Université d'Angers **Année 2021/2022**

L2, Semestre 3

Algèbre linéaire 1

Rattrapage - Durée 2h30

Toute réponse non justifiée ne vaudra aucun point.
Téléphones, ordinateurs, calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Donner un exemple d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[X]$ surjective mais pas injective.

Exercice 2. Soient $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(u_3)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par $u_1 = (-1, 1, 0)$, $u_2 = (-2, 0, 1)$ et $u_3 = (-1, 1, 1)$.

1) Donner des équations en nombre minimal définissant respectivement F et G dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Soient p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

3) Déterminer les matrices de p et s dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

4) Déterminer les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ où $\mathcal{C}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

5) Calculer $p(x, y, z)$ et $s(x, y, z)$.

6) Simplifier

$$p \circ p \circ p \circ s \circ p \circ s \circ s \circ p$$

et déterminer sa matrice dans $\mathcal{C}$.

Exercice 3. On considère l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ P(X) \mapsto P(X + 1) - P(X)$$

1) Montrer que φ est linéaire.

2) Montrer que φ est bijective.

3) Déterminer la matrice de φ^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ puis $\varphi^{-1}(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3)$.

Exercice 4. On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x + y - z, 3x + y - z, x - 2y + 2z)$$

Selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, déterminer les vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$f(x, y, z) = (1, 1, m)$$

Exercice 5. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que

- $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$, $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$ et
- $\ker f = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3y - t = 0 \end{cases} \right\}$

On déterminera une base de $\ker f$, la matrice f dans la base canonique et des équations définissant $\text{Im} f$ dans la base canonique.

Barème indicatif : 1 — 7 — 4 — 3 — 5