Exercice 11 de la feuille no 2

Soient $x < x' \in \,]0, +\infty[$.

1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{x'} < \frac{\ln(x') - \ln(x)}{x' - x} < \frac{1}{x}.$$

2) On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(\alpha) = \ln\big((1-\alpha)x + \alpha x'\big) - (1-\alpha)\ln(x) - \alpha \ln(x')$. De l'étude de f et du point précédent déduire que pour tout $\alpha \in \,]0,1[$ on a

$$\alpha \ln(x) - (1-\alpha)\ln(x') < \ln\big(\alpha x + (1-\alpha)x'\big). \tag{$\sharp$}$$

(On dit que la fonction logarithme est *concave*.)

3) Interpréter géométriquement l'inégalité ($\sharp$) sur le graphe du logarithme.

4) Démontrer par récurrence que pour tous $0 < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n < 1$ tels que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, et pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \,]0, +\infty[$, on a

$$\alpha_1 \ln(x_1) + \alpha_2 \ln(x_2) + \cdots + \alpha_n \ln(x_n) \leq \ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

5) En déduire l'inégalité des moyennes.

Solution.

1) En appliquant le TAF sur l'intervalle $[x, x']$ on en déduit qu'il existe c avec $x < c < x'$ tel que

$$f(x') - f(x) = f'(c)(x' - x),$$

c'est-à-dire

$$\ln(x') - \ln(x) = \frac{1}{c}\,(x' - x),$$

d'où

$$\frac{1}{x'}\,(x' - x) < \ln(x') - \ln(x) < \frac{1}{x}\,(x' - x).$$

2) Il faut étudier sur $[0,1]$ la fonction définie par

$$f(\alpha) = \ln\big((1-\alpha)x + \alpha x'\big) - (1-\alpha)\ln(x) - \alpha \ln(x'),$$

qui est une fonction dépendant de α. Comme dans toute étude de fonction, il faut comprendre le comportement de la dérivée. On a

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{x' - x}{x + \alpha(x' - x)} - (\ln(x') - \ln(x)) \\ &= (x' - x)\left(\frac{1}{x + \alpha(x' - x)} - \frac{\ln(x') - \ln(x)}{x' - x}\right). \end{aligned}$$

D'après le premier point on remarque que

$$f'(0) = (x' - x)\left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(x') - \ln(x)}{x' - x}\right) > 0$$

et

$$f'(0) = (x' - x)\left(\frac{1}{x'} - \frac{\ln(x') - \ln(x)}{x' - x}\right) < 0.$$

De plus, la fonction

$$\alpha \mapsto \frac{1}{x + \alpha(x' - x)}$$

est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, donc il existe (TVI) un unique $\alpha_0 \in]0, 1[$ tel que

$$f'(\alpha_0) = 0.$$

On en déduit le tableau de variation de f

x	0		α_0		1
f'	$(+)$	$+$	0	$-$	$(-)$
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha_0)$	$\searrow$	0

et donc, pour tout $0 < \alpha < 1$, on a $0 < f(\alpha)$, c'est-à-dire

$$\ln\big((1 - \alpha)x + \alpha x'\big) > (1 - \alpha)\ln(x) + \alpha \ln(x').$$

3)

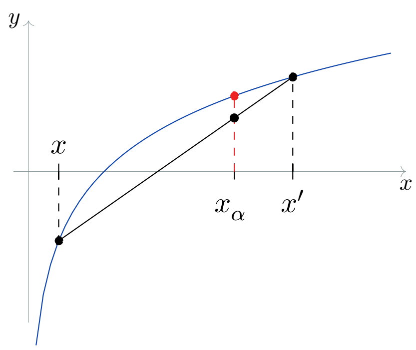

Figure 1: Le logarithme est une fonction concave : le point (rouge) du graphe correspondant à $x_\alpha = (1 - \alpha)x + \alpha x'$ se trouve au-dessus du point (noir) de la sécante, pour tout $0 < \alpha < 1$.

4) L'initialisation de la récurrence a été établie dans le deuxième point (inégalité stricte si $x \neq x'$ et égalité si $x = x'$). On suppose l'inégalité vraie pour n. On veut la démontrer pour $n + 1$. Soient $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in]0, +\infty[$ et soient $0 < \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} < 1$ tels que $\sum_j = 1$. On a, en posant

$$\alpha' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 - \alpha_{n+1} \quad \text{et} \quad x' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha'} x_i \tag{$\star$}$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j\right) &= \ln\Big(\alpha' x' + \alpha_{n+1} x_{n+1}\Big) \\ &\geq \alpha' \ln(x') + \alpha_{n+1} \ln(x_{n+1})\end{aligned}$$

d'après l'initialisation de la récurrence, car $\alpha' + \alpha_{n+1} = 1$. Donc, en utilisant la définition de droite dans ($\star$), et l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j\right) &\geq \alpha' \ln(x') + \alpha_{n+1} \ln(x_{n+1}) \\
&= \alpha' \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha'}\, x_i\right) + \alpha_{n+1} \ln(x_{n+1}) \\
&\geq \alpha' \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha'}\, \ln(x_i)\right) + \alpha_{n+1} \ln(x_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln(x_i) + \alpha_{n+1} \ln(x_{n+1}).
\end{aligned}$$

On a égalité si et seulement si on a égalité dans les deux inégalités ci-dessus, c'est-à-dire dans

$$\ln\left(\alpha' x' + \alpha_{n+1} x_{n+1}\right) \geq \alpha' \ln(x') + \alpha_{n+1} \ln(x_{n+1})$$

et dans

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha'}\, x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha'}\, \ln(x_i).$$

Donc, dans l'ordre inverse, si on a

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

et

$$x_{n+1} = x' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha'}\, x_i = x_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha'} = x_1.$$

5) L'inégalité des moyennes : pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$ on a

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1, \cdots x_n}$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

Une preuve de cette inégalité est obtenue en considérant l'inégalité établie au point 4) dans laquelle on prend tous les α_i égaux à $\frac{1}{n}$. Il s'ensuit

$$\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\, \ln(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}\, \ln(x_n) = \ln\left(\sqrt[n]{x_1, \cdots x_n}\right).$$