Analyse élémentaire – 2024-2025

Exercices 27 et 28 de la Feuille n° 2

On se propose de calculer deux intégrales, $\displaystyle\int_a^b x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$, apparaissant dans les exercices 27 et 28 respectivement.

On a

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^3\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx &= \int_a^b x^2\, e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx \\
&= \int_{a^2}^{b^2} te^{-\frac{t}{2}}\,dt && \text{(avec } t = x^2\text{)} \\
&= \int_{a^2}^{b^2} t\left(-\frac{1}{2}\, e^{-\frac{t}{2}}\right)' dt \\
&= -\frac{1}{2}\left(\left[te^{-\frac{t}{2}}\right]_{a^2}^{b^2} - \int_{a^2}^{b^2} e^{-\frac{t}{2}}\,dt\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\left[te^{-\frac{t}{2}}\right]_{a^2}^{b^2} + \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{t}{2}}\right]_{a^2}^{b^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(a^2e^{-\frac{a^2}{2}} - b^2e^{-\frac{b^2}{2}} + \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{2} - \frac{e^{-\frac{b^2}{2}}}{2}\right) \\
&= \frac{2a^2+1}{4}\, e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{2b^2+1}{4}\, e^{-\frac{b^2}{2}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{2\sin^2\theta + \cos^2\theta} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\tan^2\theta + 1}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan\theta)'\,d\theta}{2\tan^2\theta+1} && \text{(avec } x = \tan\theta\text{)} \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{2x^2+1} \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{(\sqrt{2}x)^2+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}\,dx}{(\sqrt{2}x)^2+1} && \text{(avec } y = \sqrt{2}x\text{)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dy}{y^2+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan y\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\arctan\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$