Suites et séries de fonctions – 2023-2024

Corrigé du premier CC

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{n(x^2+1)x}{(nx+1)e^x}.$$

1) Étudier la convergence simple de cette suite sur $[0,1]$.
2) Étudier la convergence uniforme de cette suite sur $[0,1]$.
3) Étudier la convergence uniforme de cette suite sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1[$.

Solution.

1) On a $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 =: f(0)$. Si $x \neq 0$, alors

$$f_n(x) = \frac{n(x^2+1)x}{(nx+1)e^x} = \frac{(x^2+1)x}{(x+\frac{1}{n})e^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{(x^2+1)x}{xe^x} = \frac{x^2+1}{e^x} =: f(x).$$

2) La fonction f définie ci-dessus n'est pas continue en 0 car

$$f(x) = \frac{x^2+1}{e^x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} = 1 \neq 0 = f(0).$$

Il s'ensuit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.

3) Si $a > 0$, alors pour tout $x \in [a,1]$ on a

$$f_n(x) - f(x) = \left|\frac{n(x^2+1)x}{(nx+1)e^x} - \frac{x^2+1}{e^x}\right| = \frac{x^2+1}{e^x}\left|\frac{nx}{nx+1} - 1\right| = \frac{x^2+1}{e^x}\,\frac{1}{nx+1} \leq \frac{a^2+1}{1}\,\frac{1}{na},$$

donc

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{\infty,[a,1]} \leq \frac{a^2+1}{na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

c'est-à-dire la convergence est uniforme sur $[a,1]$.

Exercice 2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in [0,\frac{1}{n}]$ et par $f_n(x) = 0$ sinon.

1) Étudier la convergence simple de cette suite sur $[0,1]$.
2) Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$.
3) Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$ en utilisant deux méthode distinctes.
4) Étudier la convergence uniforme de cette suite sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1[$.

Solution.

1) Soit $x \in]0,1]$. Pour tout $n > \frac{1}{x}$, on a $f_n(x) = 0$. Donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que la suite converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2) On a

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2x(1-nx)\,dx = n^2\left[\frac{x^2}{2} - n\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

3) Comme

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{1}{6} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$$

on en déduit que la suite ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Pour justifier cette affirmation différemment, on étudie la norme sur de f_n. Sur $[0,\frac{1}{n}]$, la fonction f_n est quadratique ayant le coefficient dominant négatif. Elle atteint son maximum global en $\frac{1}{2n}$. Donc

$$\|f_n(x)\|_{\infty,[0,1]} = f_n\Big(\frac{1}{2n}\Big) = n^2\,\frac{1}{2n}\left(1-n\,\frac{1}{2n}\right) = \frac{n^2}{4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

4) Si $a>0$, alors pour tout $n>\frac{1}{a}$, on a que f_n est la fonction nulle sur $[a,1]$. Donc la suite converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,1]$.

Exercice 3. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $f_n : [-1,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\sum_{k=0}^n x^k$.

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $]-1,1[$ vers un fonction f que l'on déterminera.

2) Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a,a]$ pour tout $a\in\,]0,1[$.

3) Montrer que $F_n(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt$ est bien définie pour tout $x\in\,]-1,1[$ et que la suite de fonction (F_n) converge simplement sur $]-1,1[$ vers une fonction $\mathcal{C}^1$ que l'on déterminera.

Solution.
Pour tout x réel, $x\neq 1$, on a

$$f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \tag{1}$$

1) Si $x\in\,]-1,1[$, alors

$$f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-x}$$

car $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) Si $x\in[-a,a]$, alors

$$|f_n(x)| = |1+x+\cdots+x^n| \leq 1+a+\cdots+a^n,$$

donc

$$\|f_n\|_{\infty,[-a,a]} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-a}.$$

3) La fonction f_n est continue sur $[-1,1[$ (voir (1)) donc intégrable sur $[0,x]$ pour tout $x\in[-1,1[$, donc F_n est bien définie sur $[-1,1[$.

Pour visualiser le théorème de “dérivation” dans ce cas :

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\,x^{k+1} \arrow[r, "\text{CU/tout compact}", "n\longrightarrow+\infty"'] & F(x) \arrow[d, "\frac{d}{dx}"] \\
\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \arrow[u, "\int_0^x"] \arrow[r, "\text{CU/tout compact}", "n\longrightarrow+\infty"'] & \dfrac{1}{1-x}
\end{tikzcd}$$

Comme la convergence de la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ est uniforme sur tout compact de $]-1,1[$, on obtient la convergence simple sur $]-1,1[$ vers F, avec

$$F(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x)$$

Exercice 4. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur $[0,1]$. On suppose que pour tout n fixé la fonction f_n est décroissante. On suppose aussi que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Solution.
Comme la fonction f_n est décroissante, on a

$$\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \max(|f_n(0)|, |f_n(1)|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{2}$$

car (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. On en conclut que la convergence est uniforme.

Remarque. On a besoin de prendre le maximum en (2) car la fonction f_n pourrait être négative. Dans ce cas, on aurait

$$\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = -f_n(1).$$

Barème indicatif : 5 — 6 — 7 — 2