Analyse élémentaire — 2024-2025

Exercices supplémentaires

Exercice 1. Résoudre les inégalités suivantes :

(i) $|x-1| \geq x-2$ (ii) $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| \leq 1$ (iii) $|x+1| \leq x + |x-3|$.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux paramètres. Représenter graphiquement les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

1) $f(x) = ax^2 - 3(a+1)x + 1$ si G_f contient le point $A = (1, 0)$;
2) $f(x) = (a+1)x^2 + 2(2a+3b)x + a^2 - 13$ si G_f contient les points $(1, 0)$ et $(2, 16)$;
3) $f(x) = 2x^2 + a|x-1| - 2$ si G_f contient le point $(-1/2, 0)$.

Exercice 3. Soit $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_m(x) = (m+1)x^2+(2m+3)x+m+4$, avec $m \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1\}$.

1) Montrer que les sommets des paraboles associées aux fonctions f_m sont colinéaires.
2) Montrer que ces paraboles ont toutes un point commun.

Exercice 4. On considère la fonction réelle définie par $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 - a - 5$ où a est un paramètre réel. Trouver les valeurs de a pour lesquelles la fonction d'annule en $x_1 \leq x_2$ tels que

1) $x_1 < x_2$
2) $x_1 < 1 \leq x_2$
3) $-3 \leq x_1 < 1 \leq x_2$
4) $-3 \leq x_1 < 1$.

Exercice 5. Soit a un paramètre réel et soit $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_a(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - ax - 2a - 3 & \text{si } x \geq -2. \end{cases}$$

1) Déterminer les fonctions f_a qui sont strictement croissantes.
2) Pour chaque $a \in \mathbb{R}$ discuter le nombre de solutions de l'équation $f_a(x) = b$ en fonction de $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Établir les égalités et inégalités suivantes :

(i) $$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

(ii) $$\left(1 - \frac{4}{1^2}\right)\left(1 - \frac{4}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}$$

(iii) $$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2n-1}{n}$$

(iv) $$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$