Université d'Angers | Mathématiques
L1 – Analyse Élémentaire | 2024-2025

Fonctions d'une variable réelle, limites, continuité

Les exercices dont les numéros sont suivis d'une $(*)$ sont prioritaires.

Exercices introductifs

Exercice 1 (*).

1) Soit $a < 0$. On rappelle que l'expression en t, $at^2 + bt + c$ atteint son maximum en $t_0 = -\frac{b}{2a}$. Montrer que cette valeur maximale vaut $-\frac{\Delta}{4a}$.

2) Montrer que lorsque le polynôme $at^2 + bt + c$ admet des racines, éventuellement confondues, le maximum est atteint pour t au milieu des racines.

3) Déterminer la plus grande aire que l'on puisse obtenir avec un rectangle de périmètre 4. (Voir aussi l'exercice 3 1).)

4) Le mouvement d'un point matériel lancé sur la verticale est décrit par l'équation

$$y(t) = y_0 + tv_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Montrer que y_0 et v_0 sont la position et respectivement la vitesse à $t = 0$ et g est l'accélération gravitationnelle.

5) On prend $g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$. Si $y_0 = 0$ et $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$, quelle est la hauteur maximale atteinte par le point matériel ? Quelle sera sa vitesse à cette hauteur maximale ? Quelle sera sa vitesse en revenant à la hauteur nulle ?

6) On suppose qu'on lance depuis le sol un caillou, assimilé a un point, dans le plan (x, y) . On note $p(t) = (x(t), y(t))$ la position à l'instant t, où $y(t)$ est la hauteur et $x(t)$ la distance horizontale dans le repère choisi. Donner sans démonstration les formules pour $x(t)$ et $y(t)$.

Exercice 2 (*). On prend deux nombres positifs x, y. Montrer que $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, c'est-à-dire que la moyenne arithmétique est plus grande que la moyenne géométrique.

Exercice 3. Cet exercice généralise le précédent pour des moyennes avec plus de deux nombres. Dans cet exercice tous les nombres sont strictement positifs. On se propose d'établir l'inégalité des moyennes. Pour n nombres, la moyenne arithmétique est $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ et la moyenne géométrique est $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$.

1) Montrer que $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, c'est-à-dire que pour $n = 2$, la moyenne arithmétique est plus grande que la moyenne géométrique.

2) Comparer les moyennes arithmétique et géométrique des trois nombres 4, 1 et 1. Puis des nombres $4 - \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2}$ et 1. Enfin, pour 3, $1 + \frac{1}{2}$ et $1 + \frac{1}{2}$.

3) Pouvez-vous voir un phénomène plus général dans les tests numériques précédents ?

4) Soit $\alpha = \dfrac{x+y+z}{3}$. On suppose $x > \alpha > y$. Montrer que pour tout $t > 0$ tel que $x - t \geq \alpha \geq y + t$ on a

$$(x-t)(y+t)z > xyz.$$

5) En déduire que pour tous $x, y, z > 0$ on a $\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$. On pourra montrer que la valeur maximale pour le produit xyz est α^3.

6) Plus difficile en utilisant la même idée, démontrer l'inégalité des moyennes : pour tous $x_1, \ldots, x_n$ (strictement) positifs on a

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Exercice 4. Déterminer les polynômes de degré ≤ 2 admettant la droite $y = -x - 2$ comme tangente en 2 au graphe (de la fonction polynomiale associée). Géométriquement, la droite est tangente au graphe si elle coupe la parabole en un seul point de manière multiple ; algorithmiquement, ceci veut dire que en éliminant y dans le système formé avec l'équation du graphe et l'équation de la droite on obtient l'équation $(x-2)^2 = 0$. Par exemple, l'abscisse coupe la parabole $y = x^2$ de manière multiple en un seul point dont $x = 0$.

Combien de tels polynômes vérifient $P(-1) = 0$?

Exercice 5 (*)**.** Soit a un réel vérifiant $a \leq b$ pour tout réel b strictement positif. Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que $a \leq 0$.

Exercice 6. Démontrer que pour tous réels a et b, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|b-a|}{2}, \qquad \min(a,b) = \frac{a+b-|b-a|}{2}, \qquad ||a|-|b|| \leq |a-b|.$$

Exercice 7. On veut déterminer les dimensions à donner à une boîte de base carrée, sans couvercle, de 4 dm^3 de contenance, pour que sa construction demande le moins de matériau possible.

1) Si x est la longueur du côté de la base, quelle est la hauteur de la boîte ?

2) Exprimer la surface latérale de la boîte en fonction de x.

3) Étudier (pour l'instant) graphiquement cette fonction et conclure en donnant une valeur approchée à une décimale.

Symboles mathématiques : Quantificateurs, union, intersection.

Exercice 8 (*)**.** Dire pour chacune des phrases suivantes si elle est vraie ou fausse :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y > x$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$

3) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y > x$

4) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$

Exercice 9. Deux joueurs de cartes ont chacun dans la main trois cartes qui ont respectivement pour valeurs $A = \{2,5,8\}$ et $B = \{3,4,9\}$. Le joueur avec la main A joue la première carte, puis B joue après A. Chacun choisit sa carte comme il le souhaite. Se convaincre rapidement que les phrases suivantes sont vraies (informellement, sans preuve). Puis écrire avec des quantificateurs un énoncé mathématique correspondant à chaque phrase.

1) Le deuxième joueur peut toujours jouer une carte plus forte que celle du premier joueur.

2) Le deuxième joueur ne peut pas toujours jouer une carte moins forte que celle du premier joueur.

3) Le premier joueur peut jouer une carte moins forte que toutes celles du deuxième joueur.

4) Le premier joueur ne peut pas jouer une carte plus forte que toutes celles du deuxième joueur.

Exercice 10 (*)**.** Déterminer les ensembles suivants :

1) $\{1,2\} \cap \{1,3,12\}$, $\{1,2\} \cup \{1,3,12\}$, $\{1,2,12\} \cap (\{12,17\} \cup \{2,8\})$, $\{1,2,3,5\} \setminus (\{1,2\} \cap \{1,3\})$.

2) L'intersection de l'ensemble des nombres premiers avec l'ensemble des nombres pairs.

3) $\left]-\infty, \frac{3}{4}\right[\cap [-1,3]$, $[1,3] \cap [2,5]$, $[1,3] \cup [2,5]$.

Exercice 11. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $I \cap J$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On rappelle que l'ensemble vide est un intervalle ouvert.

2) Montrer que si $I \cap J \neq \emptyset$ alors $I \cup J$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (*)**.** Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Montrer que :

1) $(A \cup B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}$;
2) $(A \cap B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$;
3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
4) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Exercice 13. Soit $A = \left\{ \frac{1}{k(k+1)} \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}$ et $B = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}^* \text{ et } n < m \right\}$.

1) Étudier les inclusions entre A et B.
2) Les ensembles A et B sont-ils bornés ?
3) Si oui, donner l'ensemble des majorants et des minorants et calculer leurs bornes supérieures et inférieures.
4) Les ensembles A et B ont-ils un maximum/minimum ?

Fonctions d'une variable réelle

On rappelle qu'une fonction f est la donnée de deux ensembles X et Y (respectivement l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée) ainsi que la donnée pour tout $x \in X$ d'un unique $y_x \in Y$ qui lui est associé. Ce nombre y_x associé à x se note aussi $f(x)$. En termes intuitifs, une fonction est donc la donnée de trois choses : un ensemble de départ, un ensemble d'arrivée, un moyen de calcul pour connaitre le y_x dans l'ensemble d'arrivée correspondant à un x de l'ensemble de départ.

La notation la plus précise pour désigner une fonction est

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y_x. \end{aligned}$$

On emploie aussi souvent les notations abrégées $X \xrightarrow{f} Y$ ou $f : X \to Y$ ou encore $x \overset{f}{\mapsto} y_x$.

Exercice 14 (Image et antécédents *)**.** Soit $f : [1, 3[\to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 2$.

1) Déterminer l'image de 2 par f.
2) Déterminer les antécédents de -2 par f (s'il en existe).
3) Déterminer les antécédents de 2 (s'il en existe).
4) Déterminer l'image de f.
5) Reprendre les mêmes questions pour la fonction $g : [-3, 2[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -3x + 2$.

Exercice 15 (*)**.**

1) Parmi les diagrammes suivants, lesquels sont les diagrammes de fonctions $X \to Y$?
2) Parmi les graphes suivants, lesquels sont ceux de fonctions $X \to Y$? (voir la figure 2)

Exercice 16 (*)**.** On considère les fonctions $f_m : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par $f_m(x) = x^2 - 2mx$.

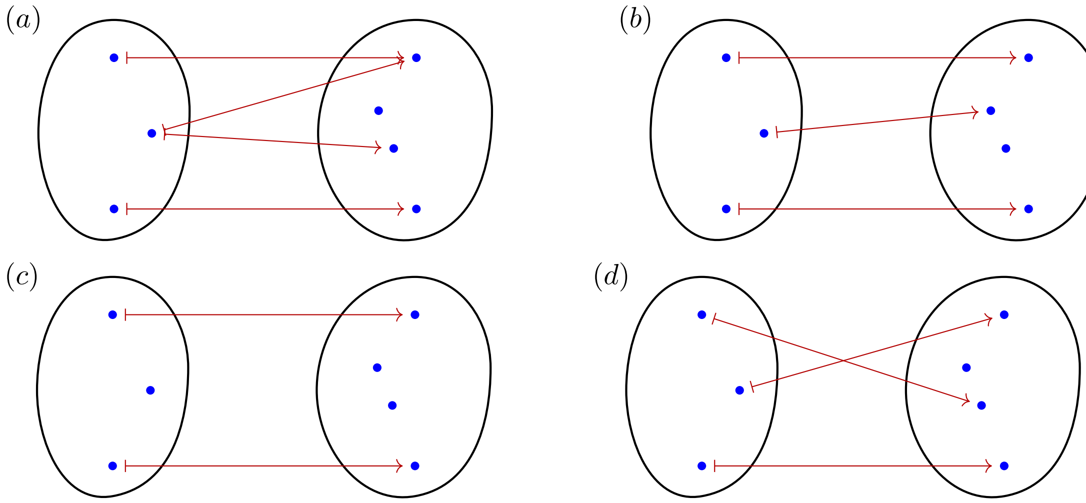
1) Déterminer l'image de f_1 et puis celle de f_{-1}.
2) Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour lesquelles l'image de la fonction f_m est $[-2, +\infty[$.

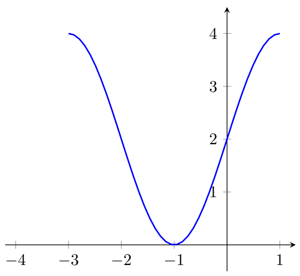
Exercice 17 (*)**.**

1) Parmi les fonctions de l'exercice 15, lesquelles sont injectives ? Lesquelles sont surjectives ?
2) Dans les graphes des fonctions de l'exercice 15, représenter $f^{-1}([0, 1])$. *On rappelle que la préimage d'un ensemble A, notée $f^{-1}(A)$, existe même lorsque la fonction n'est pas bijective !*

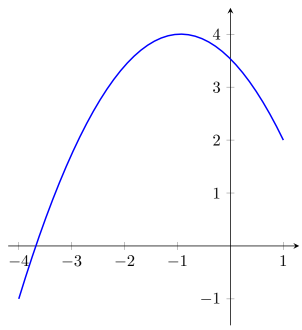
Exercice 18 (*)**.** Soit E et F deux parties de $\mathbb{R}$ (non vides) et $f : E \longrightarrow F$. Quantifier les assertions suivantes puis leurs négations : f est injective ; f est surjective ;

Exercice 19. Soit E et F deux parties de $\mathbb{R}$ (non vides) et $f : E \longrightarrow F$. Quantifier les assertions suivantes puis leurs négations : f est constante ; f est minorée ; f est bijective ; f ne prend que des valeurs positives ; f prend au plus deux valeurs ; f s'annule au plus une fois.

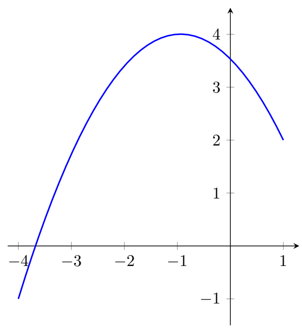




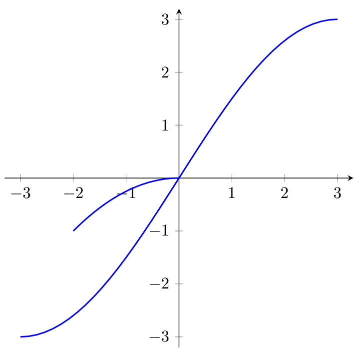
(a) $X = [-4, 1]$ et $Y = \mathbb{R}$.



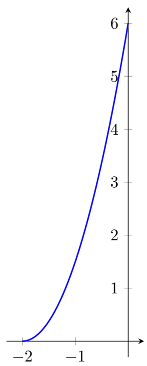
(b) $X = [-4, 1]$ et $Y = \mathbb{R}$.



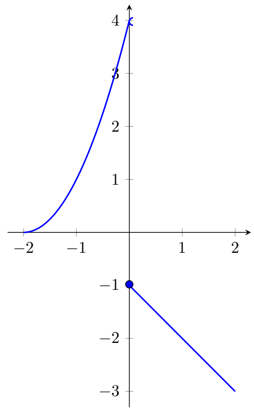
(c) $X = [-4, 1]$ et $Y = [-1, 4]$.



(d) $X = [-3, 3]$ et $Y = \mathbb{R}$.



(e) $X = [-2, 0]$ et $Y = [0, 6]$.



(f) $X = [-2, 2]$ et $Y = \mathbb{R}$. Le point en gras et le petit arc de cercle signifient que le point $(0, -1)$ fait partie du graphe mais pas le point $(0, 4)$.

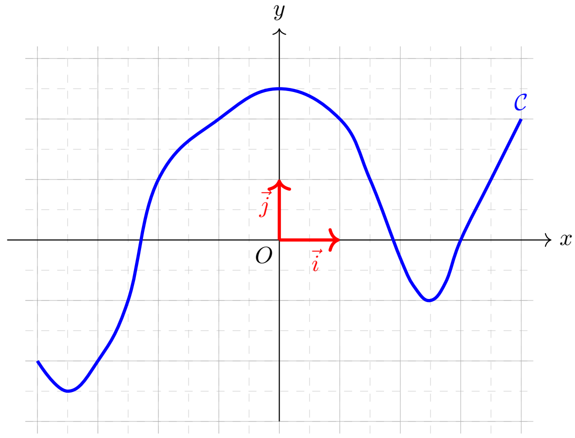
FIGURE 2 – Graphes de la question 2) de l'exercice 15.

Une formule comme $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas une fonction (car nous n'avons pas donné l'ensemble de départ ni d'arrivée !). Quand on se donne une formule, il y a des x pour lesquels on peut calculer (par exemple x doit être non nul si $f(x) = \frac{1}{x}$). L'ensemble D des x où la formule est calculable s'appelle l'ensemble de définition de la formule. On peut alors définir une fonction à partir de la formule en prenant D comme ensemble de départ, $\mathbb{R}$ comme ensemble d'arrivée et la formule comme moyen de calcul. Avec des symboles, on a la fonction $f : D \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$. Par abus de langage, on emploie souvent l'expression ensemble de définition de la fonction au lieu de dire l'ensemble de définition de la formule (c'est incorrect, mais c'est l'usage).

Exercice 20 (*)**.** Pour quels nombres réels x les expressions suivantes sont-elles bien définies ?

$$f_1(x) = \frac{1}{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}, \quad f_2(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad f_4(x) = \frac{x+1}{\sqrt{|x^2 + 2x| - 3}}.$$

Exercice 21 (Représentation graphique, minorant, majorant, tableau de variations)**.** On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$. On demande d'en déduire :



1) le tableau de variations de f ;

2) l'image de f ;

3) un minorant de f si elle est minorée, un majorant de f si elle est majorée ;

4) le ou les antécédents, s'il(s) existe(nt), de -1, de 1, de $5/2$, de 3.

Exercice 22. On considère la correspondance

$$t \mapsto f(t) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right).$$

1) Définir deux fonctions en utilisant cette correspondance, c'est-à-dire en précisant les autres éléments de la définition.

2) Supposons désormais que le domaine de f est $\mathbb{R}$. Quelle est l'*image* de f, c'est-à-dire $\mathrm{im}(f) := f(\mathbb{R})$? *(Si on pose $f(t) = (x(t), y(t))$, calculer $x^2 + y^2$.)*

Exercice 23 (Monotonie)**.** On rappelle les tableaux de variations des fonctions $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2$ et $[0, +\infty[\ni x \mapsto \sqrt{x}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

et

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1) Montrer que la fonction $f : x \in [0, +\infty[\mapsto f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x}$ est strictement monotone sur $[0, +\infty[$.

2) Montrer que la fonction $f : x \in [0, +\infty[\mapsto f(x) = (x^2 - 2)\sqrt{x}$ n'est pas monotone sur $[0, +\infty[$.

3) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \geq x - 1$ pour $x \in [0, +\infty[$.

Exercice 24 (Majorant, minorant *)**.** Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est minorée ou/et majorée. Le cas échéant, donner un minorant et un majorant.

1) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

2) $k : [0, 5] \to \mathbb{R}$ définie par $k(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{1+x}$.

Exercice 25 (Étude de fonction *)**.** Soit $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x - 3| + |2x + 6| - 5$.

1) La fonction f est-elle paire ? Est-elle impaire ?

2) Justifier que $\forall x \in [-4, 4]$, $-5 \leq f(x) \leq 16$.

3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ puis dresser le tableau de signe de f.

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Représenter le graphe de f sur $[-4, 4]$ dans un repère orthonormé.

Exercice 26 (Composition de fonctions *)**.** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = 3x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Expliciter les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 27. Décomposer les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ à l'aide de fonctions simples :
$x \mapsto \sqrt{2x^2+1}, \quad x \mapsto \dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2}$

Exercice 28. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = mx^2 - 2(2m-1)x + 3m - 2$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminer m tel que l'image de f soit contenue dans $[-2, +\infty[$. *(On pourra commencer par faire une esquisse du graphe et faire apparaitre le problème sur le dessin.)*

Même question avec $\mathrm{im}(f) \subset]-\infty, -1[$.

Exercice 29. Montrer que $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ est bijective en calculant $f^{-1}(\{y\})$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

«««< HEAD

Exercice 30. Le but de cet exercice est d'établir que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont en bijection.

1) Expliquer intuitivement pourquoi le résultat est surprenant

2) On considère la fonction $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x,y) = \frac{y^2+y+x^2+3x+2xy}{2}$. Calculer les valeurs $f(x,y)$ pour $x + y \leq 3$. Représenter vos calculs dans un tableau.

3) Si $y \geq 1$, comparer $f(x,y)$ et $f(x+1, y-1)$.

4) Comparer $f(x, 0)$ et $f(0, x+1)$.

5) Montrer en faisant une récurrence que f est surjective.

6) En déduire que f est une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

=======

»»»> 9d8f9a5fcb1c8c19f6ab13e4a0e12a30b2e9db77

Exercice 31 (*)**.**

1) Écrire avec des quantificateurs la définition d'une fonction croissante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, puis la définition d'une fonction non croissante.

2) Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. Déterminer le plus grand sous intervalle fermé sur lequel la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - mx + 1$ est strictement décroissante.

Exercice 32. Trouver une fonction polynomiale de degré au plus 1 (c'est-à-dire une fonction affine) qui réalise une bijection entre les intervalles $]a, b[$ et $]c, d[$, où $a < b$ et $c < d$ sont des nombres réels.

Exercice 33.

1) Déterminer le plus grand domaine de définition pour lequel l'expression suivante définit une fonction réelle : $x \mapsto \ln(x - \sqrt{x^2+2x-8})$.

2) Comparer $\log_2 \pi$ et $\sqrt{2}$ en remarquant que $\sqrt{2} < 3/2$.

3) Construire le graphe de arccos et simplifier $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos x\right)$.

4) Soit $f(x) = \ln(1 - x + x^2) + \arcsin\sqrt{1-x^2}$. Indiquer les fonctions élémentaires et les opérations nécessaires pour construire f. Déterminer le plus grand domaine de définition pour lequel cette expression définit une fonction réelle.

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\sin(3x + \pi/6) = -\sqrt{2}/2$ et $\ln(x^2 - 4x + e) = 1$.

6) La fonction $x \mapsto \cos(3x + \pi/2)$ est-elle périodique ? Si oui, déterminer sa période principale. Même question pour $x \mapsto x + \sin x$.

Exercice 34 (*)**.** Soient f et g deux fonctions croissantes.

1) Montrer que $f + g$ est croissante.

2) Montrer que si f et g sont positives, alors le produit fg est aussi croissant.

3) Question difficile : écrire la fonction sin sur $[-\pi/2, 3\pi/2]$ comme différence de deux fonctions croissantes. Quid sur $[0, 4\pi]$?

Notations ensemblistes pour les fonctions

Soit $f : X \to Y$. Vous êtes familiers avec la notation $f(x)$, et quand f est bijective, avec la notation $f^{-1}(y)$. Si $A \subset X$, on note $f(A) := \{f(x), x \in A\}$. Sans avoir besoin de f bijective, on note pour un ensemble $B \subset Y$, $f^{-1}(B) := \{x \in X, f(x) \in B\}$.

Exercice 35 (*)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.

1) Calculer $f^{-1}([5, 10[)$ et $f^{-1}(]0, 5])$.

2) Calculer $f^{-1}(I)$ où I est un intervalle de longueur finie quelconque.

Exercice 36. Soit $f : X \to Y$ une fonction.

1) Montrer que pour tous $C, D \subset Y$ on a $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

2) Trouver une fonction f et des sous-ensembles $A, B \subset X$ tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. Montrer qu'en revanche, il y a une inclusion toujours vraie.

Exercice 37. Soit X, Y deux ensembles, et $f : X \to Y$.

1) Étudier les inclusions entre $A \subset X$ et $f^{-1}(f(A))$.

2) Étudier les inclusions entre $B \subset Y$ et $f\left(f^{-1}(B)\right)$.

3) Donner des exemples où les inclusions précédentes sont strictes.

Limites

Exercice 38 (Limites en un point fini *)**.** On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}, \qquad g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 4x - 6}.$$

1) Évaluer en $x = 2$ le numérateur et le dénominateur des deux fonctions. Préciser si leur limites en $x = 2$ existent. Même problème en $x = 1$.

2) Calculer les limites à gauche et à droite en $x = -3$ pour g.

Exercice 39 (Limites en un point fini *)**.** Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Calculer les limites à gauche et à droite de f en $x = 0$ et préciser si la limite en 0 existe. Même question en $x = -2$ et $x = 2$.

3) Établir le tableau de variations de f.

Exercice 40. Soit $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

1) Si $b \in \mathbb{R}$, trouver les antécédents de b.

2) Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, 1[$.

3) Pour $b > 0$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(]-b, b[)$.

4) L'affirmation suivante est-elle vraie ?

Pour tout $\epsilon > 0$ *il existe* $\delta(\epsilon) > 0$ *tel que pour tout* $-\delta(\epsilon) < x < \delta(\epsilon)$, $x \neq 0$ *on a* $-\epsilon < f(x) < \epsilon$.

5) Reprendre l'exercice avec la fonction g définie par $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

Exercice 41 (Limites à l'infini *)**.** Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 10, \quad g(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}, \quad h(x) = \frac{x - \sqrt{|x|}}{x + 3}, \quad k(x) = \frac{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}{x}.$$

Exercice 42 (Limites et expression conjuguée *)**.** Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x + 4} - 2} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{5x + 4} - 3}{x - 1} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 3}\right) \qquad \lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{x} - \sqrt{x + 2})$$

Exercice 43 (Limites par croissances comparées *)**.** Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0, x>0} \sqrt{x}\big(e^x + \ln(x)\big) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+e^x} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x^2e^x}$$

Exercice 44. Donner un exemple d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de limite en 0 et telle que son carré en admette une.

Exercice 45. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \sqrt{\frac{x^2-2x-1}{2-x}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$.

Exercice 46. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Étudier l'existence des limites en 0 de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 47 (Limites et inégalités *)**.**

1) Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$.
2) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x-x^2)| \leq 1$.
3) En déduire la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(x-x^2)}{\sqrt{x^4+1}}$.

Exercice 48 (Limites et asymptote)**.** Soit $f(x) = \dfrac{x^2-3x-3}{3x+2}$.

1) Déterminer le plus grand domaine de définition pour lequel f définit une fonction réelle.
2) Étudier les variations de f.
3) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}$.
4) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{1}{3}\,x\right) = -\frac{11}{9}$.
5) En déduire l'équation d'une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
6) Représenter le graphe de f ainsi que l'asymptote précédente.
7) L'étude graphique de cette fonction peut être réalisé en suivant un autre raisonnement. On considère le changement de variables $t = 3x+2$, donc $x = \frac{t-2}{3}$. On étudie la fonction $g(t) = f(\frac{t-2}{3})$: Quelle est la forme explicite de $g(t)$? Esquisser son graphe dans le système de coordonnées Oty.

Exercice 49. Soit $f(x) = \sqrt{x^2+2x}$.

1) Déterminer le plus grand domaine de définition pour lequel f définit une fonction réelle.
2) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
3) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 1$.
4) En déduire l'équation d'une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Exercice 50 (Difficile)**.** Démontrer que la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ n'est pas une fonction rationnelle. (*Raisonner par l'absurde en considérant la limite de* $\frac{f(x)}{x}$ *en* $\pm\infty$.)

Exercice 51 (Difficile)**.** Démontrer que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ en utilisant un encadrement issu de la comparaison d'aires. On pourra suivre les étapes ci-dessous et le cercle trigonométrique.

- t représente l'angle d'un point P_t appartenant au cercle trigonométrique.
- Soit A le point $(1, 0)$. Soit Q_t le point d'intersection de la droite (OP_t) et de la droite définie par $x = 1$. Calculer les aires du triangle $[OAQ_t]$, du triangle $[OAQ_t]$ et du secteur de cercle déterminé par les points O, A et P_t. On considérera t positif et proche de 0.

- Comparer ces aires et conclure.

Exercice 52 (Difficile)**.** Étudier l'existence de la limite en 0 pour la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

1) $f(x) = x^n \sin \dfrac{1}{x}$, où n est un entier fixé.
2) $f(x) = 1$ si x est rationnel et $f(x) = 0$ sinon.
3) $f(x) = \dfrac{1}{q}$ si x est rationnel, $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, et $f(x) = 0$ sinon.

Rappel : Pour montrer que la limite (la limite à gauche ou à droite) en a de f n'existe pas il suffit de trouver un $\epsilon > 0$ et des réels x_n et x'_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}, \quad |x'_n - a| < \frac{1}{n} \quad \textit{et} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon.$$

Continuité

Exercice 53 (Continuité)**.** Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues. On considère les fonctions

$$\min(f, g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \max(f, g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

qui à tout réel x associent respectivement le minimum entre $f(x)$ et $g(x)$ et le maximum. Montrer à l'aide de l'Exercice 6 que ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 54. On suppose l'inégalité $|\sin t| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ connue. On veut démontrer que les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$.

1) Justifier que sin est continue en 0.
2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sin(a + h) - \sin a = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\big(a + \frac{h}{2}\big)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.
3) En déduire que sin est continue en a, donc sur $\mathbb{R}$.
4) En déduire que cos est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 55 (*)**.**

1) Montrer qu'il n'existe pas de fraction $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ telle que $x^2 = 2$.
2) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$.

Exercice 56 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**

1) Soit la fonction $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(2x) - x$. Montrer que cette fonction s'annule sur $[0, 1]$.
2) On considère l'équation $2x\sqrt{x^2 + 1} = x + 1$. Montrer l'existence d'une solution sur $[0, 1]$.
3) On considère l'équation $2\cos(x) = x$.
   (i) Montrer que les solutions, si elles existent, appartiennent à l'intervalle $[-2, 2]$.
   (ii) Montrer l'existence d'au moins une solution. La solution est elle unique ? (Pour voir qu'il n'y a pas de solution négative, on pourra regarder une esquisse du graphe de $x \mapsto 2\cos x$ à laquelle on rajoutera la droite passant par $(-\frac{3}{2}, 0)$ de pente 2 et on fera une comparaison avec la première bissectrice.)

Exercice 57. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer que pour tout réel $\lambda \geq 0$, il existe $x_\lambda \in [0, 1]$ tel que $f(x_\lambda) = \lambda g(x_\lambda)$.

Exercice 58.

1) Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ telle que $f(c) = c$.
2) On considère un cercle sur la surface de la Terre et on mesure la température en chaque point. Montrer qu'il existe deux points du cercle diamétralement opposés qui ont la même température.