Solution de l'exercice 7, feuille no 2

Énoncé

On considère $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ pour $n \geq 0$ et $x \in]1, +\infty[$.

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$. On note f la somme de la série sur $]1, +\infty[$.

2) Montrer que pour tout $a > 1$, la fonction f est continue sur $[a, +\infty[$. La fonction f est-elle continue sur $]1, +\infty[$?

3) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

4) Montrer que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

5) Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.

Solution.

L'étude de la convergence simple et de la convergence normale des séries de fonctions n'est rien d'autre que l'étude de la convergence de certaines séries numériques.

1) Pour la convergence simple sur $]1, +\infty[$, on considère $x \in]1, +\infty[$. La série (numérique) est majorée par la série géométrique de raison $\frac{1}{x}$, donc convergente :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+x^n} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}.$$

Pour la suite f désignera la somme de la série sur $]1, +\infty[$.

2) Pour la convergence normale (qui implique la convergence uniforme), il faut étudier la norme sup de f_n sur $]1, +\infty[$, ou, éventuellement sur un sous-intervalle. Comme

$$f_n'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2},$$

il s'ensuit que la fonction f_n est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. Donc

$$\|f_n\|_{\infty,]1,+\infty[} = \frac{1}{2}$$

car $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{2}$. Comme la série numérique

$$\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,]1,+\infty[} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2}$$

est divergente, on en déduit que la série ne converge pas normalement sur $]1, +\infty[$. En retournant au comportement de la fonction f_n sur $]1, +\infty[$, on en déduit que, pour tout $a > 1$,

$$\|f_n\|_{\infty, [a,+\infty[} = \frac{1}{1+a^n}.$$

Et comme on a vu que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+a^n}$ converge, on en déduit la convergence normale de la série sur tout intervalle $[a,+\infty[$.

La convergence normale (qui implique la convergence uniforme) implique la continuité de la somme f sur tout intervalle $[a,+\infty[$, $a>1$. On en déduit la continuité de f sur

$$]1,+\infty[\,=\bigcup_{a>1}[a,+\infty[\,.$$

3) Pour voir que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ il faut étudier la convergence uniforme de la série des dérivées, f_n', c'est-à-dire

$$-\sum_{n\geq 1}\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}.$$

Il faut donc étudier le comportement de f_n'' sur $]1,+\infty[$, voire $[a,+\infty[$. On a

$$\begin{aligned}
f_n''(x) &= -n\,\frac{(n-1)x^{n-2}(1+x^n)-x^{n-1}\,2nx^{n-1}}{(1+x^n)^3}\\
&= -\frac{nx^{n-2}}{(1+x^n)^3}\,\left((n-1)+(n-1)x^n-2nx^n\right)\\
&= \frac{n(n+1)x^{n-2}\left(x^n-\frac{n-1}{n+1}\right)}{(1+x^n)^3},
\end{aligned}$$

donc $f_n''>0$ sur $]1,+\infty[$. Donc, pour tout $a>1$,

$$\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[}=\frac{na^{n-1}}{(1+a^n)^2}<\frac{n}{a}\frac{1}{1+a^n}<\frac{n}{a^{n+1}}.$$

Comme la série $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{a^{n+1}}$ converge (par le critère de d'Alembert, par exemple), on a que $\sum_{n\geq 1}f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. Alors

- la somme f de la série des primitives f_n (exactement ces primitives) est de classe $\mathcal{C}^1$
- $f'(x)=\sum\limits_{n\geq 1}f_n'$

4) Pour tout $x>1$, on a

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{1+x^n}\geq\sum_{n\geq 0}\frac{1}{x^n+x^n}=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{x^n}=\frac{x}{2(x-1)}.$$

Il s'ensuit, en passant à la limite en 1^+, que

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)\geq\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{2(x-1)}=+\infty.$$

5) Comme la convergence est uniforme dans le voisinage de $+\infty$, on a la commutativité de la somme et du passage à la limite, c'est-à-dire

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{1+x^n}=\sum_{n\geq 0}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^n}=\frac{1}{2}+0+\cdots=\frac{1}{2}.$$

Quelques commentaires sur l'étude d'une série de fonctions

Dès qu'une série de fonctions converge uniformément sur un intervalle de longueur finie, elle vérifie les propriétés suivantes :

- La somme est continue.
- L'intégrale et la somme commutent.
- Le passage à la série des primitives qui s'annulent en un point de l'intervalle et la somme commutent. De plus la série des primitives converge uniformément.
- Le passage à la limite vers un bord de l'intervalle et la somme commutent.

La première et la dernière propriété sont vraies indépendamment de la longueur de l'intervalle. Pour voir que le passage aux primitives ne commutent pas en général avec la somme il faut donner un contre-exemple.

Pour tout $n \geq 1$ soit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{2}{n^2} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right) \cos\left(\frac{x}{n^2}\right).$$

La série $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, mais la série des primitives $\sum\limits_{n \geq 1} F_n$ où

$$F_n(x) = \frac{2}{n^2} \int_0^x \sin\left(\frac{t}{n^2}\right) \cos\left(\frac{t}{n^2}\right) dt = \sin^2\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

Remarque. La série $\sum_{n \geq 1} \sin^2\left(\frac{x}{n^2}\right)$ converge normalement sur tout intervalle $[0, a]$ où $a > 0$.