Université d'Angers
Département de Mathématiques

Algèbre linéaire 1

Contrôle coninue no 2
17 janvier, 2025 — 9:00-11:30

Toute réponse non justifiée ne vaudra aucun point.
Téléphones, ordinateurs, calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Soit $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$M_a = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f_a) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ a & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

où a est un paramètre réel.

1) Étudier le noyau de f_a en fonction de a.

2) Présenter, en fonction de a, l'image de f_a comme Vect, puis comme solution d'un système linéaire.

Solution.
Les sous-espaces (et leurs équations) associés à une application linéaire sont obtenus en utilisant l'algorithme de Gauss. Je vais l'appliquer en travaillant avec les lignes.

1) On a, où (y_1, y_2, y_3) sont les coordonnées associées à la base canonique du $\mathbb{R}^3$ d'arrivée,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & y_1 \\ -1 & -1 & -1 & y_2 \\ a & 2 & 2 & y_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & y_1 \\ 1 & -2 & 0 & y_2 + y_1 \\ a-4 & 4 & 0 & y_3 - 2y_1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 & y_1 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ 1 & -2 & 0 & y_1 + y_2 \\ a-2 & 0 & 0 & -2y_1 + y_3 + 2(y_1 + y_2) \end{pmatrix}.$$

La dernière matrice, dans laquelle on a fait apparaître les deux pivots, devient

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 & \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ 1 & -2 & 0 & y_1 + y_2 \\ a-2 & 0 & 0 & 2y_2 + y_3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le rang de la matrice M_a vaut 3 si $a \neq 2$ et 2 si $a = 2$. Donc, le noyau de f_a est nul si $a \neq 2$. Si $a = 2$, alors $\ker(f_a)$ est donné par la solution du système

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

En résolvant avec x_1 comme paramètre, on obtient

$$\ker(f_a) = \left\{ \left(x_1, \frac{1}{2}x_1, -\frac{3}{2}x_1 \right) \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}((2, 1, -3)).$$

2) L'étude de l'image se fait en fonction de la valeur 2 rencontrée ci-dessus. Si $a \neq 2$, alors le rang de f_a est 3, c'est-à-dire l'image est $\mathbb{R}^3$. Le système qui la caractérise est le système nul, $0 = 0$ (tout vecteur satisfait ce système).

Si $a = 2$ alors, en utilisant les pivots du point précédent,

$$\mathrm{im}(f_2) = \mathrm{Vect}((-1, -1, 2), (1, -1, 2)) : 2y_2 + y_3 = 0.$$

Exercice 2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme définie par

$$\varphi(e_1) = e_1 - 2e_2, \quad \varphi(e_2) = 2e_1 - 4e_3, \quad \varphi(e_3) = -e_2 + e_3,$$

où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Donner la matrice associée à φ dans la base canonique, c'est-à-dire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$.

2) On note $v_1 = (2, -1, -4)$, $v_2 = (2, 0, -4)$ et $v_3 = (0, 1, -1)$.
   a) Montrer que $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Calculer $\varphi(v_j)$, $1 \leq j \leq 3$ et exprimer ces vecteurs dans la base $\mathcal{C}$.
   c) Donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\varphi)$, la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$.

3) En utilisant le point précédent éventuellement, déterminer le noyau de φ.

4) L'application φ est-elle une projection ?

5) Quelle formule relie les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\varphi)$? Écrire explicitement les matrices apparaissant dans cette formule.

Solution.

1) On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) On applique le pivot de Gauss sur la matrice des coordonnées des vecteurs v_j dans la base canonnique. On obtient

$$P = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{rank}(P) = 3$, le nombre de pivots. On en déduit que $\mathcal{C}$ est une base.

Comme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)\, C_{\mathcal{B}}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_{\mathcal{B}}(\varphi(v_1)),$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)\, C_{\mathcal{B}}(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = C_{\mathcal{B}}(\varphi(v_2))$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)\, C_{\mathcal{B}}(v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = C_{\mathcal{B}}(\varphi(v_3)),$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= 0 \\ \varphi(v_2) &= v_2 \\ \varphi(v_3) &= v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Comme le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\varphi)$ est 2, on a $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(v_1)$.

4) Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\varphi)^2 \neq \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\varphi)$, φ n'est pas une projection.

5) La formule de changement de base est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\varphi) = \mathrm{Pass}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)\, \mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) P.$$

L'inverse de P est calculée par l'algorithme de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ \frac{5}{2} & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc la formule explicite est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ \frac{5}{2} & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère l'application linéaire $h : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$h(P) = (X-1)P' - X^2 P''.$$

1) Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{X},\mathcal{X}}(h)$ de h, où $\mathcal{X} = (1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Donner des bases pour le noyau et l'image de h.

3) Trouver des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ telles que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(h)$, la matrice associée à h dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, soit nulle à l'exception des premiers $\mathrm{rg}(h)$ coefficients de la diagonale égaux à 1.

4) Écrire explicitement la formule qui relie A et B.

Solution.

1) On a

$$\begin{aligned} h(1) &= 0 \\ h(X) &= -1 + X \\ h(X^2) &= -2X, \end{aligned}$$

donc

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{X},\mathcal{X}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) $\ker(h) = \mathrm{Vect}(1)$ et $\mathrm{im}(h) = \mathrm{Vect}(1, X)$.

3) On considère $\mathcal{C} = (-1 + X, -2X, X^2)$ (les deux premiers vecteurs correspondent aux deux dernière colonnes de A et sont une base de l'image) et $\mathcal{B} = (X, X^2, 1)$. Alors

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) On a
$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(h) = \mathrm{Pass}_{\mathcal{C},\mathcal{X}}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{X},\mathcal{X}}(h)\ \mathrm{Pass}_{\mathcal{X},\mathcal{B}} = \mathrm{Pass}_{\mathcal{C},\mathcal{X}}\ A\ \mathrm{Pass}_{\mathcal{X},\mathcal{B}}\,.$$

Exercice 4 (Questions de cours)**.** On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et x_1, x_2 et x_3 les coordonnées associées. Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ de direction $\mathrm{Vect}(e_1)$. Donner la matrice de p dans la base canonique.

2) Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ de direction $\mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2)$. Donner la matrice de q dans la base canonique.

3) Existe-il une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui vérifie
$$\varphi(e_1 + e_2) = e_1 + e_2, \quad \varphi(e_1 - e_2 + e_3) = e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad \varphi(e_1 + 3e_2 - e_3) = 2e_1 + e_2 - e_3\,?$$
Si oui, donner un exemple en explicitant $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. Si non, justifier pourquoi.

4) Existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, e_3)$ et $e_2' \in \mathrm{im}(f)$, où (e_1', e_2') est la base canonique de $\mathbb{R}^2$? Si oui, donner un exemple en explicitant $f(x_1, x_2, x_3)$. Si non, justifier pourquoi.

5) Existe-t-il un endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que $\dim(\mathrm{im}(g)) = 2$ et $\dim(\ker(g) \cap \mathrm{im}(g)) = 1$? Si oui, donner un exemple en explicitant $g(x_1, x_2, x_3)$. Si non, justifier pourquoi.

Solution.

1) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

2) Comme $q(e_1) = q(e_1 + 2e_2 - 2e_2) = q(e_1 + 2e_2) - 2q(e_2) = -2e_2$,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Oui, car la même relation de dépendance linéaire est satisfaites par les trois vecteurs et leurs images. Explicitement,
$$(e_1 - e_2 + e_3) + (e_1 + 3e_2 - e_3) = 2(e_1 + e_2)$$
et
$$(e_2 + e_3) + (2e_1 + e_2 - e_3) = 2(e_1 + e_2).$$
Comme exemple on peut prendre l'application dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5) D'après les hypothèse et la formule du rang, on a $\dim(\ker(g)) = 1$ et $\ker(g) \subset \mathrm{im}(g)$. Comme exemple, on peut prendre l'endomorphisme dont la matrice associée dans la base canonique est
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Barème indicatif : 3 — 7 — 4 — 6