

Calcul scientifique avec python – 2024-2025

FEUILLE D'EXERCICES N° 2

Un peu de programmation

Exercice 1 (utilisation de tests logiques). On utilise les structures `if ... elif ... else`.

1) Écrire une fonction `solEquationD2R` prenant en arguments trois réels a , b et c et rendant la liste des **solutions réelles** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Cette liste de sortie sera donc de longueur 0, 1 ou 2, suivant les cas.

2) Effectuer plusieurs tests. Parmi eux, considérer les réels $a = 1$, $b = \frac{1}{10}$ et $c = \frac{1}{4 \cdot 10^2}$. Que remarquez-vous? Si besoin, corrigez votre programme. Voir aussi la notion d'*epsilon machine*. `python` représente les nombres réels en virgule flottante sur 64 de bits; les détails ne nous intéressent pas pour l'instant, mais il faut comprendre qu'il travaille avec **un nombre fini de nombres rationnels** pour l'ensemble infini de nombres réels. La commande `numpy.finfo(float)` permet de voir les informations principales concernant l'utilisation des nombres réels par `python`. Il faut préalablement charger la bibliothèque `numpy` avec la commande `import numpy`. La constante `eps` (c'est-à-dire epsilon machine) représente le seuil de sa finesse dans la distinction de deux nombres réels lors des calculs, **la plus fine erreur relative** à sa disposition.

3) Faire des nouveaux tests avec les réels $a = 1$, $b = \frac{1}{10^k}$ et $c = \frac{1}{\gamma \cdot 10^{2k}}$, avec $k = 1, \dots, 9$ et $\gamma = 4$ ou 5. Expliquer le résultat et remodifier, si besoin, la fonction `solEquationD2R`.

4) Modifier la fonction `solEquationD2R` pour quelle ait comme effet secondaire l'écriture à l'écran d'une des phrases suivantes: `l'equation ax**2+bx+c=0 n'a pas de solution reelle` et ainsi de suite — en fonction de la longueur de la liste de sortie. (Pensez à l'utilisation des f-strings.)

5) Écrire une fonction `solEquationD2` prenant en arguments trois nombres (réels ou complexes) et qui retourne les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Laquelle des deux fonctions est plus simple à écrire?

6) Tester le dernier programme en définissant une fonction `solutionsVersCoefficients` ayant comme arguments deux nombres r_1 et r_2 et qui retourne les coefficients 1, b et c de l'équation de degré deux ayant les r_j comme racines.

Exercice 2 (utilisation des boucles).

1) Écrire une fonction `euler2` prenant en argument un entier n et rendant $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$. On introduira une variable S qui vaut initialement 0 et à laquelle on ajoutera successivement les valeurs de $1/j^2$ en utilisant une boucle `for` et le générateur `range`.

2) Écrire deux fonctions prenant en argument un entier n , et rendant respectivement

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{j^2 + k^3} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2 + k^3}.$$

En quoi diffèrent leurs écritures? Comparez les résultats obtenus par ces deux fonctions et expliquez.

Exercice 3 (construction de listes). Pour un entier n , on veut construire, par différentes méthodes, la liste des j^2 , pour j variant de 0 à n .

1) Partir d'une liste vide et lui adjoindre successivement tous les j^2 (utiliser `append`).

2) Utiliser une compréhension de liste (similaire à l'écriture mathématique $\{j^2 \mid j = 0, \dots, n\}$).

3) Définir une fonction $x \mapsto x^2$ et l'appliquer à un `range`, à l'aide de `map`.

4) Comparer les vitesses d'exécution de ces différentes méthodes. On pourra utiliser `%timeit` dans l'interpréteur `ipython` de `Spyder`.

Exercice 4 (autopsie d'un programme ; boucle *tant que*). Étudiez ce que fait la fonction suivante :

```

def F(a, b):
2   while b != 0:
        a, b = b, a%b
4   return a

```

Testez ce que deviennent les variables en introduisant des commandes `print`.

Exercice 5. Écrire une fonction `python` qui prend en argument une liste L et retourne la liste U obtenue en enlevant tous les doublons de L . On veut que l'ordre des éléments de U soit celui des premières apparitions de ces éléments dans la liste L . Par exemple $[2, 4, 1, 1, 4, 5] \mapsto [2, 4, 1, 5]$.

Exercice 6 (suite de l'exercice 2). On rappelle que $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1) Écrire une fonction `eulerDecimalesExactes` qui prend en argument un entier strictement positif d et qui retourne S et N , où N est le **plus petit entier** pour lequel $S = \text{euler2}(N)$ a les d premières décimales égales à celles de $\frac{\pi^2}{6}$.

2) Même problème pour $S = \text{euler3}(N)$ en remplaçant $\frac{\pi^2}{6}$ par la valeur de la somme $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^3}$. Faudrait-il repenser le programme précédent ? En ne connaissant pas cette somme, il faudrait trouver une borne pour le reste

$$r_N = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^3} - \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^3} = \sum_{j=N+1}^{+\infty} \frac{1}{j^3}.$$

Par exemple, on pourrait obtenir $r_N < \frac{1}{(N+1)^2}$. Si $d = 4$, alors en prenant $N = 10^3$, `euler3(N)` a quatre décimales exactes.

Exercice 7 (diviseurs d'un nombre entier). Dans cet exercice, il faudra, au moins dans un deuxième temps, veiller à optimiser le programme afin d'éviter de faire des calculs inutiles.

1) Écrire une fonction `python` `sommeDiviseurs` qui prend en argument un entier n et rend le couple s et L , où L est la liste des diviseurs stricts de n et s la somme des diviseurs stricts. L'entier d est un diviseur strict de n si $1 \leq d < n$ et $d|n$. On pourra tester si $d|n$ avec `n%d == 0`.

2) On dit qu'un nombre est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts ; ainsi $6 = 1 + 2 + 3$ est un nombre parfait. Écrire une fonction qui prend en argument un entier n et rend la liste des nombres parfaits inférieurs ou égal à n .

3) Deux nombres a et b sont dit amicaux si l'un est égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre et réciproquement. Déterminer tous les couples de nombres amicaux inférieurs à 1000.

Exercice 8 (nombres premiers). On rappelle qu'un entier supérieur à 1 est dit *premier* si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même.

1) Écrire une fonction `python` `estPremier` qui prend en argument un entier n et rend `True` ou `False` suivant que n est premier ou pas.

2) Écrire une fonction qui prend en argument un entier n et rend la liste des nombres premiers inférieurs ou égal à n . Écrire aussi une fonction `cribleDErathostene` qui retourne la liste des nombres premiers en la construisant avec l'algorithme d'Ératosthène. Comparer les temps exécutions des deux fonctions.

3) Deux nombres premiers impairs sont dits *jumeaux* si leur différence est égale à 2 ; ainsi (3, 5), (5, 7), (11, 13) sont des couples de nombres premiers jumeaux. Écrire une fonction qui prend en argument un entier n et rend la liste des couples de nombres premiers jumeaux inférieurs à n .

Exercice 9. Une partition de $n \in \mathbb{N}$ est une écriture de la forme $n = a_0 + a_1 + \dots + a_k$ avec $a_j \geq a_{j+1} \geq 1$. On dit que deux partitions p et p' vérifient $p \prec p'$ si $k \leq k'$ et $a_j \leq a'_j$ pour tout $0 \leq j \leq k$. Dans ce qui suit, on code une partition par la liste décroissante $p = [a_0, \dots, a_k]$. Écrire une fonction qui prend en argument une partition p de n et qui retourne la liste de toutes les partitions p' de $n + 1$, avec $p \prec p'$.