Solution de l'exercice 13, feuille no 1

Énoncé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{1 + e^{nx}}$.

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qu'on déterminera.

2) Montrer que pour tout $a > 0$, les intégrales

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(x) dx \quad \text{et} \quad I(a) = \int_0^a f(x) dx$$

sont bien définies, puis comparer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(a)$ et $I(a)$.

3) Montrer que les intégrales généralisées

$$J_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

convergent, puis comparer $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$ et J .

Remarque.

Comme

$$J_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f_n(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} I_n(a),$$

la comparaison de $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$ et de J signifie qu'on veut voir si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow +\infty} I_n(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(a) = J. \quad (1)$$

On reviendra sur ce point dans la dernière section.

Solution

1) Pour $x > 0$ on a

$$\frac{x}{1 + e^{nx}} = \frac{1}{e^{-nx} + 1} \frac{x}{e^{nx}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

car le deuxième facteur tend vers zéro et le premier vers 1.

Pour $x = 0$, la suite $(f_n(0))_n$ est la suite nulle. Si $x < 0$, alors $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. On conclut que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Pour finir, on étudie la norme sup de la fonction $f_n - f$ sur $\mathbb{R}$. On a

$$d_n(x) = f_n(x) - f(x) = \begin{cases} -\frac{xe^{nx}}{1+e^{nx}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{1+e^{nx}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-x}{1+e^{-nx}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{1+e^{nx}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \frac{|x|}{1+e^{n|x|}},$$

par conséquent il suffit d'étudier la variation¹, ou de borner cette fonction sur $[0, +\infty[$ (car elle est paire). Comme pour tout $t \geq 0$, on a $e^t \geq 1+t$, on en déduit que sur $[0, +\infty[$,

$$d_n(x) = \frac{x}{1+e^{nx}} \leq \frac{x}{2+nx} < \frac{1}{n}.$$

Pour la dernière inégalité on a utilisé le fait que $2+nx > nx$ sur $[0, +\infty[$. Donc $\|f_n - f\|_{\mathbb{R}} \rightarrow 0$, c'est-à-dire la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f .

Remarque. On aurait pu utiliser une autre inégalité. Par exemple pour tout $x \geq 0$, on a

$$d_n(x) = |f_n(x)| \leq \frac{x}{e^{nx}} \leq \frac{1}{ne}$$

car $x \mapsto \frac{x}{e^{nx}}$ sur $[0, +\infty[$ atteint son maximum en $1/n$.

2) Les fonctions f_n et f sont continues, donc les intégrales sont bien définies sur $[0, a]$. De plus, comme la convergence est uniforme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a f_n(x) dx = \int_0^a \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^a f(x) dx = 0 = I(a).$$

3) On présente une première méthode basée sur un calcul direct. On veut évaluer (borner) J_n et montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0 = \int_0^{+\infty} 0 dx.$$

On a

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^{nx}} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{nx}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(n-1)x} dx \\ &= -\frac{1}{n-1} \left[e^{-(n-1)x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Commentaires

L'égalité (1) n'est pas toujours vérifiée! Par exemple, si on considère la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ sur $[0, +\infty[$ définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & 0 \leq x < n \\ 0 & n \leq x \end{cases}$$

pour tout $n \geq 1$, alors $(g_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$. On a

$$I_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} & 0 \leq x < n \\ 1 & n \leq x \end{cases}$$

¹Après avoir calculé sa dérivée dont les zéros sont difficiles à comprendre, on s'aperçoit qu'il faut passer par un majorant.

et

$$I_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 = \int_0^x 0 \, dt.$$

Mais

$$J_n = \int_0^{+\infty} g_n(x) \, dx = 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} 0 \, dx.$$