Université d'Angers
Département de Mathématiques

Analyse élémentaire – 2025-2026

Exercices supplémentaires

Nombres réels et fonctions d'une variable réelle

Exercice 1. Établir les égalités et inégalités suivantes :

(i) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$

(ii) $\left(1-\frac{4}{1^2}\right)\left(1-\frac{4}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$

(iii) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leq\frac{2n-1}{n}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}.$

Exercice 2. Résoudre les inégalités suivantes :

(i) $|x-1|\geq x-2$ (ii) $\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\leq 1$ (iii) $|x+1|\leq x+|x-3|.$

Exercice 3. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ deux paramètres. Représenter graphiquement les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par

1) $f(x)=ax^2-3(a+1)x+1$ si G_f contient le point $A=(1,0)$;
2) $f(x)=(a+1)x^2+2(2a+3b)x+a^2-13$ si G_f contient les points $(1,0)$ et $(2,16)$;
3) $f(x)=2x^2+a|x-1|-2$ si G_f contient le point $(-1/2,0)$.

Exercice 4. Soit $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_m(x)=(m+1)x^2+(2m+3)x+m+4$, avec $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

1) Montrer que les sommets des paraboles associées aux fonctions f_m sont colinéaires.
2) Montrer que ces paraboles ont toutes un point commun.

Exercice 5. On considère la fonction réelle définie par $f(x)=x^2-2ax+a^2-a-5$ où a est un paramètre réel. Trouver les valeurs de a pour lesquelles la fonction s'annule en $x_1\leq x_2$ tels que

1) $x_1<x_2$
2) $x_1<1\leq x_2$
3) $-3\leq x_1<1\leq x_2$
4) $-3\leq x_1<1$.

Exercice 6. Soit a un paramètre réel et soit $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f_a(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x<-2\\ x^2-ax-2a-3 & \text{si } x\geq -2.\end{cases}$$

1) Déterminer les fonctions f_a qui sont strictement croissantes.
2) Pour chaque $a\in\mathbb{R}$ discuter le nombre de solutions de l'équation $f_a(x)=b$ en fonction de $b\in\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

1) Si $b \in \mathbb{R}$, trouver les antécédents de b.
2) Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, 1[$.
3) Pour $b > 0$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(]-b, b[)$.
4) L'affirmation suivante est-elle vraie?

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $-\delta(\varepsilon) < x < \delta(\varepsilon)$, $x \neq 0$ on a $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$.

5) Reprendre l'exercice avec la fonction g définie par $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

Exercice 8. Existe-t-il des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ telles que la fonction définie par $f(x) = ax - \ln(1 + x^2)$ soit croissante sur $\mathbb{R}$?

Limites et continuité

Exercice 9. Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}, \quad \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$$

Exercice 10 (*)**.** Étudier l'existence de la limite en 0 pour la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

1) $f(x) = x^n \sin \dfrac{1}{x}$, où n est un entier fixé.
2) $f(x) = 1$ si x est rationnel et $f(x) = 0$ sinon.
3) $f(x) = \dfrac{1}{q}$ si x est rationnel, $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, et $f(x) = 0$ sinon.

Remarque. Pour montrer que la limite (la limite à gauche ou à droite) en a de f n'existe pas il suffit de trouver un $\varepsilon > 0$ et des réels x_n et x'_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}, \quad |x'_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon.$$

Exercice 11. On considère l'équation $2\cos(x) = x$.

1) Montrer que les solutions, si elles existent, appartiennent à l'intervalle $[-2, 2]$.
2) Montrer l'existence d'au moins une solution.
3) La solution est elle unique ?

Exercice 12.

1) Montrer qu'il n'existe pas de fraction $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ telle que $x^2 = 2$.
2) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ dont le carré vaut 2.
3) Montrer qu'il existe un unique $x_0 > 0$ dont le carré vaut 2. (Ce x_0 est noté $\sqrt{2}$.)

Exercice 13. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer que pour tout réel $\lambda \geq 0$, il existe $x_\lambda \in [0, 1]$ tel que $f(x_\lambda) = \lambda g(x_\lambda)$.

Exercice 14.

1) Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ telle que $f(c) = c$.

2) On considère un cercle sur la surface de la Terre et on mesure la température en chaque point. Montrer qu'il existe deux points du cercle diamétralement opposés qui ont la même température. On suppose que la fonction température est continue.

Asymptotes, extrémums et graphes

Exercice 15. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{|x^3 - 1|}{ax^2 - bx}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ des paramètres.

1) Déterminer les paramètres a et b tels que la droite $y = x + 4$ soit une asymptote (oblique) de f vers $+\infty$.

2) Pour ces valeurs ainsi déterminées, existe-t-il d'autres asymptotes de f ?

Exercice 16. Soit $f_m : D \to \mathbb{R}$ définie par $f_m(x) = x + 1 - \sqrt{mx^2 + 4x + 5}$. Déterminer les asymptotes de f_m en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 17. Déterminer le nombre de points de maximum et d'inflexion de la fonction

$$f(x) = 4\arctan(x) - \frac{3}{2}\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + 1}.$$

Exercice 18. Soit la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x + a}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1) Trouver, si possible, les valeurs de a pour lesquelles la fonction admet un maximum local en un point de l'intervalle $\left]\dfrac{2}{3}, 1\right[$.

2) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la fonction admet trois points d'inflexion p_1, p_2, p_3. L'expression $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{f(p_j)}$ est-elle indépendante de a ?

Exercice 19. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{x + 1}\, e^{\frac{1}{x}}$, avec a un paramètre réel.

1) Déterminer D le domaine maximal de définition de f.

2) Trouver a tel que l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1 soit

$$3x - \frac{4}{e}\, y - 5 = 0.$$

3) Tracer le graphe de f pour la valeur de a trouvée ci-dessus.

Exercice 20. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{ax^3 - 9x}{x^2 - b}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ des paramètres.

1) Trouver a et b tels que le graphe de f intersecte la première bissectrice en un point d'abscisse -2 et que la pente de la tangente au graphe au point d'intersection de celui-ci avec l'axe Oy soit $9/5$.

2) Soient $a = 2$ et $b = 5$.

   a) Représenter graphiquement la fonction.

   b) Discuter la nature des solutions de l'équation $f(x) = m$, avec $m \in \mathbb{R}$.

Intégration

Exercice 21. Calculer les intégrales suivantes.

1) $W_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx$, $W_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx$ et $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ avec $n \in \mathbb{N}$.

2) $I_5 = \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{x^2}{(3x-2)^5}\, dx$ et $I_n = \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{x^2}{(3x-2)^n}\, dx$ avec $n \in \mathbb{N}$.

3*) $J = \int_0^2 \sqrt{\frac{x+4}{x+1}}\, dx$. On pourra commencer par le changement de variable $t^2 = \frac{x+4}{x+1}$.

Exercice 22.

1) Dans le plan, on considère le disque unité D d'équation cartésienne $x^2 + y^2 \leq 1$. Trouver une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ telle que l'intersection de D avec le quart de plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ s'écrive

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq f(x) \right\}.$$

Calculer l'intégrale de f sur le segment $[0,1]$ et en déduire l'aire de D.

2) Pour $a, b > 0$, calculer l'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3) L'ellipsoïde de rotation d'équation $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ peut être obtenu en faisant tourner autour de l'axe Ox dans l'espace le graphe de la fonction $x \mapsto y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ vu dans le plan Oxy. Calculer son volume.

Exercice 23 (Approximation du nombre e)**.** Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n e^x}{n!}\, dx.$$

1) Calculer I_0 et montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \geq 0$,

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}.$$

En déduire que $e = s_n + I_n$ pour tout $n \geq 0$.

2) Après avoir étudié les variations de $x \mapsto (1-x)e^x$ sur l'intervalle $[0,1]$, démontrer l'encadrement

$$0 < \int_0^1 (1-x)^n e^x\, dx < \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

3) Établir l'encadrement $0 < e - s_n < \frac{1}{n \cdot n!}$, puis démontrer que $\lim_{n\to\infty} s_n = e$.

4) Démontrer que le nombre e n'est pas rationnel. (*Indication :* En supposant que $e = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ et $q \neq 0$, on s'intéressera à la nature du nombre $(e - s_q)q!$ et à sa localisation.)