Calcul scientifique avec `python` – 2024-2025

Feuille d'exercices n° 4
Utilisation de python pour l'étude des suites

Pour visualiser une suite $(u_n)_n$, on peut utiliser le module `matplotlib.pyplot` de `python` pour afficher les termes u_n en fonction de l'indice n. On obtient une figure de la forme ci-contre (les 20 premiers termes de la suite $u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{2+n}}{n}$).

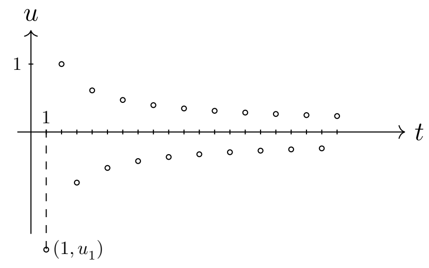

Figure 1: Les termes d'une suite en fonction de l'indice

Exercice 1. On définit la suite (u_n) par : $u_n = \mathrm{pgcd}\left(n^2+4n+3, n^3+3n-5\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Définir une fonction `u` prenant en paramètre un nombre entier n et renvoyant le terme u_n. On pourra utiliser la fonction `gcd` du module `math`, ou voir le point

2) Afficher les 30 premiers termes de la suite, comme dans la figure précédente. Cette suite est-elle périodique ? Si oui, déterminer sa période.

3) Afficher quelques termes suivants et conclure.

4) Pour faire une liaison avec le cours d'ariméthique, écrire une fonction `euclide_bezout` qui prend en arguments deux entiers a et b qui renvoie les entiers d, u et v, où $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$ et $ua + vb = d$.

Exercice 2. On définit la suite (u_n) par : $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Donner une représentation graphique des 50 premiers termes de la suite (u_n), comme dans la figure 1.

2) Calculer le développement limité en $+\infty$ de la suite u_n et comparer avec les résultats obtenus.

3) Quelle semble être la limite l de la suite (u_n) ? Vérifier à l'aide de `python`, l'équivalent de la suite $(u_n - l)_n$ quand $n \to +\infty$.

4) Avec la même méthode, retrouver le développement limité en $+\infty$ à l'ordre 2 de la suite u_n.

Exercice 3 (Représentation en escalier)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f(I) \subset I$, alors, étant donné $a \in I$, on peut considérer la suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On veut représenter la suite (u_n) à l'aide des fonctions $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $id(x) = x$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Voir la figure 2.)

1) Définir une fonction `rpz_escalier` prenant en paramètre deux réels $m < M$, une fonction $f : [m, M] \to [m, M]$, un réel $a \in [m, M]$ et un entier N et traçant sur le même graphique :

a) La fonction $id : x \mapsto x$ en rouge.

b) La fonction f en bleu.

c) Les $2N$ premiers points de l'escalier de la figure correspondant aux N premiers termes de la suite (u_n).

2) Appliquer l'algorithme à la fonction $f : [1/2, 4] \to [1/2, 4], x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

3) La suite définie par récurrence avec la fonction f converge-t-elle ? Si "oui", vers quelle valeur ?

Exercice 4 (La suite logistique)**.** Pour un paramètre $c \in \mathbb{R}$, on définit la fonction :

$$f_c : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto cx(1-x)$$

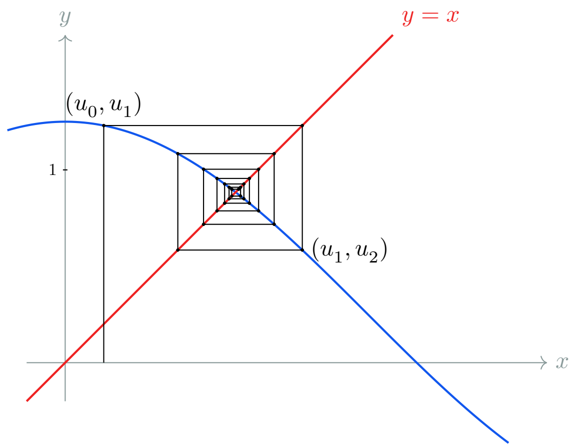

Figure 2: Représentation en escalier d'une suite récurrente

1) Tracer le graphe sur $[0, 1]$ de la fonction f_c pour différentes valeurs de c.

2) Pour quelles valeurs de c a-t-on $f_c([0, 1]) \subset [0, 1]$? Donner une preuve mathématique.

Pour un des c vérifiant la condition ci-dessus, et pour un certain $a \in [0, 1]$, on considère la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f_c(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3) Écrire une fonction `rpz_logistique` prenant en paramètre un réel c, un réel $a \in [0, 1]$ et un entier N et qui donne une représentation graphique, comme dans la figure 1, des N premiers termes de la suite (u_n) définie par les valeurs a et c fournies en argument.

4) Décrire le comportement de la suite (u_n) lorsque l'on fait varier c.

5) Pour mieux visualiser ce qu'il se passe, on peut utiliser la fonction en escalier définie dans l'exercice 3 : définir une fonction `escalier_logistique` prenant en paramètres a et c et affichant la représentation en escalier de la suite (u_n) définie par a et c.

a) Pour $c < 1$, quel est le comportement de la suite ? Que peut-on dire sur le graphe de f_c pour ces valeurs de c ?

b) Pour $1 < c < 3$, quel est le comportement de la suite ? Que peut-on dire sur le graphe de f_c pour ces valeurs de c ?

c) Que se passe-t-il pour des valeurs de $c \geq 3$? Par exemple $c = 3.1$ et $a = 0.4$, puis $c = 3.5$. *Indication :* Définir la fonction $g_c : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_c(f_c(x))$ et l'utiliser pour étudier la convergence des suites $(v_k) = (u_{2k})$ et $(w_k) = (u_{2k+1})$.

6) Définir une fonction `feigenbaum`[1] prenant en paramètre $0 \leq c_1 < c_2 \leq 4$ et $a \in [0, 1]$ et affichant le nuage formé des points (c, u_n) pour $c \in [c_1, c_2]$ et $150 \leq n \leq 200$.

Tester la fonction avec $c_1 = 0, c_2 = 3.55$ et $a = 0.4$, puis pour $c_1 = 3$ et $c_2 = 4$. Comment interpréter ces résultats ?

Exercice 5 (Suites de fonctions)**.**

1) On sait que la suite de fonctions définie par $f_n(x) = x\,(1 - x^n)$ pour $n \geq 0$ converge simplement[2] sur $[0, 1]$. Identifier cette limite et proposer une illustration en Python.

2) Faire de même avec la suite de fonctions définie par $g_n(x) = \sin^n(x)$ pour $n \geq 0$ sur $[0, \pi]$.

3) On sait que la suite de fonctions définie par $h_n(x) = n^2\,x\,\mathrm{e}^{-nx}$ pour $n \geq 0$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ mais qu'elle converge uniformément sur $[b, 1]$ uniquement, quel que soit $b \in], 1[$. Illustrer ce phénomène. Quels sont les différeces si on considère la suite définie par $n\,x\,\mathrm{e}^{-nx}$?

Possibilité pour l'"illustration" en Python. Utiliser une boucle pour représenter, dans un même système de coordonnées, les graphes des fonctions $f_1, \ldots, f_n$, avec $n = 20$ ou 50 par exemple, sur le domaine de définition désiré, puis y représenter la fonction f_{300} ou $f_{1000}\cdots$ Pour que le résultat soit suggestif, on

[1] Affiche un diagramme connu sous le nom de diagramme de Feigenbaum.

[2] La convergence simpe signifie que pout tout x fixé, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge.

peut choisir la couleur de chaque graphe de la boucle en variant le coefficient α dans la définition RGBA de la couleur :

```
pyplot.plot(x, y, color=(.1, .2, .5, j/n))
```

où $1 \leq j \leq n$.

Exercice 6. On aimerait décrire l'évolution de deux espèces de poissons dans la Loire sous la forme d'un système de proies/prédateurs. Les proies sont les truites, les prédateurs sont les brochets. On désigne par $m_T(n)$ et $m_B(n)$ les masses (en kg) de truites et de brochets dans la zone considérée, à l'instant n. Entre les instants n et $n+1$, les populations évoluent de la manière suivante :

naissances T une masse $\alpha m_T(n)$ de nouvelles truites nait, $\alpha > 0$

prédation T + B une masse $\beta m_T(n) m_B(n)$ de truites nourrit les brochets, $\beta > 0$, et sert à leur reproduction

naissance B une masse $\gamma\beta m_T(n) m_B(n)$ de brochets nait, $0 \leq \gamma \leq 1$

dispatition B une masse $\delta m_B(n)$ de brochets meurt, $0 \leq \delta \leq 1$.

1) Mettre le système en équations, puis écrire une fonction `simulation_TB(a, b, c, d, T, B, N)` simulant l'évolution de la population pour $1 \leq n \leq N$ avec $m_T(0) = T$ et $m_B(0) = B$. (L'argument `a` correspond à α ci-dessus, . . .)

2) Faire les représentations graphiques adéquates.

3) Tester différents jeux de paramètres. Par exemple, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.021$, $\gamma = 0.015$ et $\delta = 0.25$.