Université d'Angers
Département de Mathématiques

L1

Analyse élémentaire — 2024-2025

Exercice 13, nouvelle version de la feuille no 1

Pour chacun des ensembles E suivants, donner, s'ils existent,

- le maximum, $\max(E)$
- le minimum, $\min(E)$
- l'ensemble des majorants de E
- l'ensemble des minorants de E
- la borne supérieure $\sup(E)$
- la borne inférieure $\inf(E)$.

1) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
2) $\{7 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$
3) $\{7 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0, 7\}$
4) $\{7 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$
5) $\{x^2 \mid x \in [0, 2[\}$
6) $\{x^2 \mid x \in [-2, 2[\}$
7) $\{\frac{1}{x} \mid x \in]0, 2]\}$

Un commentaire général et deux rappels. Il faudrait se concentrer sur la borne sup et inf. Par la suite, le min ou le max existe si et seulement si la borne inf ou la borne sup se trouve dans l'ensemble.

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}$. La borne sup, notée $\sup(A)$ et le plus petit majorant de A.

Lemme. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ bornée supérieurement et soit s un majorant de A. Alors $s = \sup(A)$ si et seulement si*

$$\textit{pour tout} \quad \varepsilon > 0 \quad \textit{il existe} \quad a_\varepsilon \in A \quad \textit{tel que} \quad -\varepsilon + s < a_\varepsilon \leq s.$$

Démonstration. J'indique seulement la preuve dans le sens direct. Si s est le plus petit majorant, on suppose par l'absurde (à ce moment il faudrait faire un dessin) qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $a \in A$ on ait

$$a \leq -\varepsilon + s.$$

Alors $-\varepsilon + s$ est un majorant de A, ce qui contredit le choix de s. □

Quelques indications pour résoudre l'exercice 13.

2) On a $n + 1 \geq 1$, donc $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$, c'est-à-dire $-1 \leq -\frac{1}{n+1} < 0$. Il s'ensuit que

$$6 \leq 7 - \frac{1}{n+1} < 7.$$

Alors

- les minorants de E sont tous les éléments de $]-\infty, 6]$
- les majorants de E sont tous les éléments de $[7, +\infty[$
- $\inf(E) = 6$ et $\sup(E) = 7$
- $\min(E) = 6$, l'élément correspondant à $n = 0$, et $\max(E)$ n'existe pas.

4) Comme l'ensemble considéré est celui du point 2) auquel on rajoute l'élément $a \in \mathbb{R}$, il faut discuter trois cas : $a \leq 6$, $6 < a < 7$ et $a \geq 7$ — on se demande si a est parmi les minorants ou les majorants de l'ensemble du point 2). Faites attention aux inégalités !

6) D'après le comportement de la fonction $x \mapsto x^2$ on a

$$E = \{x^2 \mid x \in [-2, 2[\} = [0, 4].$$

Dans ce cas on voit facilement que $\min(E) = 0$ et $\max(E) = 4$.