

o , O et calculs de limites



La *comparaison asymptotique* permet d'étudier une fonction quelconque par rapport à une fonction considérée comme plus "simple". La comparaison s'effectue au voisinage d'un point ou en l'infini. Dans ce qui suit, la fonction de référence sera notée η et le point a .

En général, quand a est un point réel, $\eta(x) = (x - a)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$. Quand $a = +\infty$, la fonction η est x^p avec $p \in \mathbb{Z}$, $x^n \ln x$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, ou e^x . Donc la comparaison asymptotique est utilisée en un point fini ou en l'infini, et elle peut être infinitésimale ou infinie.

Même si les définitions couvrent les deux situations – infinitésimale et infinie –, les exemples et exercices porteront sur le cas a . De plus, assez souvent, $\eta(x) = (x - a)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Les définitions

On rappelle qu'un voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}$ pour lequel il existe un $r > 0$ tel que

- $] -r + a, a + r[\subset V$ si $a \in \mathbb{R}$
- $] r, +\infty[\subset V$ si $a = +\infty$.

Par la suite, on utilisera comme référence une fonction η continue, définie dans un voisinage V_η de a et qui ne s'annule pas sur ce voisinage V_η .

Définition 1.1. On dit qu'une fonction f définie dans un voisinage U de a est¹ *un $o(\eta)$ lorsque $x \rightarrow a$* (ou *un $o(\eta)$ localement en a*) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in U \cap V_\eta, |x| < \delta(\varepsilon) \implies |f(x)| \leq \varepsilon |\eta(x)|. \quad (\#)$$

La méthode a été introduite dans les travaux de Paul du Bois-Reymond. La notation a été proposée par Bachmann et Landau. Les lettres "o" et "O" ont été choisies pour indiquer "Ordnung" (en allemand, signifiant "ordre d'approximation").

Proposition 1.2. La condition (#) et les deux conditions suivantes sont équivalentes, :

(i) $\frac{f(x)}{\eta(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

(ii) Il existe une fonction $\varepsilon : U \cap V_\eta \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et telle que

$$\forall x \in U \cap V_\eta, f(x) = \varepsilon(x - a) \eta(x).$$

¹En français, on dit " f est un petit o de η autour de a , ou lorsque $x \rightarrow a$ ".

Démonstration. À faire. □

Exemple 1.3. Soit I un intervalle ouvert et soit $a \in I$. La fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a s'il existe une constante A telle que

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + o(x - a),$$

c'est-à-dire si $f(x) - f(a) - A(x - a)$ est un $o(x - a)$ lorsque $x \rightarrow a$.

Plus généralement, la fonction f admet un développement de Taylor en a à l'ordre n s'il existe un polynôme $T_{f,a}$ de degré $\leq n$ tel que $f(x) - T_{f,a}(x - a)$ est un $o((x - a)^n)$ localement en a .

Deux remarques sont nécessaires. D'abord, du point de vue de la notation qu'on vient d'utiliser dans l'exemple précédent; quand on dit, par exemple, que $\sin x - x$ est un $o(x)$ localement en 0, on écrit d'habitude,

$$\sin x - x = o(x) \quad \text{ou} \quad \sin x = x + o(x).$$

La notation est légèrement abusive; en effet, la notation $\sin x - x \in o(x)$ serait plus appropriée, car on sous-entend que la fonction $\sin x - x$ est dans l'ensemble des fonctions $o(x)$.

Remarque 1.4. Si η est une fonction bornée, le plus souvent la fonction constante 1, la condition (#) entraîne la continuité de f en a , avec $f(a) = 0$.

Définition 1.5. On dit qu'une fonction f définie dans un voisinage de U de a est un $O(\eta)$ si

$$\exists C > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in U \cap V_\eta, |x| < \delta \implies |f(x)| \leq C |\eta(x)|. \quad (b)$$

Remarque. Il est évident que :

- Si f est un $o(\eta)$ alors f est un $O(\eta)$ localement en a .
- Si f est un $O(\eta)$ localement en a et si $\eta \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, alors f est continue en a .

2. Applications

Calculs de limites

1) On veut calculer le limite de $\frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$ en 1. On a, avec le changement de variable $x = t + 1$ et d'après la remarque 1.4,

$$\frac{1-x^2}{\sin(\pi x)} = \frac{1-t^2-2t-1}{\sin(\pi t + \pi)} = \frac{t^2+2t}{\sin(\pi t)} = \frac{t^2+2t}{\pi t + o(t)} = \frac{t+2}{\pi + o(1)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{2}{\pi}.$$

2) On veut calculer le limite de $\frac{\sin x - x}{x^3}$ en 0. On a

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}.$$

3) On veut calculer le limite de $(1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos(3x)}}$ en 0. Comme

$$(1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos(3x)}} = e^{\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos(3x)}}$$

et

$$\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos(3x)} = \frac{x^2 + o(x^2)}{1 - 1 + \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)} = \frac{1 + o(1)}{\frac{9}{2} + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{9},$$

on a

$$(1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos(3x)}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^{\frac{2}{9}}.$$

Développement limités

On veut calculer le développement limité à l'ordre 2 de $\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos(2x)}$ en 0. On a

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos(2x)} &= \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4)} \\ &= \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{2x^2 - \frac{2x^4}{3} + o(x^4)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2). \end{aligned}$$

Dans l'étude de ce développement limité, on a utilisé plusieurs règles de calcul avec o et O . On les énumère dans l'ordre de l'utilisation ; puis on donnera des énoncés plus généraux.

- la composition : $\ln(1+t) - (t - \frac{t^2}{2}) = o(t^2)$ localement en 0, composé avec $x^2 = O(x^2)$ localement en 0, devient un $o(x^4)$, c'est-à-dire un o de la composition de $t \mapsto t^2$ avec $x \mapsto x^2$.
- la somme : $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$ et $o(x^2) + o(x^4) = o(x^2)$
- le produit avec une constante : $2 \cdot o(x^2) = o(x^2)$
- le produit avec un O : $x^2 o(x^2) = o(x^4)$

En particulier, si f est continue en a , alors $(1+f(x)+o(\eta))(1-f(x)+o(\eta)) = 1+o(\eta)$ localement en a , c'est-à-dire

$$\frac{1}{1+f(x)+o(\eta)} = 1 - f(x) + o(\eta)$$

localement en a .

3. Règles de calcul

Proposition 3.1 (Règles de calcul I).

- 1) $o(\eta) + o(\eta) = o(\eta)$ et $o(\eta) + O(\eta) = O(\eta)$
- 2) $O(\tau)o(\eta) = o(\tau\eta)$
- 3) $O(y^k) \circ o(\eta) = o(\eta^k)$
- 4) $o(y^k) \circ O(\eta) = o(\eta^k)$

Quelques explications sont nécessaires. Par exemple, la troisième règle équivaut à : Si g est un $O(\tau)$ localement en 0 et f est un $o(\eta)$ localement en a , avec $\lim_{x \rightarrow a} \eta(x) = 0$, alors la fonction composée $g \circ f$ est un $o(\tau \circ \eta)$ localement en a .

Démonstration.

- 3) Soient $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ un $O(y^k)$ localement en 0 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ un $o(\eta)$ localement en a , où

$$\lim_{x \rightarrow a} \eta(x) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On veut démontrer que $g \circ f$ est un $o(\eta^k)$ localement en a (c'est-à-dire la composition de $y \mapsto y^k$ avec η). En utilisant les définitions,

$$\exists C > 0, \exists \Delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall y \in W \cap V_\tau, |y| < \Delta \implies |g(y)| \leq C |y^k|$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_f(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in U \cap V_\eta, |x - a| < \delta_f(\varepsilon) \implies |f(x)| \leq \varepsilon |\eta(x)|.$$

Alors

$$|(g \circ f)(x)| = |g(f(x))| \leq C |f(x)^k| \leq C \varepsilon^k |\eta(x)|^k$$

dès que

$$|f(x)^k| < \Delta \quad \text{et} \quad |x - a| < \delta_f(\varepsilon).$$

Comme f est continue en a (pourquoi ?), l'image inverse de l'intervalle $\left[0, \sqrt[k]{\Delta}\right]$ par f est un voisinage de l'origine, c'est-à-dire il existe $r_\Delta > 0$ tel que

$$\{x \mid |x - a| < r_\Delta\} \subset f^{-1}\left(\left[0, \sqrt[k]{\Delta}\right]\right).$$

Alors, en prenant

$$\delta(\varepsilon) = \min\left(\delta_f(\sqrt[k]{\varepsilon}), \sqrt[k]{\Delta}\right)$$

on a

$$|x - a| < \delta(\varepsilon) \implies |(g \circ f)(x)| \leq C (\sqrt[k]{\varepsilon})^k |\eta(x)|^k = C \varepsilon |\eta(x)|^k \leq C \varepsilon |\eta(x)|.$$

(On suppose que x est suffisamment proche de a pour que $|\eta(x)| < 1$.) □

Exercice. (*)

- 1) Réécrire la preuve ci-dessus en utilisant l'équivalence de la proposition 1.2.
- 2) Démontrer les autres affirmations de la proposition 3.1.

Exercice. Calculer les limites suivantes :

1) $\ln(x) \ln(x - 1)$ en $x = 1$

2) $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$ en $x = 1$

3) $x^{\frac{1}{x-1}}$ en $x = 1$

4) $\frac{x}{\sin x} - \frac{\pi}{2 \cos x}$ en $x = \frac{\pi}{2}$

5) $\left(\tan \frac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{4}}$ en $x = 1$

Dans le calcul des développements limités, on utilise souvent les propriétés ci-dessous.

Proposition 3.2 (Règles de calculs II).

1) $\int_0^x o(t^n) dt = o(x^{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$

2) $(o(x^n))' = o(x^{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice. Donner le développement limités à l'ordre 3 de $\ln \frac{\cos x}{1+x+2x^2}$ en 0.