Programmation python – 2022-2023

Contrôle Continu
1^{er} février, 2023 — 10:00-12:00

Les documents sont autorisés. Internet est également autorisé, à condition qu'il se limite à des recherches liées à Python. Tout échange de mails ou de quelque autre nature que ce soit, et toute copie de codes issus d'internet, à l'exception de la documentation officielle du langage, seront considérés comme une tricherie (avec les conséquences que cela entraîne). La question bonus est facultative, elle n'est à traiter que si le temps le permet.

Vous déposerez à l'issue du temps imparti un fichier `nomPrenom.py` dans l'espace de dépôt Moodle associé à votre groupe. Votre code devra être commenté.

Exercice 1. On appellera triplet $\mathcal{P}$ un triplet d'entiers positifs (a, b, c) tel que

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{avec} \quad 1 \leq a \leq b$$

Dans tout ce qui suit, on considère que n est également un entier positif ≥ 3.

1) Écrire une fonction `pythaliste(n)` renvoyant la liste de tous les triplets $\mathcal{P}$ vérifiant les conditions de l'énoncé avec de plus $c \leq n$.

2) Écrire une fonction `pythaliste_prem(n)` renvoyant la même liste qu'à la question précédente avec de plus la condition que a, b et c sont premier entre eux.

3) Écrire une fonction `pythasomme(n)` renvoyant une liste contenant l'ensemble des triplets $\mathcal{P}$ vérifiant les conditions de l'énoncé et tels que $a + b + c = n$.

4) Écrire une fonction `pythamax(n)` renvoyant le triplet $\mathcal{P}$ vérifiant les conditions de la question précédente et dont le produit abc est maximal. S'il n'existe aucun tel triplet, la fonction renverra `None`.

5) Illustrer les programmes pour $n = 360$ et toute autre grande valeur de votre choix.

6) Déterminer le premier $n \geq 3$ pour lequel la fonction de la question précédente ne renvoie pas `None`.

Exercice 2. Soient les N points (P_k), $k = 0, 1, \ldots, N-1$ dont les coordonnées sont définies par

$$P_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{N}, \sin\frac{2k\pi}{N}\right).$$

Géométriquement, ces points appartiennent donc au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

1) Tracer le cercle $\boldsymbol{C}$ en pointillés rouges avec un quadrillage de fond. On pourra par exemple utiliser la paramétrisation du cercle donnée par $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$.

2) Écrire une fonction `polygone(N)` prenant un entier N en entrée et qui représente le cercle de la question précédente ainsi que les N points définis ci-dessus (en vert) reliés entre eux par des segments (verts aussi), afin de faire apparaître un polygone régulier inscrit dans le cercle. On cherchera comment faire en sorte que les points soient mis en évidence. On ajoutera un titre de la forme "Polygone régulier à N côtés" où le N sera à adapter.

3) (Question bonus difficile) Écrire une fonction `polygone_c(N)` prenant un entier N en entrée et qui représente le cercle de la question précédente ainsi que le polygone regulier circonscrit au cercle en bleu.

Exercice 3. Soit une fonction f définie sur un intervalle $[s, t]$. On cherche l'unique fonction polynomiale d'ordre 2 qui coïncide avec f en trois points : les deux bornes de l'intervalle et le point milieu. Concrètement, sur l'intervalle $[s,t]$ pour $s<t$, on cherche une fonction $P(x)=u\,x^2+v\,x+w$ qui vérifie $P(s)=f(s)$, $P(m)=f(m)$ et $P(t)=f(t)$, où $m=\frac{s+t}{2}$. Ces égalités donnent lieu à trois équations que l'on peut résumer par le système

$$\begin{pmatrix} s^2 & s & 1 \\ m^2 & m & 1 \\ t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(s) \\ f(m) \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

1) Écrire une fonction `poly2(f, s, t)` qui prend en paramètres une fonction f (voir la re- marque à la suite de l'exercice) ainsi que deux nombres s et t, et qui renvoie le triplet (u,v,w) au format `numpy.ndarray`, satisfaisant la relation ci-dessus. On pourra utiliser les outils de `numpy.linalg`.

2) Écrire une fonction `poly2graph(f, s, t)` prenant le même triplet en paramètre et qui représente graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[s,t]$ en noir et, superposé, le graphique de la fonction P en bleu. On pensera à mettre une grille, un titre adapté ainsi qu'une légende.

3) Tester les programmes avec la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x)=\frac{x\,\tan x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Remarque. Une fonction peut prendre une autre fonction en paramètre. Par exemple :

```
def carre(x): return x**2
def diff(f, b, a): return f(b)-f(a)
```

Barème indicatif : 9 — 6 — 5