Université d'Angers
Département de Mathématiques

L1 MPCI et DL

Géométrie analytique — 2025-2026

Contrôle continu n° 1
17 mars 2026, 11:00-12:30

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone portable, ...) n'est autorisé.
Le point avec une étoile dans l'exercice 1 vaut un point sur les 21 du barème.

Dans tous les exercices, on se place dans le plan affine (ou affine euclidien), qui est ou peut être muni d'un repère (orthonormé).

Exercice 1. Soit $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ une droite dans le plan affine où a, b, c sont trois réels fixés tels que a et b ne sont pas simultanément nuls. Traduire en formules (simples) les affirmations suivantes :

1) Le point $P = (x_P, y_P)$ appartient à $\mathcal{D}$.
2) Le vecteur $u = (1, h)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
3) Si $A = (2, 3)$ et $B = (8, -1)$, alors les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont parallèles.
4*) Si $A = (2, 3)$ et $B = (4, -1)$, alors la droite $\mathcal{D}$ ne coupe pas le segment $[AB]$.

Solution.

1) $P \in \mathcal{D}$ si et seulement si $ax_P + by_P + c = 0$
2) $(1, h)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ si et seulement si $a + bh = 0$
3) $(AB) \parallel \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = (6, -4)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ si et seulement si $3a - 2b = 0$
4) Une droite sépare le plan en deux demi-plans. On a $\mathbb{A}^2 \setminus \mathcal{D} = S_+ \cup S_-$, où

$$S_+ = \{P = (x, y) \mid ax + by + c > 0\} \quad \text{et} \quad S_- = \{P = (x, y) \mid ax + by + c < 0\}.$$

La droite ne coupe pas $[AB]$ si et seulement si, ou bien $A, B \in S_+$ ou bien $A, B \in S_-$. La condition est donc

$$(2a + 3b + c)(4a - b + c) > 0.$$

Exercice 2. On considère les points $A = (-1, 4)$, $B = (-1, -1)$ et $C = (3, 1)$.

1) Donner une équation cartésienne pour chacune des droites (AB) et (AC).
2) Donner les coordonnées du milieu du segment $[BC]$. Donner une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.
3) Étudier la position de A par rapport à cette médiatrice. Que peut-on en déduire des angles en B et C du triangle $[ABC]$.
4) Soit $N \in (AC)$ tel que

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = -\frac{1}{3}.$$

On rappelle que ceci signifie que $\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$.

a) Donner les coordonnées du point $P \in (AB)$ tel que (NP) soit parallèle à (BC).
b) Calculer la distance du point N à la droite (BC).

Solution.

18 mars 2026

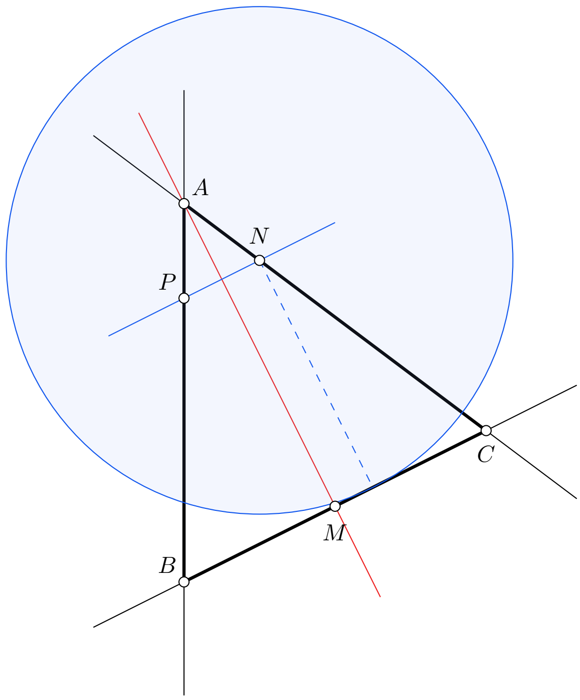

Figure 1: Le point N appartient au segment $[AC]$ car le rapport algébrique $\overline{PA}/\overline{PC}$ est négatif. Les droites (NP) et (BC) sont parallèles. Le cercle de centre N et rayon $3\sqrt{5}/2$ est tangent à la droite (BC).

1) On a

$$(AB) : 0 = \begin{vmatrix} x+1 & -1+1 \\ y-4 & -1-4 \end{vmatrix} = -5(x+1)$$

et

$$(AC) : 0 = \begin{vmatrix} x-3 & -1-3 \\ y-1 & 4-1 \end{vmatrix} = 3(x-3) + 4(y-1) = 3x + 4y - 13,$$

c'est-à-dire

$$(AB) : x + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad (AC) : 3x + 4y - 13 = 0.$$

2) On a

$$\overrightarrow{BC} = (3+1, 1+1) = 2(2,1).$$

Alors

$$M = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (-1,-1) + (2,1) = (1,0).$$

Si $\mathcal{M}$ est la médiatrice de $[BC]$, alors $P = (x,y) \in \mathcal{M}$ si et seulement si

$$0 = \overrightarrow{MP} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (x-1, y) \cdot (2,1) = 2x + y - 2.$$

Donc

$$\mathcal{M} : 2x + y - 2. = 0.$$

3) On remarque que $A \in \mathcal{M}$, donc $AB = AC$, c'est-à-dire le triangle $[ABC]$ est isocèle. On en déduit que les mesures des angles en B et C de ce triangle sont égales.

4) Comme (NP) et (BC) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès, on a

$$-\frac{1}{3} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}.$$

Si $P = (x, y)$, alors ses coordonnées vérifient l'équation vectorielle

$$x = -1 \quad \text{et} \quad (4 - x, -1 - y) = -\frac{1}{3}(-1 - x, -1 - y).$$

Il s'ensuit que $x_P = -1$ (le point se trouve sur la droite (AB) après tout) et que

$$4 - y = \frac{1}{3}(1 + y)$$

c'est-à-dire que

$$y_P = \frac{11}{4}.$$

5) On a besoin de l'équation de la droite (BC) pour calculer la distance de N à (BC). On a

$$(BC) : 0 = \begin{vmatrix} x+1 & 3+1 \\ y+1 & 1+1 \end{vmatrix} = 2x - 4y - 2$$

c'est-à-dire

$$(BC) : x - 2y - 1 = 0.$$

Alors

$$d(N, (BC)) = d(P, (BC)) \frac{|-1 - 2\,\frac{11}{4} - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{15}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ trois réels deux à deux distincts. On considère les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ d'équations respectives $ax - 2y - bc = 0$, $bx - 2y - ac = 0$ et $cx - 2y - ab = 0$.

1) Faire une figure dans le cas particulier $a = 2$, $b = 1$ et $c = -2$.

2) On revient au cas général. Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont deux à deux sécantes et déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection : A point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, B point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ et C point d'intersection de $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.

3) Calculer l'aire du triangle $[ABC]$.

4) Montrer que le triangle $[ABC]$ est rectangle en A si et seulement si $ab = -4$.

Solution.

1)

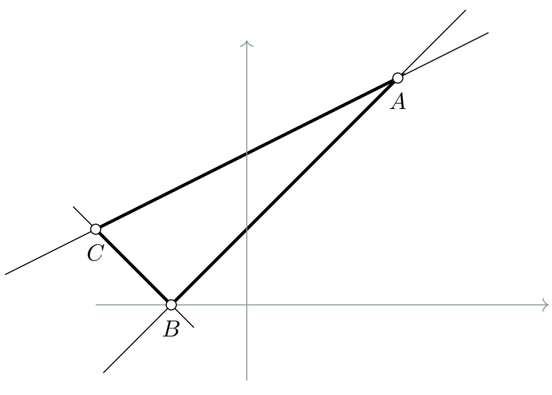

Figure 2: On remarque que le triangle $[ABC]$ est rectangle en C.

2) On a

$$(A) : \begin{cases} ax - 2y = bc \\ bx - 2y = ac. \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} \quad ax - 2y = bc \\ (b - a)x \quad = (a - b)c. \end{cases}$$

Donc
$$A=\left(-c,-\frac{(a+b)c}{2}\right).$$
(Une meilleure notation pour ce point serait C et non pas A. Dans la solution qui suit, nous garderons les notations de l'examen.)

Par des calculs similaires, on arrive à
$$B=\left(-b,-\frac{(a+c)b}{2}\right)\qquad\text{et}\qquad C=\left(-a,-\frac{(b+c)a}{2}\right).$$

3) Pour calculer l'aire du triangle on évalue d'abord le déterminant
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}x_A-x_B & x_C-x_B\\ y_A-y_B & y_C-y_B\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}-c+b & -a+b\\ -\frac{(a+b)c}{2}+\frac{(a+c)b}{2} & -\frac{(b+c)a}{2}+\frac{(a+c)b}{2}\end{vmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}b-c & b-a\\ -(a+b)c+(a+c)b & -(b+c)a+(a+c)b\end{vmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}b-c & b-a\\ -ac+ab & -ac+bc\end{vmatrix}\\ &=\frac{(b-a)(b-c)}{2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ a & c\end{vmatrix}=\frac{(b-a)(c-a)(b-c)}{2}.\end{aligned}$$
Alors, d'après la formule le l'aire d'un triangle en fonction des coordonnées de ses sommets,
$$\sigma([ABC]=\frac{1}{4}\,|(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

4) Le triangle est rectangle en A si et seulement si
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0.$$
On arrive à
$$0=(b-c)\left(1,\frac{a}{2}\right)\cdot(a-c)\left(1,\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{4}\,(a-c)(b-c)(4+ab).$$
Comme les a, b et c sont deux ẹux distincts, on en déduit que le triangle est rectangle en A si et seulement si $ab=-4$.

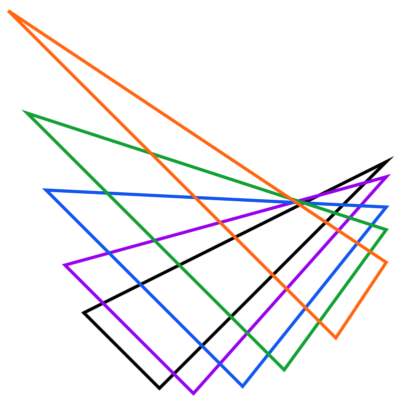

Figure 3: Cinq cas particuliers avec $c=-2$ et les valeurs de a et de b variables respectivement dans les ensembles $\{2,2.25,2.5,2.75,3\}$ et $\{1,.55,\ldots,-4/3\}$. Le premier (noir) et le dernier triangle (orange) sont rectangles en des sommets différents.

Barème indicatif: 6 — 7 — 8