Suites et séries de fonctions

Solutions — CC de la période 8 en 2023

Exercice 1.

1) On a, pour $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} = \frac{1}{e^{x \ln n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} =: f(x).$$

Donc la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ mais pas uniformément, car f n'est pas continue.

2) On a, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 =: f(x).$$

Pour décider si la convergence est uniforme, ou bien on fait l'étude de la variation de $f_n(x)$, ou bien, on raisonne directement par majoration (dans ce cas) : comme $f_n(0) = 0$ et comme pour tout $x > 0$,

$$f_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + n} \leq \frac{1}{n},$$

on en déduit que

$$\|f_n\|_{[0,+\infty[} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

donc $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle.

3) La suite $(\sin \frac{x}{n})_{n\geq 1}$ converge sur $\mathbb{R}$ simplement vers la fonction nulle mais pas uniformément car

$$1 \geq \left\| \sin \frac{x}{n} \right\|_{\mathbb{R}} = \sin \frac{\frac{n\pi}{2}}{n} = 1.$$

4) Sur $[0, +\infty[$ la suite converge simplement vers la fonction nulle mais pas uniformément car

$$f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = 1.$$

La convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$, où $a > 0$, car f_n devient la fonction nulle sur $[a, +\infty[$ pour tout $n \geq \frac{1}{a}$.

5) Comme dans 2) on a la convergence simple vers la fonction nulle. Par contre, l'étude de f_n sur $[0, 1]$ montre que cette fonction positive atteint son maximum absolu en $\frac{1}{n}$. Donc

$$\|f_n\| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$. (À vrai dire sur $\mathbb{R}$.)

Exercice 2. La convergence simple vers la fonction nulle est immédiate (voir l'exercice précédent).

Pour le 2) on a, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}\, dx = \frac{2^n}{2} \int_0^1 \frac{(x^2)'}{1 + n2^n x^2}\, dx = \frac{2^n}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1 + n2^n t} \\ &= \frac{1}{2n} \Big[\ln(1 + n2^n t) \Big] = \frac{\ln(1 + n2^n)}{2n} \geq \frac{\ln(2^n)}{2n} = \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

Donc la suite $(I_n)_n$ ne converge pas vers 0. Il s'ensuit que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.

Pour finir le 3), on peut justifier qu'il n'y a pas de convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers la fonction nulle en étudiant le graphe de f_n. Comme

$$f_n'(x) = 2^n \, \frac{1 + n2^n \, x^2 - 2n2^n \, x^2}{(1 + n2^n \, x^2)^2} = 2^n \, \frac{1 - n2^n \, x^2}{(1 + n2^n \, x^2)^2},$$

on voit que

$$\|f_n\| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n2^n}}\right) = \frac{2^n \, \frac{1}{\sqrt{n2^n}}}{1 + n2^n \, \frac{1}{n2^n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Exercice 3. On veut démontrer l'affirmation suivante : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si la suite converge simplement vers f sur I, alors f est croissante sur I.

Soient $a < b \in I$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante, on a

$$f_n(a) \leq f_n(b).$$

En passant à la limite, on obtient

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f_n(a) \leq \lim_{n\to+\infty} f_n(b) = f(b).$$