Analyse élémentaire — 2025-2026

Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Utiliser la définition de la dérivée pour calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{2x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}.$$

En déduire (en utilisant la quatrième limite) que $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$.

Exercice 2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leur domaine de dérivabilité.

$$x\mapsto (2x+1)(1+x+x^2)\qquad x\mapsto x(2x^2+\sqrt{x}+1)\qquad x\mapsto \frac{1}{4x^2-8x+4}$$

$$x\mapsto \frac{x^2+1}{-x^2+2x+3}\qquad x\mapsto \frac{x^2+ax+2}{\sin x+1}\qquad x\mapsto \frac{x^2+1}{(2x+1)^2}$$

$$x\mapsto (2x+1)^3(1+x)^5\qquad x\mapsto \sqrt{3x^2+1}\qquad x\mapsto (2x^3\sqrt{2x+1}+\tan(\sqrt{x})+1)^2$$

$$x\mapsto e^{x^2}\qquad x\mapsto \frac{\ln(x^2-1)}{e^{3x}}\qquad x\mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$x\mapsto \cos(x+e^{x^2})\qquad x\mapsto \tan\frac{x}{2}\qquad x\mapsto e^{\sin x}\ln\left(1+\cos^4 x\right)$$

Exercice 3. Montrer que la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{1+x+\ln x}$ satisfait l'équation différentielle $xy'=y(y\ln x-1)$.

Exercice 4. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'équation de la tangente au point x donné. (*Indication :* Pour le dernier calcul, on pourrait utiliser le logarithme)

$$x\mapsto x(\sqrt{x}-1)\quad \text{en } x=1\qquad\qquad x\mapsto x(2\sqrt{x-1}-3)\quad \text{en } x=1$$

$$x\mapsto \frac{|x-1|}{x^2+1}\quad \text{en } x=1 \text{ et } x=-1\qquad\qquad x\mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\quad \text{en } x=0 \text{ et } x=a$$

$$x\mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\quad \text{en } x=0\qquad\qquad x\mapsto (\cos x)^{\sin x}\quad \text{en } x=\frac{\pi}{4}$$

Exercice 5. On pose $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^3+x}$.

1) Déterminer D_f, le domaine maximal de définition de f.
2) Calculer la dérivée f' de f en précisant le domaine de dérivabilité de f.
3) Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites de f au bord de D_f.
4) Calculer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x=1$.
5) Dans le plan rapporté au repère Oxy, tracer le graphe de f ainsi que la tangente précédente.

Exercice 6. On considère la fonction $f(x)=2\sin(x)+\sin(2x)$.

1) Déterminer son ensemble de définition, sa plus petite période et sa parité. En déduire un intervalle d'étude I de f.
2) Calculer f' et déterminer son signe sur I. En déduire le tableau de variations de f.
3) Tracer l'allure de sa courbe représentative sur une période.

Exercice 7.

1) Montrer que les hyperboles $xy = 4$ et $x^2 - y^2 = 6$ forment des angles droits aux points d'intersection.

2*) Montrer que le segment (déterminé par les axes de coordonnées) de toute tangente à l'hyperbole $xy = a^2$ est divisé en deux par le point de tangence.

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

(i) $e^{x^2} = \dfrac{1}{9}$ (ii) $e^{2x} - 2e^x - 3 \leq 0$ (iii) $\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1) < -2\ln(2)$

Exercice 9. On pose $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x) - 1$.

1) Déterminer D_f, le domaine (maximal) de définition de f.

2) Calculer la dérivée f' de f en précisant le domaine de dérivabilité.

3) Dresser le tableau de variations de f et calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

4) Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 2$.

5) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et esquisser le graphe de f.

6) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 10. Soit $\varphi(x) = e^x \ln(1 - e^{-x})$. On veut dresser le tableau de variations de φ et esquisser son graphe.

1) Calculer φ'. Étudier les variations de $f(x) = e^{-x} + (1 - e^{-x})\ln(1 - e^{-x})$ pour comprendre les changements de signe de φ'. (Quelle est la relation reliant φ' et f ?)

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et justifier que pour tout $x > 0$ on a $f(x) > 0$.

3) Dresser le tableau de variations de φ et esquisser son graphe.

4) Résoudre l'équation $f(x) = 1$ puis l'inéquation $f(x) \leq 1$.

Exercice 11.

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ s'annulant en trois points $a < b < c$. Montrer que f' s'annule deux fois et que f'' s'annule une fois sur l'intervalle $]a, c[$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ s'annulant quatre fois sur l'intervalle $[a, b]$ Montrer qu'il existe un point de cet intervalle où sa dérivée troisième s'annule.

3) Montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée strictement positive sur]a,b[, alors elle est strictement croissante ($f'(a)$ et/ou $f'(b)$ pourraient s'annuler).

4) Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $t \in]a, b[$ on a $f'(t) < g'(t)$. Prédire lequel des deux termes $f(b) - f(a)$ et $g(b) - g(a)$ est le plus grand. Vérifier (avec une preuve) la prédiction.

5*) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = 0$ et $f'(a) < 0$. Faire un dessin. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \neq 0$ qui satisfait $a < x < a + \varepsilon$ on a $f(x) < 0$.

Exercice 12. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1) Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b]$, et plus généralement que g est injective.

2) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis. Réécrire la formule en mettant en évidence l'équation de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

3) Reprendre cette formule en remplaçant les abscisses a, b et x par $g(a)$, $g(b)$ et $g(x)$ respectivement. En déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}.$$

4) On suppose que $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \ell$. Ce résultat est un cas particulier de la règle de l'Hôpital. Remarquer qu'on aurait pu faire le même raisonnement en a^+.

5) Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\ln(x)}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}.$$

Exercice 13. Soient $x < x' \in]0, +\infty[$.

1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{x'} < \frac{\ln(x') - \ln(x)}{x' - x} < \frac{1}{x}.$$

2) On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)x') - \alpha \ln(x) - (1 - \alpha) \ln(x')$. De l'étude de f et du point précédent déduire que pour tout $\alpha \in]0, 1[$ on a

$$\alpha \ln(x) + (1 - \alpha) \ln(x') < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)x'). \qquad (\sharp)$$

(On dit que la fonction logarithme est *concave*.)

3) Interpréter géométriquement l'inégalité ($\sharp$) sur le graphe du logarithme.

4) Démontrer par récurrence que pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, et pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n \in]0, +\infty[$, on a

$$\alpha_1 \ln(x_1) + \alpha_2 \ln(x_2) + \cdots + \alpha_n \ln(x_n) \leq \ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

5) En déduire l'inégalité des moyennes : pour tous $a_1, \ldots, a_n \geq> 0$ on a

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$.

Exercice 14. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On rappelle que, pour $x > 0$, x^α est par définition l'expression $e^{\alpha \ln(x)}$. Par la suite on considère la fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = [(x-1)(x-2)(x-3)]^{\sqrt{2}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau de variations de f. Compléter le tableau de variations en calculant les limites de f au bord de son domaine de définition.

3) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 15. On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{3} \cos(3x) - \dfrac{3}{4} \cos(2x)$.

1) Déterminer son ensemble de définition, sa plus petite période et sa parité. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $I = [0, \pi]$.

2) Exprimer $\cos(3x)$ et $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et en déduire l'expression de f comme fonction polynomiale en $\cos(x)$.

3) Justifier l'existence et l'unicité de $x_0 \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x_0) = -\frac{1}{2}$. Par la calculatrice, donner une estimation de x_0 à 0.01 près.

4) Calculer la dérivée de f et déterminer son signe sur I. Dresser le tableau de variations de f sur I. On calculera $f(0)$, $f(\pi)$ et $f(x_0)$ sous forme rationnelle.

5) Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur deux périodes.

6*) Déterminer par dichotomie (la division de l'intervalle par deux) une valeur approchée de $\max\limits_{x\in[0,\pi]} f(x)$ à 0.01 près. *(La condition dans l'algorithme devrait porter sur le signe de la dérivée.)*

Exercice 16. Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

1) Construire le tableau de variations de f et préciser son image, $f(]-1, +\infty[)$.

2) Montrer que f définit une bijection de $]-1, +\infty[$ dans $f(]-1, +\infty[)$. En déduire le tableau de variations de f^{-1}.

3) Calculer $f(1)$, $f^{-1}(\frac{1}{2})$ et $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.

4) Déterminer l'expression de f^{-1} et vérifier les résultats précédents.

5) Représenter graphiquement les fonctions f et f^{-1} dans un même système de coordonnées. *Il faut comprendre que les graphes de la fonction et de la fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

Exercice 17 (arcsin de nouveau)**.** Soit $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$, c'est-à-dire la restriction de la fonction sinus au segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1) Justifier que f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et que son image est l'intervalle $[-1, 1]$.

2) Justifier que f est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.

3) Justifier quef^{-1} est impaire, continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$.

4) Montrer que pour tout $y \in]-1, 1[$, on a $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Exercice 18. On rappelle que la réciproque de la fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est notée $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) Calculer la dérivée de arctan.

2) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

a) Montrer que f est une fonction impaire.

b) Étudier sa limite en 0^+ et $+\infty$.

c) Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

d) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.