Une fonction réelle continue mais partout non dérivable

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(32^n \pi x)}{4^n}.$$

1) La série converge uniformément (le critère de Weierstrass).
2) f est continue.
3) f n'est dérivable en aucun point.

Pour le dérnier point, on montre d'abord que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $m \geq 1$, on a

$$\left| f\Big(\frac{k+1}{32^m}\Big) - f\Big(\frac{k}{32^m}\Big) \right| \geq \frac{1}{4^m}. \tag{$\sharp$}$$

Pour voir ceci, comme

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{k}{32^m}\Big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \cos\Big(32^n \pi \frac{k}{32^m}\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{4^n} \cos \frac{k\pi}{32^{m-n}} + \frac{\cos(k\pi)}{4^m} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{\cos(32^{n-m} k\pi)}{4^n} \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{4^n} \cos \frac{k\pi}{32^{m-n}} + \frac{(-1)^k}{4^m} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \left| f\Big(\frac{k+1}{32^m}\Big) - f\Big(\frac{k}{32^m}\Big) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{4^n} \cos \frac{(k+1)\pi}{32^{m-n}} + \frac{(-1)^{k+1}}{4^m} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{4^n} \cos \frac{k\pi}{32^{m-n}} - \frac{(-1)^k}{4^m} \right| \\ &= \left| (-1)^{k+1} \frac{2}{4^m} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{4^n} \Big(\cos \frac{(k+1)\pi}{32^{m-n}} - \cos \frac{k\pi}{32^{m-n}} \Big) \right| \\ &\geq \frac{2}{4^m} - \left| \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{4^n} \Big(\cos \frac{(k+1)\pi}{32^{m-n}} - \cos \frac{k\pi}{32^{m-n}} \Big) \right| \\ &\geq \frac{2}{4^m} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{4^n} \left| \cos \frac{(k+1)\pi}{32^{m-n}} - \cos \frac{k\pi}{32^{m-n}} \right| \\ &\geq \frac{2}{4^m} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{4^n} \left| \frac{(k+1)\pi}{32^{m-n}} - \frac{k\pi}{32^{m-n}} \right| = \frac{2}{4^m} - \frac{\pi}{32^m} \sum_{n=1}^{m-1} 8^n \\ &= \frac{2}{4^m} - \frac{\pi}{32^m} \frac{8^m - 8}{7} \geq \frac{2}{4^m} - \frac{\pi}{7} \frac{1}{4^m} \\ &\geq \frac{1}{4^m}. \end{aligned}$$

Maintenant, soit $a \in \mathbb{R}$. On veut démontrer que f n'est pas dérivable en a. Pour tout $m \geq 1$, si $k = \lfloor 32^m\, a \rfloor \in \mathbb{Z}$, alors

$$k \leq 32^m\, a < k+1$$

c'est-à-dire

$$\frac{k}{32^m} \leq a < \frac{k+1}{32^m}.$$

On suppose par l'absurde que f est dérivable en a. Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a).$$

Donc

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{k+1}{32^m}\Big) &= f(a) + A\Big(\frac{k+1}{32^m} - a\Big) + o\Big(\frac{1}{32^m}\Big) \\ f\Big(\frac{k}{32^m}\Big) &= f(a) + A\Big(\frac{k}{32^m} - a\Big) + o\Big(\frac{1}{32^m}\Big). \end{aligned}$$

En prenant la différence, on obtient

$$f\Big(\frac{k+1}{32^m}\Big) - f\Big(\frac{k}{32^m}\Big) = \frac{A}{32^m} + o\Big(\frac{1}{32^m}\Big).$$

En utilisant ($\sharp$), il s'ensuit que

$$\Big|\frac{A}{32^m} + o\Big(\frac{1}{32^m}\Big)\Big| = \Big|f\Big(\frac{k+1}{32^m}\Big) - f\Big(\frac{k}{32^m}\Big)\Big| \geq \frac{1}{4^m}$$

c'est-à-dire que

$$\Big|\frac{A}{8^m} + o\Big(\frac{1}{8^m}\Big)\Big| \geq 1$$

pour tout $m \geq 1$.