

# Calcul scientifique avec python – 2025-2026

## FEUILLE D'EXERCICES N° 4 UTILISATION DE PYTHON POUR L'ÉTUDE DES SUITES

Pour visualiser une suite  $(u_n)_n$ , on peut utiliser le module `matplotlib.pyplot` de `python` pour afficher les termes  $u_n$  en fonction de l'indice  $n$ . On obtient une figure de la forme ci-contre (les 20 premiers termes de la suite  $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{2+n}}{n}$ ).

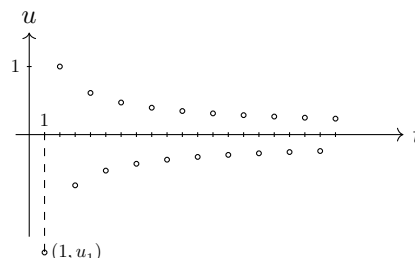


Figure 1: Les termes d'une suite en fonction de l'indice

**Exercice 1.** On définit la suite  $(u_n)$  par :  $u_n = \text{pgcd}(n^2 + 4n + 3, n^3 + 3n - 5)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1) Définir une fonction `u` prenant en paramètre un nombre entier  $n$  et renvoyant le terme  $u_n$ . On pourra utiliser la fonction `gcd` du module `math`, ou voir le point
- 2) Afficher les 30 premiers termes de la suite, comme dans la figure précédente. Cette suite est-elle périodique? Si oui, déterminer sa période.
- 3) Afficher quelques termes suivants et conclure.
- 4) Pour faire une liaison avec le cours d'arithmétique, écrire une fonction `euclide_bezout` qui prend en arguments deux entiers  $a$  et  $b$  qui renvoie les entiers  $d$ ,  $u$  et  $v$ , où  $d = \text{pgcd}(a, b)$  et  $ua + vb = d$ .

**Exercice 2.** On définit la suite  $(u_n)$  par :  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) Donner une représentation graphique des 50 premiers termes de la suite  $(u_n)$ , comme dans la figure 1.
- 2) Calculer le développement limité en  $+\infty$  de la suite  $u_n$  et comparer avec les résultats obtenus.
- 3) Quelle semble être la limite  $l$  de la suite  $(u_n)$ ? Vérifier à l'aide de `python`, l'équivalent de la suite  $(u_n - l)_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
- 4) Avec la même méthode, retrouver le développement limité en  $+\infty$  à l'ordre 2 de la suite  $u_n$ .

**Exercice 3** (Représentation en escalier). Soit  $I \subset \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f(I) \subset I$ , alors, étant donné  $a \in I$ , on peut considérer la suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On veut représenter la suite  $(u_n)$  à l'aide des fonctions  $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $id(x) = x$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . (Voir la figure 2.)

- 1) Définir une fonction `rpz_escalier` prenant en paramètre deux réels  $m < M$ , une fonction  $f : [m, M] \rightarrow [m, M]$ , un réel  $a \in [m, M]$  et un entier  $N$  et traçant sur le même graphique :
  - a) La fonction  $id : x \mapsto x$  en rouge.
  - b) La fonction  $f$  en bleu.
  - c) Les  $2N$  premiers points de l'escalier de la figure correspondant aux  $N$  premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
- 2) Appliquer l'algorithme à la fonction  $f : [1/2, 4] \rightarrow [1/2, 4], x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x}\right)$ .
- 3) La suite définie par récurrence avec la fonction  $f$  converge-t-elle? Si "oui", vers quelle valeur?

**Exercice 4** (La suite logistique). Pour un paramètre  $c \in \mathbb{R}$ , on définit la fonction :

$$f_c : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto cx(1 - x)$$

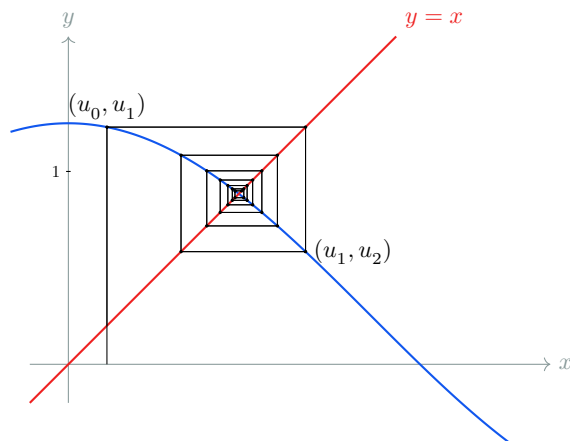


Figure 2: Représentation en escalier d'une suite récurrente

- 1) Tracer le graphe sur  $[0, 1]$  de la fonction  $f_c$  pour différentes valeurs de  $c$ .
- 2) Pour quelles valeurs de  $c$  a-t-on  $f_c([0, 1]) \subset [0, 1]$ ? Donner une preuve mathématique.

Pour un des  $c$  vérifiant la condition ci-dessus, et pour un certain  $a \in [0, 1]$ , on considère la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f_c(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3) Écrire une fonction `rpz_logistique` prenant en paramètre un réel  $c$ , un réel  $a \in [0, 1]$  et un entier  $N$  et qui donne une représentation graphique, comme dans la figure 1, des  $N$  premiers termes de la suite  $(u_n)$  définie par les valeurs  $a$  et  $c$  fournies en argument.

4) Décrire le comportement de la suite  $(u_n)$  lorsque l'on fait varier  $c$ .

5) Pour mieux visualiser ce qu'il se passe, on peut utiliser la fonction en escalier définie dans l'exercice 3: définir une fonction `escalier_logistique` prenant en paramètres  $a$  et  $c$  et affichant la représentation en escalier de la suite  $(u_n)$  définie par  $a$  et  $c$ .

a) Pour  $c < 1$ , quel est le comportement de la suite? Que peut-on dire sur le graphe de  $f_c$  pour ces valeurs de  $c$ ?

b) Pour  $1 < c < 3$ , quel est le comportement de la suite? Que peut-on dire sur le graphe de  $f_c$  pour ces valeurs de  $c$ ?

c) Que se passe-t-il pour des valeurs de  $c \geq 3$ ? Par exemple  $c = 3.1$  et  $a = 0.4$ , puis  $c = 3.5$ .  
*Indication:* Définir la fonction  $g_c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_c(f_c(x))$  et l'utiliser pour étudier la convergence des suites  $(v_k) = (u_{2k})$  et  $(w_k) = (u_{2k+1})$ .

6) Définir une fonction `feigenbaum`<sup>1</sup> prenant en paramètre  $0 \leq c_1 < c_2 \leq 4$  et  $a \in [0, 1]$  et affichant le nuage formé des points  $(c, u_n)$  pour  $c \in [c_1, c_2]$  et  $150 \leq n \leq 200$ .

Tester la fonction avec  $c_1 = 0, c_2 = 3.55$  et  $a = 0.4$ , puis pour  $c_1 = 3$  et  $c_2 = 4$ . Comment interpréter ces résultats?

### Exercice 5 (Suites de fonctions).

1) On sait que la suite de fonctions définie par  $f_n(x) = x(1 - x^n)$  pour  $n \geq 0$  converge simplement<sup>2</sup> sur  $[0, 1]$ . Identifier cette limite et proposer une illustration en Python.

2) Faire de même avec la suite de fonctions définie par  $g_n(x) = \sin^n(x)$  pour  $n \geq 0$  sur  $[0, \pi]$ .

3) On sait que la suite de fonctions définie par  $h_n(x) = n^2 x e^{-nx}$  pour  $n \geq 0$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$  mais qu'elle converge uniformément sur  $[b, 1]$  uniquement, quel que soit  $b \in ]0, 1[$ . Illustrer ce phénomène. Quels sont les différeces si on considère la suite définie par  $n x e^{-nx}$ ?

POSSIBILITÉ POUR L'ILLUSTRATION EN PYTHON. Utiliser une boucle pour représenter, dans un même système de coordonnées, les graphes des fonctions  $f_1, \dots, f_n$ , avec  $n = 20$  ou  $50$  par exemple, sur le domaine de définition désiré, puis y représenter la fonction  $f_{300}$  ou  $f_{1000}$ . Pour que le résultat soit suggestif, on

<sup>1</sup>Affiche un diagramme connu sous le nom de diagramme de Feigenbaum.

<sup>2</sup>La convergence simple signifie que pour tout  $x$  fixé, la suite numérique  $(f_n(x))_n$  converge.

peut choisir la couleur de chaque graphe de la boucle en variant le coefficient  $\alpha$  dans la définition RGBA de la couleur :

```
pyplot.plot(x, y, color=(.1, .2, .5, j/n))
```

où  $1 \leq j \leq n$ .

**Exercice 6.** On aimerait décrire l'évolution de deux espèces de poissons dans la Loire sous la forme d'un système de proies/prédateurs. Les proies sont les truites, les prédateurs sont les brochets. On désigne par  $m_T(n)$  et  $m_B(n)$  les masses (en kg) de truites et de brochets dans la zone considérée, à l'instant  $n$ . Entre les instants  $n$  et  $n + 1$ , les populations évoluent de la manière suivante :

**naissances T** une masse  $\alpha m_T(n)$  de nouvelles truites naît,  $\alpha > 0$

**prédation T + B** une masse  $\beta m_T(n)m_B(n)$  de truites nourrit les brochets,  $\beta > 0$ , et sert à leur reproduction

**naissance B** une masse  $\gamma \beta m_T(n)m_B(n)$  de brochets naît,  $0 \leq \gamma \leq 1$

**dispartition B** une masse  $\delta m_B(n)$  de brochets meurt,  $0 \leq \delta \leq 1$ .

1) Mettre le système en équations, puis écrire une fonction `simulation_TB(a, b, c, d, T, B, N)` simulant l'évolution de la population pour  $1 \leq n \leq N$  avec  $m_T(0) = T$  et  $m_B(0) = B$ . (L'argument `a` correspond à  $\alpha$  ci-dessus, ...)

2) Faire les représentations graphiques adéquates.

3) Tester différents jeux de paramètres. Par exemple, pour  $T = 2000$ ,  $B = 10$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 0.021$ ,  $\gamma = 0.015$  et  $\delta = 0.25$ .

4) Dans l'évolution des truites on pourrait introduire un terme de control (qui limiterait la croissance après un certain seuil<sup>3</sup>) comme dans l'équation logistique. Dans le test précédent on pourrait prendre  $T_{max} = 5000$ .

---

<sup>3</sup>Le terme serait de la forme  $-\alpha T^2/T_{max}$ .