Université d'Angers
Département de Mathématiques

L2

Algèbre linéaire 1 – 2023-2024

Deuxième chance
12 mars, 2024— 9:00-11:30

Toute réponse non justifiée ne vaudra aucun point.
Téléphones, ordinateurs, calculatrices sont interdits.

On rappelle que si $f : U \to V$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies, et si $\mathcal{B}$ est une base de U et $\mathcal{C}$ est une base de V, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ dénote la matrice associée à f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Pour chacune des questions ci-dessous donner une justification, c'est-à-dire un argument accompagné d'un exemple ou un contre-exemple, si possible. Existe-t-il un endomorphisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tel que

1) $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$ et $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_3, e_4)$?
2) $\dim(\mathrm{im}(f)) = 1$ et $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$?
3) $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$ et $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$?
4) $\dim(\mathrm{im}(f)) = 3$ et $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$?

Exercice 2. Soit F_1 le sous-ensemble des $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ qui vérifient le système

$$\begin{cases} 3x - 2y + z - t = 0 \\ x + 2y + t = 0 \\ -x - z + 2t = 0 \end{cases}$$

et soit $F_2 = \mathrm{Vect}\left((-1, 1, 4, 2), (2, 3, -8, -2)\right)$.

1) Expliquer sans calcul pourquoi F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2) À-t-on $F_2 \subset F_1$?
3) Donner une base de F_1 et une base de F_2.
4) Donner des équations en nombre minimal définissant F_2 dans la base canonique.
5) À-t-on $F_1 \subset F_2$?

Exercice 3. Soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par $p(e_1) = e_1$, $p(e_2) = -e_1 - 3e_2 + 3e_3$ et $p(e_3) = -e_1 - 4e_2 + 4e_3$, où $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique.

1) Donner la matrice associée à p dans la base canonique, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(p)$.
2) Déterminer le noyau et l'image de p.
3) Calculer A^2. Que peut-on conclure en ce qui concerne la nature de p ?
4) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice associée à p devient diagonale. Donner cette matrice.

Exercice 4. Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3. On considère les bases $\mathcal{A} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$.

1) Donner les matrices A et B associées à la dérivée formelle $D : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ dans la base $\mathcal{A}$ et respectivement la base $\mathcal{B}$.
2) Montrer que A et B sont semblables et trouver une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.
3) Montrer que A est équivalente à une matrice diagonale composée de 1 et 0 que l'on déterminera. On donnera aussi les matrices de changement de bases intervenant dans la relation d'équivalence.

Barème indicatif : 4 — 5 — 5 — 6