplication ; pour la somme il suffit de réfléchir au degré de $X + (-X)$, c'est-à-dire au fait que la somme de deux polynômes de degré 1 est un polynôme de degré $-\infty$.

Lemme 5.4. *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors*

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \quad \textit{et} \quad \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q).$$

Théorème 5.5 (division euclidienne)**.** *Soient A et B deux polynômes non nuls. Alors il existe deux polynômes Q (le quotient) et R (le reste) tels que*

$$A = B\,Q + R \quad \textit{avec} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

De plus, les polynômes Q et R sont uniques.

Démonstration. Si $\deg(A) < \deg(B)$, alors on pose $Q = 0$ et $R = A$. Si $\deg(A) = m \geq n = \deg(B)$, alors on note $A_m = A$ et on construit Q en itérant les opérations suivantes :

- Soit A_{m-1} défini par $A_m = BQ_{m-n} + A_{m-1}$ où $Q_{m-n} = \frac{a_m}{b_n} X^{m-n}$. On remarque que $\deg(A_{m-1}) \leq m - 1$.
- Si $\deg(A_{m-1}) \geq \deg(B)$, alors on remplace A_m par A_{m-1} et on construit A_{m-2} de façon analogue.

Après au plus $m - n + 1$ itérations on obtient les égalités ci-dessous,

$$\begin{aligned} A_m &= BQ_{m-n} + A_{m-1} \\ A_{m-1} &= BQ_{m-n-1} + A_{m-2} \\ &\vdots \\ A_n &= BQ_0 + A_{n-1}. \end{aligned}$$

En prenant la somme de ces égalités on obtient

$$A = A_m = B(Q_{m-n} + \cdots + Q_0) + A_{n-1}.$$

On prend $Q = Q_{m-n} + \cdots + Q_0$ et $R = A_{n-1}$.

Pour voir que Q et R sont uniques, on considère des polynômes Q' et R' tels que $A = BQ' + R'$, avec $\deg(R') < \deg(B)$. Comme

$$A = BQ + R = BQ' + R',$$

il s'ensuit que $B(Q - Q') = R' - R$. En considérant le degré, si $Q \neq Q'$, on obtient

$$\deg(B) \leq \deg(B(Q - Q') = \deg(R' - R) \leq \max(\deg(R), \deg(R')) < \deg(B).$$

Donc $Q = Q'$, et, par conséquent, $R = R'$. □

Définition. On dit que B divise A s'il existe un polynôme Q tel que $A = B \cdot Q$.

Il est facile de voir que B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme nul.

Proposition 5.6. *Soit P un polynôme à coefficients réels (respectivement complexes) et soit $a \in \mathbb{R}$ (respectivement $a \in \mathbb{C}$). Alors P est divisible par $X - a$ si et seulement si a est une racine de P (c'est-à-dire $P(a) = 0$).*

Démonstration. On applique la division euclidienne de P par $X - a$. On obtient un quotient Q et un reste R tels que

$$P = (X - a)\,Q + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < 1.$$

On remarque que R est une constante. De plus, en évaluant cette égalité en a elle devient

$$P(a) = (a - a)\,Q(a) + R = R.$$

Donc la division euclidienne de P par $X - a$ s'écrit

$$P = (X - a)\,Q + P(a).$$

L'équivalence de la proposition en découle. □

Définition. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est une racine de P de multiplicité m si $(X-a)^m$ divise P et $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P.

Nous avons invoqué cette proposition dans l'esquisse de la preuve du théorème de Gauss-d'Alembert pour justifier que tout polynôme à coefficients complexes de degré n admet exactement n racines. Regardons quelques exemples.

Exemple 5.7. Le polynôme X^2+1 est un polynôme à coefficients réels. Il n'a aucune racine réelle. Mais comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, nous pouvons le regarder comme polynôme à coefficients complexes et rechercher des racines complexes. On voit que i et $-i$ sont (ses) deux racines et on obtient la décomposition

$$X^2+1 = (X-i)(X+i).$$

Exemple 5.8. Soit $P = X^6+X^4-X^2-1$. On cherche les racines réelles et complexes de P. Pour commencer, on remarque que P est le polynôme $F = T^3+T^2-T-1$ dans lequel on remplace le symbole T par X^2. On commence par chercher les racines de F. On remarque facilement que 1 est une racine de F et que

$$F = (T-1)(T^2+2T+1) = (T-1)(T+1)^2.$$

Donc F admet les racines réelles 1 et -1 avec les multiplicités 1 et 2 respectivement.

En retournant au polynôme P, on a

$$P = (X^2-1)(X^2+1)^2 = (X-1)(X+1)(X-i)^2(X+i)^2.$$

Donc P a seulement deux racines réelles simples, 1 et -1, mais six racines complexes comptées avec leurs multiplicités.

Racines complexes des polynômes réels

Dans l'exemple 5.8, on a vu que pour le polynôme $P = X^6+X^4-X^2-1$ les racines non réelles apparaissent par paires de nombres complexes conjugués. Ce phénomène, rencontré lors de la résolution des équations de degré deux, est général. Plus précisément

Proposition 5.9. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une racine de P, alors $\overline{\xi}$ aussi est une racine de P.*

Démonstration. Soit $P = a_nX^n + \cdots + a_0$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Comme ξ est une racine, on a $P(\xi) = 0$. On passe aux conjugués dans cette identité. On obtient

$$0 = \overline{P(\xi)} = \overline{a_n\xi^n + \cdots + a_0} = \overline{a_n}\,\overline{\xi}^n + \cdots + \overline{a_0} = a_n\,\overline{\xi}^n + \cdots + a_0 = P(\overline{\xi}),$$

donc $\overline{\xi}$ est aussi une racine de P. □

Corollaire 5.10. *Tout polynôme à coefficients réels se décompose en un produit de polynômes à coefficients réels de degré* 1 *ou* 2.

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On considère la décomposition en facteurs de degré 1 sur $\mathbb{C}$ (voir la Proposition 5.6 ou le théorème fondamental de l'algèbre). On garde les facteurs réels (qui correspondent aux racines réelles) et on regroupe par paires (de racines complexes conjuguées) les autres. Si $\xi = a+ib$ est une racine non réelle de P, alors le produit $(X-\xi)(X-\overline{\xi})$ est un polynôme à coefficients réels, car

$$(X-\xi)(X-\overline{\xi}) = (X-a-ib)(X-a+ib) = (X-a)^2 - (ib)^2 = X^2 - 2aX + (a^2+b^2),$$

et il divise P. □

Racines et coefficients

Soit P le polynôme $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ à coefficients complexes ou réels de degré n. On sait que P admet n racines (complexes) comptées avec multiplicités. En particulier, si $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont les racines de P (non nécessairement distinctes), alors

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = P = a_n(X-\xi_1)(X-\xi_2)\cdots(X-\xi_n).$$

Si on développe le membre de droite en effectuant toutes les multiplications, on arrive à réécrire le polynôme P en exprimant chaque coefficient a_k en fonction des racines de P. Explicitement, en regardant seulement les coefficients de X^{n-1} et de $1 = X^0$, on obtient les identités

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -a_n(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) \\ a_0 &= (-1)^n a_n\, \xi_1\xi_2\cdots\xi_n \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \xi_1\xi_2\cdots\xi_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Les relations (5.3) sont deux des n relations entre racines et coefficients d'un polynôme de degré n, appelées relations[6] de Viète.

Regardons les relations de Viète dans les cas particuliers $n = 2$ et $n = 3$. Pour $n = 2$, nous obtenons

$$aX^2 + bX + c = a\big[X^2 - (\xi_1+\xi_2)X + \xi_1\xi_2\big],$$

c'est-à-dire

$$\xi_1 + \xi_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \xi_1\xi_2 = \frac{c}{a}.$$

Pour $n = 3$, de l'égalité

$$a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = a_3\big[X^3 - (\xi_1+\xi_2+\xi_3)X^2 + (\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3)X - \xi_1\xi_2\xi_3\big] \tag{5.4}$$

on obtient

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = -\frac{a_2}{a_3} \\ \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3 = \frac{a_1}{a_3} \\ \xi_1\xi_2\xi_3 = -\frac{a_0}{a_3}. \end{cases}$$

Remarque 5.11. À partir des relations de Viète, nous pouvons trouver la somme des carrés (ou des cubes...) des racines d'un polynôme. Par exemple, pour un polynôme de degré 3, nous avons

$$\begin{aligned} \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = (\xi_1+\xi_2+\xi_3)^2 - 2(\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3) &= \Big(-\frac{a_2}{a_3}\Big)^2 - 2\,\frac{a_1}{a_3} \\ &= \frac{a_2^2 - 2a_1a_3}{a_3^2}. \end{aligned}$$

[6]François Viète a établi les relations entre racines positives et coefficients au XVI^e^ siècle. Les historiens des mathématiques pensent que le principe général a été compris par Albert Girard au XVII^e^ siècle.

Exercice. Déterminer la somme des cubes et des puissances quatrièmes des racines pour un polynôme de degré 2 en fonction de ses coefficients.

Remarque 5.12. Considérons de nouveau l'égalité (5.4), ou plus précisément, après l'avoir divisée par a_3, l'égalité

$$X^3 + \frac{a_2}{a_3}X^2 + \frac{a_1}{a_3}X + \frac{a_0}{a_3} = X^3 - (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)X^2 + (\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3)X - \xi_1\xi_2\xi_3.$$

Nous la divisons de nouveau par $\frac{a_0}{a_3} = (-1)^3\xi_1\xi_2\xi_3$. Elle devient

$$\begin{aligned}\frac{a_3}{a_0}X^3 + &\frac{a_2}{a_0}X^2 + \frac{a_1}{a_0}X + 1\\ &= -\frac{1}{\xi_1\xi_2\xi_3}X^3 + \left(\frac{1}{\xi_2\xi_3} + \frac{1}{\xi_1\xi_3} + \frac{1}{\xi_1\xi_2}\right)X^2 - \left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \frac{1}{\xi_3}\right)X + 1.\end{aligned} \tag{5.5}$$

En identifiant les coefficients de X dans les deux membres, nous en déduisons l'identité

$$\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \frac{1}{\xi_3} = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Cette formule, nous aurions pu l'obtenir immédiatement à partir des relations de Viète en divisant celle donnant $\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3$ par celle donnant $\xi_1\xi_2\xi_3$. Le raisonnement que nous venons de faire nous offre plus d'informations :

- Si P est un polynôme de degré n tel que $P(0) = 1$, alors

$$\frac{1}{\xi} + \cdots + \frac{1}{\xi_n} = -(\text{le coefficient de } X).$$

- Si on considère la fonction $\frac{sin x}{x}$ comme une série (voir la remarque 3.5) ayant une infinité de racines, alors, *il est raisonnable de supposer* que la somme des inverses des racines de $\frac{sin x}{x}$ est égale au coefficient de x multiplié par (-1). Cette idée a été utilisée pour la première fois par Euler pour montrer que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Multiplicité et dérivée

Soit $a \in \mathbb{R}$ une racine de P, un polynôme à coefficients réels. Rappelons que a est une racine de multiplicité $m \geq 1$ si $(X-a)^m$ divise P et $(X-a)^{m+1}$ ne le divise pas. En pratique, pour étudier la multiplicité de la racine a de P, on utilise la dérivée. En définissant la dérivée de P par[7]

$$P' = (a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0)' = na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + a_1,$$

on a le résultat suivant :

Proposition 5.13. *Soit a une racine de P de multiplicité $m \geq 1$. Alors a est une racine de P' de multiplicité $m-1$.*

[7] Cette définition coïncide avec la définition de la dérivée de la fonction polynomiale associée.

Démonstration. Si $P = (X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$, alors

$$P' = m(X - a)^{m-1} Q + (X - a)^m Q' = (X - a)^{m-1}(mQ + (X - a) Q')$$

et $mQ + (X - a) Q'$ évalué en a est égal à $mQ(a) \neq 0$. Donc $(X - a)^m$ ne divise pas P'. $\square$

Corollaire 5.14. *Une racine a de P est de multiplicité $m \geq 1$ si et seulement si*

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \qquad \textit{et} \qquad P^{(m)}(a) \neq 0.$$

6. Fonctions rationnelles et intégration

Le but de cette partie est de répondre à la question suivante : Comment calculer une primitive (ou l'intégrale) d'une fonction rationnelle à coefficients réels, c'est-à-dire d'une fonction

$$x \mapsto f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont des polynômes à coefficients réels ?

Pour y répondre, nous regarderons quelques cas particuliers simples mais importants ; le point technique central est le corollaire 5.10 qui permet de décomposer une fraction rationnelle en *éléments simples*. Sur le même schéma, nous pouvons traiter tous les cas pour lesquels la décomposition de Q en *facteurs irréductibles* de degré 1 et/ou 2 est connue.

Remarque. Rappelons que les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ irréductibles sont les polynômes de degré 1, et que les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racines réelles (c'est-à-dire les trinômes du second degré dont le discriminant est strictement négatif).

À partir de maintenant, nous nous placerons sur un domaine de définition de f sans le préciser.

Exemple 6.1. Le calcul d'une primitive de $\frac{1}{x^2+x+1}$ est basé sur le calcul d'une primitive de $\frac{1}{t^2+1}$. Nous savons que

$$\int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \arctan(t) + C.$$

Alors, en utilisant la forme canonique (le regroupement du carré) rencontrée lors de l'étude de l'équation de degré 2, et en effectuant le changement de variables
$t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\, x + \frac{1}{\sqrt{3}}$, nous avons

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\, dx &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right]^2 + 1}\, dx \\ &= \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan(t) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\, x + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) + C.\end{aligned}$$

(Dans le calcul ci-dessus, le changement de variables a été mis en place deux fois. La première fois on a utilisé aussi l'identité $dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\, dx$ correspondant à $t = \frac{2}{\sqrt{3}}\, x + \frac{1}{\sqrt{3}}$.)

Deux remarques avant de passer à l'exemple suivant. Le résultat de ce calcul ne doit pas être retenu par cœur. Le principe est le même pour toute fonction de la forme $\frac{1}{x^2+ax+b}$ avec le dénominateur sans racine réelle.

Exemple 6.2. Le calcul d'une primitive de $\frac{1}{x^2-3x-4}$ est basé sur la décomposition en facteurs de degré 1 du dénominateur. On a

$$x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4).$$

On cherche deux constantes réelles α et β telles que

$$\frac{1}{x^2-3x-4} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-4}.$$

Ceci est le point important du calcul qui s'appuie sur le théorème 6.4 ! Par la suite, en multipliant les deux membres de cette égalité par $x^2 - 3x - 4$ et en identifiant les coefficients de l'égalité polynomiale qui s'ensuit, nous arrivons à

$$\beta = -\alpha = \frac{1}{5}.$$

La résolution du système pour obtenir α et β peut être faite différemment, pas nécessairement par identification des coefficients. Par exemple, on évalue

$$1 = \alpha(x-4) + \beta(x+1)$$

successivement en $x = 4$ et en $x = -1$ pour obtenir $\beta = \frac{1}{5}$ et $\alpha = -\frac{1}{5}$.

Donc[8]

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-3x-4}\,dx &= -\frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-4}\\ &= -\frac{1}{5}\ln(x+1) + \frac{1}{5}\ln(x-4) + C = \frac{1}{5}\ln\frac{x-4}{x+1} + C.\end{aligned}$$

Exemple 6.3. Soit $f(x) = \frac{10x^2-3x-1}{(x-3)(x^2+1)}$. Pour calculer une primitive de f, on cherche une décomposition de f de la forme

$$\frac{10x^2-3x-1}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{a}{x-3} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

(Voir de nouveau le théorème 6.4.) En éliminant les dénominateurs, on a

$$10x^2 - 3x - 1 = a(x^2+1) + (bx+c)(x-3) = (a+b)x^2 + (-3b+c)x + (a-3c),$$

c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} a + b \phantom{{}+3c} = 10 \\ - 3b + c = -3 \\ a \phantom{{}-3b} - 3c = -1 \end{cases}$$

qui a pour unique solution $a = 8$, $b = 2$ et $c = 3$. Donc, sur tout intervalle ne contenant pas 3,

$$\begin{aligned}\int \frac{10x^2-3x-1}{(x-3)(x^2+1)}\,dx &= \int \frac{8}{x-3}\,dx + \int \frac{2x+3}{x^2+1}\,dx\\ &= 8\ln|x-3| + \ln(x^2+1) + 3\arctan(x) + C,\end{aligned}$$

[8]Par exemple, en se plaçant dans un domaine inclus dans $]4, \infty[$.

car

$$\int \frac{2x+3}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 3\int \frac{dx}{x^2+1} = \ln(x^2+1) + 3\arctan(x) + C.$$

Pour finir cette partie, nous énonçons ci-dessous le résultat général qui se trouve à la base de toutes les considérations précédentes :

Théorème 6.4. *Soit P/Q une fraction rationnelle avec $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que* $\operatorname{pgcd}(P,Q) = 1$. *Alors P/Q s'écrit de manière unique comme somme de termes ayant chacun une des formes suivantes :*

1. *partie polynomiale $E(X)$ avec* $\deg(E) = \deg(P) - \deg(Q)$
2. *élément simple du type $\frac{c}{(X-\alpha)^i}$ avec $c \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}^*$ et α racine de Q de multiplicité $\geq i$*
3. *éléments simple du type $\frac{bX+c}{(X^2+\alpha X+\beta)^j}$ avec $b, c \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}^*$, $X^2 + \alpha X + \beta$ irréductible et $(X^2 + \alpha X + \beta)^j | Q$.*

Dans l'énoncé du théorème, le polynôme E (la partie polynomiale) est le quotient de la division euclidienne de P par Q. Puis, par exemple si α est une racine triple de Q, alors on trouvera dans la somme des éléments simples de la forme

$$\frac{a}{X-\alpha)}, \quad \frac{b}{X-\alpha)^2} \quad \text{et} \quad \frac{a}{X-\alpha)^3}$$

avec a, b, c des réels (éventuellement nuls, mais pas tous).

Bibliographie

[1] S. Hewson, *A mathematical bridge*

[2] W. Dunham, *Journey through genius*