Algèbre linéaire 1 (deuxième partie) — 2024-2025

Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C_a = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Pour chacune de ces matrices calculer la matrice inverse lorsque celle-ci existe.

2) Résoudre le système $C_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Calculer l'inverse de la matrice BC_a lorsque celle-ci existe.

Exercice 2. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

1) Peut-on former les produits ABC, CBA, BAC ? Si oui les calculer de deux manières pour vérifier sur ce cas particulier l'associativité du produit de matrices.

2) Pour chacune de ces matrices, décrire l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (avec n et p convenables) associée dans les bases canoniques en précisant leurs noyaux.

Exercice 3. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $v = (1, 3)$.

1) Déterminer toutes les bases $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ dans lesquelles les coordonnées de v deviennent $C_{\mathcal{C}}(v) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

2) Quelles sont les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $\mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ et $\mathrm{Pass}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$?

Exercice 4. On considère le système linéaire

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + \ \ z + 3t = a \\ \ \ x + 3y - 2z - \ \ t = b \\ -x + \ \ y - 2z - 3t = c \end{cases}$$

où a, b et c sont des paramètres réels.

1) Écrire le système sous la forme matricielle $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

2) Déterminer $S_{a,b,c} \subset \mathbb{R}^4$, l'ensemble des solutions du système (qui dépend des trois paramètres). Écrire $S_{a,b,c}$ sous la forme (sol.particuliere) $+ S_{0,0,0}$.

3) Décrire le sous-espace $W \subset \mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice du système comme ensemble de solutions d'un système linéaire homogène.

4) On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Identifier les sous-ensembles $S_{a,b,c}$ et W en utilisant des objets associés à la fonction f.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par $f(x, y, z) = (y - z, z + x - 2y, -y + x, x - z)$.

1) Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques ? Justifier en même temps que f est une application linéaire.

2) Pour les sous-espaces $\ker(f) \subset \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{R}^4$ (dans l'ordre souhaité)

a) déterminer une base

b) donner des équations en nombre minimal (en utilisant les coordonnées associées aux bases canoniques respectives).

3) Quel est le rang de f ? L'application f est-elle surjective ? injective ?

Exercice 6. Reprendre l'exercice précédent pour $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + t, x + 3y + 4z, 2x + 5y + 7z + t)$. Puis, en complétant les bases du noyau et de l'image à des bases de $\mathbb{R}^4$ et respectivement $\mathbb{R}^3$, donner la matrice de f dans ces nouvelles bases.

Exercice 7. Les applications suivantes sont-elles linéaires? Justifier votre réponse. Lorsqu'elles le sont, déterminer leur noyau et image.

(i) $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$

(ii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (2x+3y, x)$

(iii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (y, x+y-\sqrt{x^2})$

(iv) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x-y, xy)$

(v) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x-2z, y+z)$

(vi) $\mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}_2[X],\ P \mapsto XP' + 3P$

(vii) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x-y, y+x, \sin(z))$

(viii) $\mathbb{K}_3[X] \to \mathbb{K}_3[X],\ P \mapsto P'P'' - P$

Exercice 8. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour chacun des trois cas ci-dessous, existe-t-il un endomorphisme $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ qui vérifie les conditions imposées ?

1) $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = e_2 - e_3$.
2) $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$, $g(e_3 - e_1) = e_2$.
3) $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_3) = e_2 - e_3$.

Dans chacun des cas, si l'application g existe, est-elle unique ? Si "oui", calculer $g(x_1, x_2, x_3)$. Si "non", donner plusieurs exemples. Quelle est la matrice associée dans la base canonique (pour chacun des exemples) ?

Exercice 9 (*)**.** Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^n$). Établir l'équivalence suivante : f est une homothétie (c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$) si et seulement si pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, $f(v)$ est colinéaire à v.

Exercice 10. Soient $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathbb{R}^5$, $(e_1, \dots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $(e'_1, \dots, e'_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Construire, si cela est possible, des applications linéaires $\varphi : E \to F$ telles que :

(i) $\mathrm{im}(\varphi) = \{0\}$

(ii) $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(e'_2)$

(iii) $\mathrm{im}(\varphi) = F$

(iv) $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$

(v) $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(e'_2, e'_3)$

(vi) $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$ et $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(e'_2, e'_3)$.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $D = \mathrm{Vect}((1,2,3))$ et soit H le plan d'équation $3x + y - 2z = 0$.

1) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.

2) Déterminer les expressions analytiques de p la projection sur H de direction D, et de s la symétrie par rapport à H de direction D. On rappelle que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$

$$p(u) = p(u_D + u_H) = u_H \quad \text{et} \quad s(u) = (u_D + u_H) = -u_D + u_H$$

Exercice 12. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

1) Donner une base de F.

2) Trouver deux applications linéaires distinctes de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$ ayant F comme noyau. Quelles sont leurs matrices associées ?

3) Existe-t-il une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$ ayant F comme noyau ?

Exercice 13. Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_4[X]$ définie par

$$\varphi(1) = 3 + X \qquad \varphi(X) = 2X + X^3 - X^4$$
$$\varphi(X^2) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \qquad \varphi(X^3) = 3X^2 + 2X^3 + 4X^4.$$

1) Calculer $\varphi(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)$. Écrire la matrice A de φ dans les bases canoniques.

2) Pour les sous-espaces $\ker(\varphi) \subset \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathrm{im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_4[X]$ (dans l'ordre souhaité) (a) déterminer une base, (b) donner des équations en nombre minimal.

3) Reprendre l'exercice en considérant l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$ définie par

$$f(e_1) = (3,1,0,0,0) \qquad f(e_2) = (0,2,0,1,0)$$
$$f(e_3) = (1,1,1,1,1) \qquad f(e_4) = (0,0,3,1,2),$$

où $(e_1, \dots, e_4)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.