Algèbre linéaire 1 — 2024-2025

FEUILLE D'EXERCICES N° 1

Introduction

Exercice 1. Les sous-ensembles formés des couples (x, y) de nombres réels vérifiant les conditions suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

(i) $3x - 2y = 0$	(ii) $xy = 0$	(iii) $x^2 + y^2 = 1$
(iv) $x^2 + y^2 = 0$	(v) $y = 2x^2$	(vi) $x + \|y\| = 0$
(vii) $x^2 + 4y^2 = 4xy$	(viii) $x \geq 0$	(ix) $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tel que $x^5 + y^5 = c^5$

Exercice 2. Soit m un paramètre réel. Montrer que les triplets réels de la forme (x, y, m) forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $m = 0$.

Exercice 3. Soient a, b, c, d quatre réels. Quelle condition doivent satisfaire ces réels pour que les $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Donner une interprétation géomètrique du sous-espace vectoriel obtenu.

Exercice 4. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}$. Quels sont les sous-espaces vectoriels de E? Même question pour $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir si les sous-ensembles de $\mathbb{R}_n[X]$ suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$. Si c'est le cas, en donner une base.

(i) $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$, (ii) $B = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P' = 0\}$

Exercice 6. Les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$ telles que $a + d = 0$ forment-elles un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$? Si oui, en donner une base.

Exercice 7. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}_3[X]$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$? Si oui, en donner une base. Décrire tous les éléments de E et F à supposer qu'ils soient des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.

(i) $A = \{P \mid P(3) = 2P(1)\}$	(ii) $B = \{P \mid P(2) = 2\}$
(iii) $C = \{P \mid P'$ est une fonction paire$\}$	(iv) $D = \{P \mid P(5) = 0\}$
(v) $E = \{P \mid P(-2) = P(2) = 0\}$	(vi) $F = \{P \mid tP'(t) = P(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 8. Dans chacun des cas ci-dessous, décider si $V \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel.

(i) $V = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$	(ii) $V = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
(iii) $V = \{(3x - y, 2x + 5y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$	(iv) $V = \{(x^2 - x, -x^2 + x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
(v) $V = \{(x^3 - x, x^3 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	(vi) $V = \{(x - \|x\|, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Justifier que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2) Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Le sous-ensemble des fonctions croissantes, ou bornées, ou positives, ou continues, ou injectives, ou n fois dérivables, ou qui s'annulent en tout $n \in \mathbb{N}$. Même question pour

$$\{f \mid \text{ il existe } a, b \in \mathbb{R} \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)\}.$$

Familles libres et familles génératrices. Bases

Exercice 11. Pour chacune des familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, dire si elle est libre, génératrice de $\mathbb{R}^3$, une base de $\mathbb{R}^3$, et donner une base de l'espace vectoriel engendré.

1) $\{v_1, v_2, v_3\}$ avec $v_1 = (-1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$.

2) $\{v_1, v_2, v_3\}$ avec $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (3, 2, 1)$.

3) $\{v_1, v_2\}$ avec $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (3, 0, 3)$.

4) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ avec $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 3, 1)$, $v_3 = (3, 2, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1)$.

Exercice 12. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ on considère les vecteurs u, v, w et w' tels que $2u + v = w$ et $5u + 3v = w'$. Déterminer u et v en fonction de w et w'.

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^6$, soient $v_1 = (1, 1, 0, 2, 3, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 2, 3, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 0, 2, 3, 1)$. Vérifier que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre, puis compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^6$ à l'aide des vecteurs de la base canonique.

Exercice 14.

1) Donner des familles génératrices pour les espaces vectoriels $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$.

2) La famille $\{1, X + X^2, 2 + X + X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-elle libre? génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?

3) La famille $\{1, 1 + X, 1 + X + X^2, X^2 + X^3 + X^4\}$ est-elle libre? génératrice de $\mathbb{R}_4[X]$? Si *oui + non* aux questions précédentes, compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 15. Pour quels $m \in \mathbb{R}$, les familles $\{(1, 3), (1 - m, 9)\}$, $\{(1 + m, 1 - m), (1 - m, 1 + m)\}$ et $\{(1, 0, -2), (1, 3, -1), (3, 3, m^2 + 6m)\}$ sont-elles des bases de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 16. Soient $u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, -2, 3, -4)$.

1) Existe-t-il $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x, 1, y, 1) \in \mathrm{Vect}(u, v)$?

2) Existe-t-il $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x, 1, 1, y) \in \mathrm{Vect}(u, v)$?

Exercice 17. On se place dans l'espace vectoriel des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que les fonctions 1, $\sin x$, $\cos(2x)$ et $\sin(3x)$ sont linéairement indépendantes.

2) Les fonctions 1, $\sin(2x)$ et $(\sin x)^2$ sont-elles linéairement indépendantes ? Même question pour les fonctions 1, $\cos(2x)$ et $(\sin x)^2$.

3) Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a(x) = e^{ax}$. Montrer que f_a et f_b sont linéairement indépendantes si et seulement si a et b sont distincts.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier non nul et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les polynômes $(X - a)^k$, $0 \leq k \leq n$, forment une base de E.

2) Soit $F = \{p \in E \mid P'(a) = P"(a) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Donner une base de F.

3) Soient $a \neq b \in \mathbb{R}$. Montrer que les polynômes $(X - a)^k (X - b)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$, forment une base de E.

4) Pour chaque entier $j = 0, \ldots, n$, soit $p_j \in E$ un polynôme de degré j. On rappelle que le polynôme nul a pour degré -1 ou $-\infty$, par convention. Montrer que $p_0, \ldots, p_n$ forment une base de E.

Exercice 19. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$.

1) Vérifier que u et v ne sont pas colinéaires, en déduire la dimension de H.

2) Montrer que H est aussi engendré par $u' = (1, 1, 1)$ et $v' = (0, 1, 2)$.

3) Montrer que (u, v) et (u', v') sont deux bases de H.

4) Soit $w \in H$ de coordonnées (x, y) dans la base (u, v) et (x', y') dans (u', v'). Calculer (x, y) en fonction de (x', y'), puis (x', y') en fonction de (x, y).