Analyse élémentaire — 2023-2024

Contrôle continu
16 Octobre 2023, 09h30 – 11h00

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone, . . .) n'est autorisé.

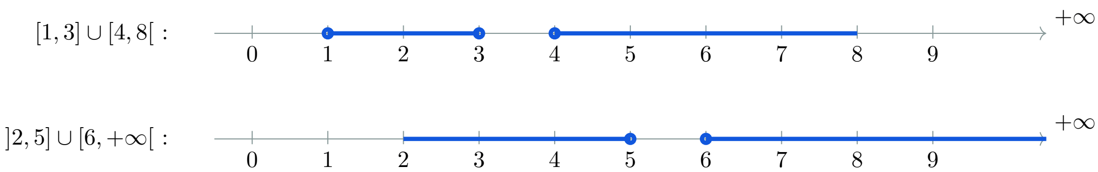
Exercice 1. On considère les expressions $f(x) = \sqrt{5 - 15x}$ et $g(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$. Dire pour quels $x \in \mathbb{R}$ ces expressions sont définies.

Solution.
La condition d'existence pour $f(x)$ est $5 - 15x \geq 0$, c'est-à-dire $3x \leq 1$. On conclut que $f(x)$ existe si et seulement si $x \leq \dfrac{1}{3}$.

Pour $g(x)$ la condition d'existence est $x^2 - 4x + 3 > 0$, d'où $x \in \,]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$.

Exercice 2. Calculer l'ensemble $([1, 3] \cup [4, 8[) \cap (]2, 5] \cup [6, +\infty[)$.

Solution.
Je pense que la solution graphique est la plus sûre. On a



d'où l'intersection des deux sous-ensembles réels est

$$]2, 3] \cup [4, 5] \cup [6, 8[$$

c'est-à-dire les parties bleus communes des deux sous-ensembles.

Exercice 3.

1) Trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 8x + 7$.
2) Calculer $f(]-1, +\infty[)$. (On pourra si on le souhaite s'aider du tableau de variations de f).

Solution.

1) Le minimum est atteint en $x_0 = -\dfrac{-8}{2} = 4$ et

$$f(x_0) = f(4) = 16 - 32 + 7 = -9.$$

2) Comme la fonction est strictement décroissante sur $]-\infty, 4]$ et strictement croissante sur $[4, +\infty[$, on a

$$f(]-1, +\infty[) = [f(x_0), +\infty[\, = [-9, +\infty[\,.$$

Exercice 4.

1) Soit $y \geq 0$. Écrire les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation $x(x + 3) = y$ d'inconnue x.
2) Montrer que parmi les deux solutions $\{x_1, x_2\}$, l'une est positive tandis que l'autre est négative.

3) Soit la fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x(x+3)$. Déduire des questions précédentes que f est bijective.

Solution.

1) Il faut résoudre l'équation en x,

$$x^2 + 3x - y = 0$$

avec $y \geq 0$. On a les solutions

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4y}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4y}}{2}$$

c'est-à-dire deux solutions réelles distinctes car le discriminant est strictement positif ($\Delta = 9 + 4y$).

2) Comme $\sqrt{9+4y} \geq 3$ (avec égalité si et seulement si $y = 0$, on a que

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{9+4y}}{2} \leq -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{9+4y}}{2} \geq 0.$$

3) On en déduit que l'équation $f(x) = y$ admet l'unique solution $x_y = \dfrac{-3 + \sqrt{9+4y}}{2}$ pour tout $y \geq 0$. Donc f est bijective.

Exercice 5.

1) Calculer, si elle existe, la limite de la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x}{x+1}$ en $+\infty$ et en -1.

2) Calculer, si elle existe, la limite de la fonction $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+3}$ en $+\infty$.

3) Montrer que $\cos(x) - \sin(x)$ est compris entre -2 et 2. En déduire si elle existe la limite en $+\infty$ de $h(x) = \dfrac{\cos(x) - \sin(x)}{x}$.

4) Calculer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de $k(x) = \dfrac{\ln(x)}{e^x + x^2}$ et la limite à droite en 0, c'est à dire $\lim\limits_{x \to 0, x > 0} k(x)$.

Solution.

1) On a

$$\frac{2x^2 + 2x}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{x+1} = 2x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \xrightarrow[x \to -1]{} -2.$$

2) On a

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+3} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x} + \sqrt{x+3})}{\sqrt{x} + \sqrt{x+3}} = \frac{x - x - 3}{\sqrt{x} + \sqrt{x+3}} = \frac{-3}{\sqrt{x} + \sqrt{x+3}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

3) On a

$$|\cos(x) - \sin(x)| \leq |\cos(x)| + |\sin(x)| \leq 2,$$

donc la limite recherchée vaut 0 d'après le théorème d'encadrement.

4) On a

$$\frac{\ln(x)}{e^x + x^2} = \frac{\ln(x)}{e^x(1 + x^2/e^x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

par les croissances comparées.

Comme

$$\lim_{x \to 0, x > 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0, x > 0} (e^x + x^2) = 1 + 0 = 1$$

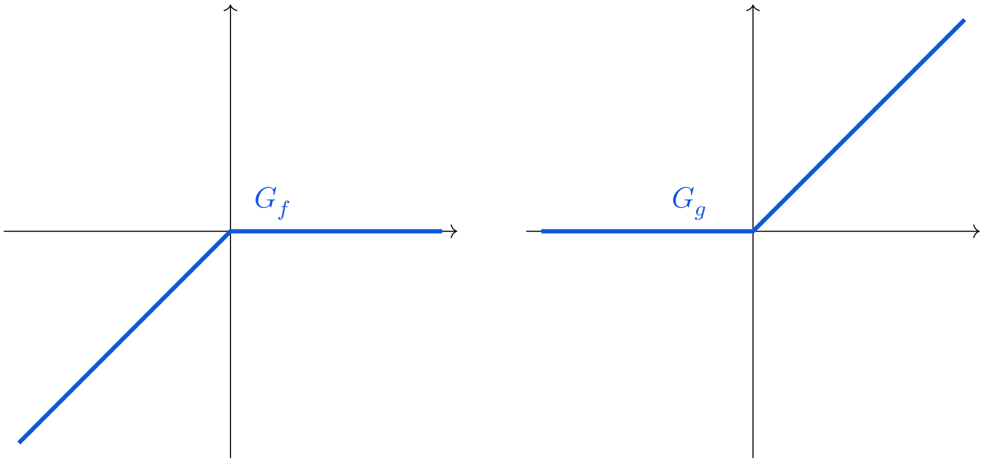
on en déduit que

$$\lim_{x \to 0, x > 0} \frac{\ln(x)}{e^x + x^2} = -\infty.$$

Exercice 6. Donner un exemple de deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant simultanément les trois conditions suivantes :

- f est croissante mais pas strictement croissante,
- g est croissante mais pas strictement croissante,
- $f + g$ est strictement croissante.

Solution.
Un exemple est le suivant, décrit graphiquement.



La somme $f + g$ est la fonction identité $x \mapsto x$ qui est strictement croissante.