Exercice 8 de la feuille no 3

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $D = \mathrm{Vect}((1,2,3))$ et soit H le plan d'équation $3x + y - 2z = 0$.

1) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.

2) Déterminer les expressions analytiques de p la projection sur H de direction D, et de s la symétrie par rapport à H de direction D. On rappelle que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$

$$p(u) = p(u_D + u_H) = u_H \quad \text{et} \quad s(u) = (u_D + u_H) = -u_D + u_H$$

Solution.
On a $D = \mathrm{Vect}((1,2,3))$ par définition et $H = \mathrm{Vect}(1,-3,0),(0,2,1))$ en résolvant l'équation de H en fonction de x et z.

1) On $D + H$ est une somme direct si et seulement si $D \subset H = \{0\}$. Mais le générateur $(1,2,3)$ de D ne vérifie pas l'équation de H, car

$$3 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot 3 = -1 \neq 0.$$

Donc $D + H = D \oplus H$.

2) "L'expression analytique" signifie ici la matrice de $p = \pi_{H,D}$ dans la base canonique (l'expression de p dans les coordonnées de la base canonique). Je présente deux méthodes. La première n'utilise pas le changement de bases. La deuxième s'appuie sur la dernière partie du cours, notamment sur la formule qui relie par la matrice de passage les matrices associées à un endomorphisme dans deux bases différente.

Première méthode. Soit $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Pour calculer son image par $\pi_{H,D}$ on a besoin de sa décomposition par rapport à la somme directe $D \oplus H$, ou, ce qui est équivalent, ses coordonnées dans la base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $D \oplus H$,

$$\mathcal{B} = ((1,2,3),(1,-3,0),(0,2,1)).$$

On cherche donc $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$(a,b,c) = t_1(1,2,3) + t_2(1,-3,0) + t_3(0,2,1)$$

c'est-à-dire la solution du système linéaire

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = a \\ 2t_1 - 3t_2 + 2t_3 = b \\ 3t_1 + t_3 = c. \end{cases}$$

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & -3 & 2 & b \\ 3 & 0 & \boxed{1} & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 0 & a \\ -4 & -3 & 0 & b-2c \\ 3 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & 3a+b-2c \\ 3 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4a+b-2c \\ 1 & 0 & 0 & -3a-b+2c \\ 0 & 0 & 1 & 9a+3b-5c \end{pmatrix},$$

20 novembre 2023

donc

$$\begin{cases} t_1 &= -3a - b + 2c \\ t_2 &= 4a + b - 2c \\ t_3 &= 9a + 3b - 5c. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= (-3a - b + 2c) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (4a + b - 2c) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + (9a + 3b - 5c) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\xmapsto{p} (4a + b - 2c) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + (9a + 3b - 5c) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a + b - 2c \\ 6a + 3b - 4c \\ 9a + 3b - 5c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \\ 9 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode. La matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(p) = \operatorname{Pass}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p) \operatorname{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

avec $\mathcal{C}$ la base canonique, on obtient

$$\begin{aligned}
\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(p) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & -5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \\ 9 & 3 & -5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La matrice de s est obtenue à partir de celle de p car $s = 2p - id_{\mathbb{R}^3}$, donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(s) = 2 \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(p) - I_3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 12 & 5 & -8 \\ 18 & 6 & -11 \end{pmatrix}.$$