Analyse élémentaire — 2025-2026

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 4

Exercice 1 (Méthode des rectangles)**.**

1) On considère le graphe de la fonction $x \to 1/x$ pour $x \in [1,2]$. En utilisant deux rectangles, montrer l'encadrement $\frac{1}{2} < \ln(2) < 1$.

2) Améliorer l'approximation de $\ln(2)$ en prenant 4 rectangles, puis 6 rectangles.

3*) Combien faudrait il prendre de rectangles pour avoir une précision de $\frac{1}{1000}$ pour la valeur de $\ln(2)$?

Exercice 2 (Calcul de la surface d'un disque)**.** On considère le disque de centre $(0,0)$ et de rayon R. Soit Q le quart de ce disque situé dans le premier quadrant.

1) Écrire l'aire de Q comme une intégrale en sachant que le bord du disque est décrit par l'équation $x^2+y^2=R^2$. Quelle est la valeur de cette intégrale vue comme aire de Q ?

2) Faire un changement de variable pour calculer cette intégrale. (On pourrait revenir à cet exercice après avoir travaillé l'exercice 8.)

3) En déduire l'aire du disque obtenue comme résultat d'une intégrale.

Exercice 3. Après avoir vérifié qu'elles sont bien définies, calculer les intégrales suivantes. La méthode de calcul n'est pas imposée ; une possibilité de calcul serait d'exhiber une primitive (de la fonction à intégrer).

$$\int_0^2 \frac{dx}{x+1} \qquad \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx \qquad \int_0^2 \frac{x}{(x+2)^2}\,dx \qquad \int_0^{\pi/4} \sin^3(t)\,dt$$

$$\int_{-1}^1 (t+1)(t+2)\,dt \qquad \int_0^1 (x^3+2\sin x+e^{2x})\,dx \qquad \int_1^2 \frac{dx}{x^4} \qquad \int_1^4 \frac{dy}{y\sqrt{y}}$$

$$\int_1^2 \sqrt{2t}\,dt \qquad \int_0^1 x\sqrt[3]{8x}\,dx \qquad \int_2^3 3^x\,dx \qquad \int_0^1 \frac{y}{y^2+1}\,dy$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx \qquad \int_0^{\pi/3} \sin^3(y)\cos(y)\,dy \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^2(2t)} \qquad \int_0^{\pi/8} \frac{\sin(2t)}{\cos^2(2t)}\,dt$$

$$\int_0^{\pi/6} \tan^2(2x)\,dx \qquad \int_0^1 (2x-1)e^{x^2-x}\,dx \qquad \int_2^3 \frac{dt}{t\ln t} \qquad \int_0^1 \frac{s^2}{s^3+1}\,ds$$

$$\int_0^1 \frac{s^2}{(s^3+1)^2}\,ds \qquad \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \qquad \int_0^a \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes en utilisant la relation de Chasles.

$$A = \int_0^\pi |\cos x|\,dx \qquad B = \int_{-2}^3 |x^2-x-2|\,dx \qquad C = \int_{-1}^2 \max(x^2+2x, 2x^3+1)\,dx$$

Exercice 5. À l'arrêt à l'instant $t=0$, une voiture accélère à raison de 2.7 m/s^2 pendant 10 secondes, puis roule à vitesse constante pendant 5 minutes. Au bout de ce temps, elle freine brusquement, à raison de -9 m/s^2, jusqu'à ce qu'elle s'immobilise. Calculer la vitesse moyenne de la voiture durant le trajet effectué et la distance parcourue.

Exercice 6. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \ln(t+\sqrt{t^2+1})$. En déduire une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.

Puis, calculer chaque intégrale en précisant le domaine de définition de la fonction (de a) ainsi obtenue. Pour le dernier calcul, on pourra utiliser la décomposition $\dfrac{2}{t^2-1} = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}$.

$$\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \int_0^a \frac{dt}{1+t^2} \qquad \int_0^a \frac{dt}{1-t^2}$$

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties.

$$\begin{array}{lll}
A = \displaystyle\int_{-1}^{1} x e^{3x}\,dx & B = \displaystyle\int_0^1 (t^2+t)e^{2t}\,dt & C_n = \displaystyle\int_1^e s^n \ln(s)\,ds, \quad n \in \mathbb{N} \\
D = \displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e} \ln x\,dx & E = \displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx & F = \displaystyle\int_1^e \ln^2(t)dt \\
G = \displaystyle\int_0^{\pi} y\cos(2y)\,dy & H = \displaystyle\int_a^b x^3 e^{-x^2/2}\,dx & I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx \\
J = \displaystyle\int_0^a \arcsin(t)\,dt & K = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \arctan(s)\,ds & L_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}
\end{array}$$

Pour L_n on pourra commencer par écrire le numérateur sous la forme $1 = (1+x^2) - x^2$.

Exercice 8. À l'aide du changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll}
\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx, \quad t = \ln x & \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}, \quad x = \ln t & \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \quad x = t^2 \\
\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx, \quad x = t^2 & \displaystyle\int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)}, \quad x = s^3 & \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx, \quad x+1 = t^2 \\
\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx, \quad x = 3\sin\theta & \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{4+x^2}\,dx, \quad x = 2\tan\theta & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}, \quad x = \tan\theta
\end{array}$$

Exercice 9. On rappelle qu'une des conséquences du théorème fondamental de l'analyse (de Leibniz-Newton) est que si f est continue sur I, $0 \in I$, alors la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur I.

1) Calculer la dérivée des fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ et $x \mapsto \displaystyle\int_0^{3x^2} e^{t^2}\,dt$.
2) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^8}\,dt$.

Exercice 10 (Encadrement d'une intégrale)**.** Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx.$$

1) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.
2) En déduire l'encadrement $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, puis la limite de la suite $(I_n)_n$.

Exercice 11. Soit I un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable avec f'' continue sur I. En partant du théorème fondamental de l'analyse, puis en utilisant l'intégration par parties, montrer successivement que pour tous $a, b \in I$ on a

$$\begin{aligned}
f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t)f'(t)\,dt \\
&= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2!}f'''(t)\,dt.
\end{aligned}$$