Université d'Angers
Département de Mathématiques

Analyse approfondie — 2025-2026

Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1.

1) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Montrer que si f' est bornée alors f est uniformément continue.

2) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $x \geq 0$ on a

$$|f(x)| \leq \alpha x + \beta.$$

Exercice 2. Étudier la continuité uniforme pour chacune des fonctions suivantes.

1) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
2) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$
3) $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x$
4) $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \sin \frac{1}{x}$

Exercice 3. Évaluer $\int_0^1 x^3\, dx$ en utilisant la définition avec des sous-divisions régulières et les points intermédiaires à droite.

Exercice 4. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les limites quand n tend vers $+\infty$ des expressions suivantes.

1) $\dfrac{1^p}{n^{p+1}} + \dfrac{2^p}{n^{p+1}} + \cdots + \dfrac{n^p}{n^{p+1}}$, où $p > 0$
2) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$
3) $\dfrac{\sqrt{n^2+1^2}}{n^3} + \dfrac{2\sqrt{n^2+2^2}}{n^3} + \cdots + \dfrac{n\sqrt{n^2+n^2}}{n^3}$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration par partie ou le changement de variables. (*Indication :* Pour (i) utilisez $t = \tan x$ ou faites apparaître une expression trigonométrique homogène au dénominateur.)

$$\text{(i)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x} \qquad \text{(ii)} \int_0^5 \frac{dt}{2t + \sqrt{3t+1}} \qquad \text{(iii)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx \quad (\text{ou } \sin^n x)$$

Exercice 6 (Fonction de Dirichlet)**.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Démontrer que f n'est pas intégrable dans le sens de Riemann.

Exercice 7.

1) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue, strictement croissante et bijective. Démontrer que

$$\int_0^1 f(x)\, dx + \int_0^1 f^{-1}(x)\, dx = 1.$$

2) Pour tout entier n, on veut calculer la somme

$$R_n = \left\lfloor\sqrt{1}\right\rfloor + \left\lfloor\sqrt{2}\right\rfloor + \left\lfloor\sqrt{3}\right\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt{n}\rfloor .$$

a) Quel est le nombre de points à coordonnés entières dans le carré de sommets $(1,1)$, $(N,1)$, (N,N) et $(1,N)$?

b) Conclure en utilisant une version discrète du résultat établi en 1) pour la fonction $g(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 8.

1) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.[1] Montrer que f est intégrable sur $[a,b]$.

2*) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (la fonction de Thomae) définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q},\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N}^*,\, p \wedge q = 1 \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

On veut démontrer que f est intégrable et que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

a) Montrer que le nombre de rationnels $\frac{p}{q}$ de $[0,1]$ qui satisfont $q \leq n$ est $\leq \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, essayer $\delta(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n^3}$ (pourquoi ?) et borner la somme de Riemann pour tout σ qui satisfait $\|\sigma\| < \frac{1}{n^3}$.

c) Conclure.

Exercice 9. Soit $f : [0, +\infty[$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. On veut démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t)\,dt = \ell.$$

1) Énoncer la conclusion en termes de ε et $\eta(\varepsilon)$.

2) Traduire la limite de f à $+\infty$ en termes de ε et $\delta(\varepsilon)$. On supposera par la suite $\ell \geq 0$.

3) Majorer $|\int_0^x f(t)\,dt - \ell x|$ en majorant l'intégrale sur $[1, \delta(\varepsilon)]$ et sur $[\delta(\varepsilon), x]$ respectivement – il faut entrer ℓx sous l'intégrale d'abord.

4) Conclure en utilisant $\frac{1}{x}$.

Exercice 10. Déterminer le signe des intégrales suivantes sans les évaluer explicitement.

$$\text{(i)} \int_0^\pi x \cos x\,dx \qquad \text{(ii)} \int_0^\pi x^3 \cos x\,dx \qquad \text{(iii)} \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

(*Indication :* Pour (iii) on pourrait faire un changement de variables pour transformer l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ en $[0,\pi]$.)

Exercice 11. Lesquelles des intégrales suivantes et plus grande "

1) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sin^2 x\,dx$ ou $\displaystyle\int_0^1 x \sin^2 x\,dx$

2) $\displaystyle\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ ou $\displaystyle\int_1^2 e^x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ ou $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

[1] Une fonction f définie sur $[a,b]$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $a = a_0 < \cdots < a_n = b$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.