

Analyse élémentaire – 2025-2026

DEVOIR N° 1

Devoir à rendre au début de la semaine 29 septembre – 3 octobre

Exercice 1. On considère la fonction f définie par l'expression $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}+1}$ à valeurs réelles.

- 1) Déterminer D_f , le plus grand domaine de définition de f .
- 2) Montrer que f est strictement croissante. (*Indication* : On pourrait comparer les valeurs $f(x_1)$ et $f(x_2)$ quand $x_1 < x_2$.)
- 3) Justifier que f est injective.
- 4) Déterminer $\text{im}(f)$, l'image de f et justifier que $f : D_f \rightarrow \text{im}(f)$ est bijective.
- 5) Déterminer l'expression définissant la fonction réciproque $f^{-1} : \text{im}(f) \rightarrow D_f$, c'est-à-dire calculer la **bonne solution** de l'équation $y = f(x)$. (*Indication* : Organiser l'équation $y = f(x)$ comme une équation de degré deux en \sqrt{x} .)

Solution.

- 1) Les conditions d'existence de l'expression $\frac{x-2}{\sqrt{x}+1}$ sont

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} + 1 \neq 0. \end{cases}$$

Comme $\sqrt{x} + 1 \geq 1$ on en déduit que $D_f = [0, +\infty[$.

- 2) Soient $x_1 < x_2$. On a

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1 - 2}{\sqrt{x_1} + 1} - \frac{x_2 - 2}{\sqrt{x_2} + 1} \\ &= \frac{(x_1 - 2)(\sqrt{x_2} + 1) - (\sqrt{x_1} + 1)(x_2 - 2)}{(\sqrt{x_1} + 1)(\sqrt{x_2} + 1)}. \end{aligned}$$

En développant les parenthèses, le numérateur se factorise en

$$x_1\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}x_2 + x_1 - x_2 + 2\sqrt{x_1} - 2\sqrt{x_2} = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 2).$$

Donc

$$f(x_1) - f(x_2) = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) \frac{\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 2}{(\sqrt{x_1} + 1)(\sqrt{x_2} + 1)} < 0$$

car la fraction est strictement positive. Il s'ensuit que f est strictement croissante.

Remarque. On peut argumenter en utilisant la conséquence du théorème des accroissements finis¹ qui dit que si la dérivée de f est strictement positive, alors f est strictement croissante — f est définie sur un intervalle. On a

$$f'(x) = \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}+1} \right)' = \left(\sqrt{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} > 0.$$

¹Voir la deuxième partie du cours.

3) Une fonction strictement monotone est injective (tout élément de l'ensemble des valeurs a au plus un antécédent).

4) Comme $f(0) = -2$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 - \frac{2}{x})}{\sqrt{x}(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(1 - \frac{2}{x})}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = +\infty,$$

on a $\text{im}(f) \subset [-2, +\infty[$. Pour justifier l'égalité il y a deux possibilités : ou bien on reste au niveau élémentaire de la définition, ou bien on invoque la continuité de f en remarquant que le domaine de définition est un intervalle.

Je développe l'argument élémentaire (dont on en aura besoin pour trouver l'expression de f^{-1} plus tard). Soit $y \in [-2, +\infty[$. On étudie l'équation

$$\frac{x-2}{\sqrt{x}+1} = f(x) = y.$$

On a

$$x-2 = y\sqrt{x} + y$$

c'est-à-dire l'équation de degré deux en $\sqrt{x} \geq 0$,

$$x - y\sqrt{x} - (y+2) = 0.$$

Les racines de cette équation de degré deux sont

$$\frac{1}{2} \left(y \pm \sqrt{y^2 + 4(y+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(y \pm \sqrt{y^2 + 4y + 8} \right) = \frac{1}{2} \left(y \pm \sqrt{(y+2)^2 + 4} \right).$$

Comme $y \geq -2$, les deux expressions sont des nombre réels, mais

$$\frac{1}{2} \left(y - \sqrt{(y+2)^2 + 4} \right) < 0.$$

On en déduit que l'équation $f(x) = y$ admet la solution unique

$$x_y = \frac{1}{4} \left(y + \sqrt{(y+2)^2 + 4} \right)^2.$$

En particulier, f est bijective vue comme fonction de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[-2, +\infty[$.

5) La fonction réciproque $f^{-1} : [-2, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est définie par

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{4} \left(y + \sqrt{(y+2)^2 + 4} \right)^2.$$

Exercice 2. On considère pour chaque $m \in \mathbb{R}$ la fonction $f_m : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_m(x) = x^2 - 2mx$.

- 1) Esquisser les représentations graphiques des fonctions f_1 et f_{-1} .
- 2) Déterminer l'image de f_1 et puis celle de f_{-1} .
- 3) Déterminer les valeurs du paramètre réel m telles que $\text{im}(f_m) = [-2, +\infty[$.
- 4) Les graphes des fonctions $g_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $g_m(x) = x^2 - 2mx$ sont des paraboles (convexes).
 - a) Déterminer la valeur minimale y_m de $g_m(x)$ ainsi que l'abscisse du point correspondant $(x_m, y_m) \in G_{g_m}$.

b) Dessiner le sous-ensemble du plan (dans le même système de coordonnées utilisé au point 5)) décrit par ces points lorsque m varie dans \mathbb{R} .

c) Pour chaque $m \in \mathbb{R}$, quelle est la relation reliant f_m et g_m ?

Solution.

1)

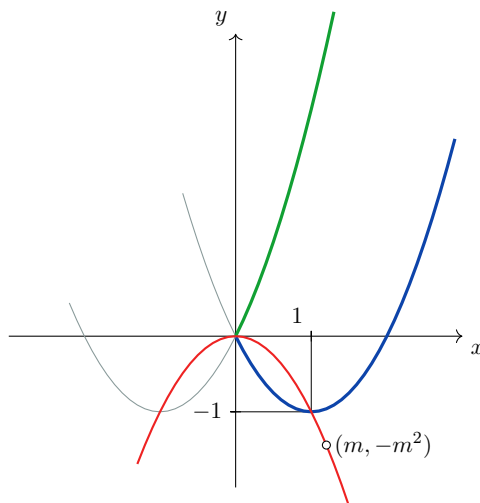


Figure 1: Le graphe de f_{-1} en vert et celui de f_1 en bleu ; la parabole des sommets est en rouge.

2) La fonction quadratique $x \mapsto x^2 - 2x$ atteint son minimum en 1. Alors

$$\text{im}(f_1) = [f_1(1), +\infty[= [1, +\infty[.$$

La fonction quadratique $x \mapsto x^2 + 2x$ atteint son minimum en $-1 \notin [0, +\infty[$. Alors

$$\text{im}(f_{-1}) = [f_{-1}(0), +\infty[= [0, +\infty[.$$

3) En général, les fonctions f_m sont strictement croissantes si $m \leq 0$, donc $\text{im}(f_m) = [0, +\infty[$ dans ce cas. Si $m > 0$, alors

$$\text{im}(f_m) = [f_m(m), +\infty[= [-m^2, +\infty[.$$

on en déduit que $\text{im}(f_m) = [-2, +\infty[$ si et seulement si $m = \sqrt{2}$.

4) On a $f_m = g_m|_{[0, +\infty[}$, c'est-à-dire f_m est la restriction de g_m à l'intervalle \mathbb{R}_+ .

Les sommets des paraboles définies par les graphes des fonctions g_m , c'est-à-dire par les équations $y = g_m(x)$, sont les points $(m, -m^2)$. Quand m varie dans \mathbb{R} , ces points décrivent la parabole

$$y = -m^2 = -x^2$$

(voir la figure 1).