Université d'Angers
Département de Mathématiques

Algèbre linéaire

Un exercice qui utilise la méthode du pivot de Gauss

L'exercice suivant est semblable aux exercices 11 et 13 de la première feuille, et 12 de la deuxième feuille. Il fait apparaître les deux manières principales de décrire un sous-espace vectoriel : comme Vect ou comme solution d'un système linéaire homogène.

On considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 2, 1, 3)$, $v_3 = (-1, 0, 1, 1)$ et $v_4 = (0, 1, -1, -2)$ de $\mathbb{R}^4$, et on pose

$$S = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_4).$$

1) Extraire de la famille $\{v_1, \dots, v_4\}$ une base pour le sous-espace vectoriel S ; compléter cette base à une base de $\mathbb{R}^4$.

2) Décrire $S \subset \mathbb{R}^4$ comme solution d'un système linéaire homogène.

Solution.
Pour étudier les relations de dépendance linéaires entre les vecteurs de la famille $\{v_1, \dots, v_4\}$ on consière la combinaison linéaire nule

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 + t_4 v_4 = 0.$$

En utlisant la forme des vecteurs v_j, on obtient le système linéaire homogène

$$\begin{cases} t_1 + t_2 - t_3 \phantom{{}-2t_4} = 0 \\ t_1 + 2t_2 \phantom{{}+t_3} + t_4 = 0 \\ t_2 + t_3 - t_4 = 0 \\ t_1 + 3t_2 + t_3 - 2t_4 = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

ou encore, en écriture matricielle,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Les vecteurs v_j, $1 \leq j \leq 4$, sont les colonnes de la **matrice associée** au système $(*)$.

On applique la méthode du pivot de Gauss (en travaillant avec les équations, c'est-à-dire avec les lignes de la matrice associée).

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_4 \end{pmatrix} = 0.$$

On est arrivé à une matrice échelonnée ; l'algorithme est fini. La forme de la matrice échelonnée nous permet d'en déduire les faits suivants.

30 septembre 2022

- Le sous-espace des solutions du système $(*)$ est obtenu en prenant t_3 comme paramètre. C'est l'inconnue qui ne correspond pas à un pivot ! On a

$$\begin{cases} t_1 \quad - 2t_3 \quad = 0 \\ \quad t_2 + \ t_3 \quad = 0 \\ \qquad\qquad t_4 = 0 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} t_1 = 2t_3 \\ t_2 = -t_3 \\ t_4 = 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit que l'espace des solutions $(*)$ est

$$\{(2t_3, -t_3, t_3, 0) \mid t_3 \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((2, -1, 1, 0)).$$

On a obtenu un sous-espace vectoriel dans $\mathbb{R}^4$ car on avait commnecé avec quatre vecteurs. En général si on commence avec n vecteurs, on obtient un sous-espace vectoriel (celui des relations de dépendance linéaire) dans $\mathbb{R}^n$. Donc, ce $\mathbb{R}^4$ n'a pas de liaison avec le $\mathbb{R}^4$ des vecteurs initiaux !

- Pour les vecteurs v_j, $1 \leq j \leq 4$, l'argument précédent offre plusieurs informations :
  (1) La combinaison linéaire $2v_1 - v_2 + v_3$ est nulle. En particulier, les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont liés.
  (2) Les vecteurs v_1, v_2 et v_4 forment une base du sous-espace $S = \text{Vect}(v_1, \dots, v_4) \subset \mathbb{R}^4$. Ce sont les colonnes (ou vecteurs) qui correspondent aux inconnues pivot dans l'algorithme précédent.
  (3) Les vecteurs v_1, v_2, v_4 et $(0, 0, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^4$. On a rajouté le vecteur de la base canonique qui complète le pivot manquant en considèrant les lignes.

Pour répondre à la deuxième question, il faut revenir à l'algorithme de Gauss et l'enrichir légérement. Un vecteur général de l'espace $\mathbb{R}^4$ dans lequel vivent les vecteurs v_j, $1 \leq j \leq 4$, est de la forme

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4.$$

On appelle les réels x_j les coordonnées de v dans la base canonique $(e_1, \dots, e_4)$. En insérant la colonne des coordonnées de v dans l'algorithme du pivot de Gauss, on obtient

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & x_3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & x_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -x_1 + x_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & x_1 - (-x_1 + x_2) \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & x_3 - (-x_1 + x_2) \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -x_1 + x_4 - 2(-x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & x_1 - 2x_2 + x_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 & 0 & * \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 + x_4 + 4(-\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2}) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur v appartient à S si, et seulement si, la matrice finale est échemonnée avec trois pivots. Donc S est décrit par l'équation linéaire

$$S : 0 = x_1 - 2x_2 + x_4 + 4\Big(-\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2}\Big) = -x_1 - 2x_3 + x_4.$$