Algèbre linéaire 1 – 2023-2024

Contrôle continu no 2
4 décembre, 2023— 14:00-16:30

Toute réponse non justifiée ne vaudra aucun point.
Téléphones, ordinateurs, calculatrices sont interdits.

On rappelle que si $f : U \to V$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies, et si $\mathcal{B}$ est une base de U et $\mathcal{C}$ est une base de V, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ dénote la matrice associée à f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Pour chacune des questions ci-dessous donner une justification, c'est-à-dire un argument accompagné d'un exemple ou un contre-exemple, si possible.

1) L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $g(P) = (X-2)P'' - XP'$ est-elle un endomorphisme ?

2) L'application $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $g(P) = P'' - (P')^2$ est-elle un endomorphisme ?

3) Existe-t-il un endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2) \quad \text{et} \quad \mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)\,?$$

4) Existe-t-il un endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$ et $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$?

5) Existe-t-il un endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que $\dim(\mathrm{im}(f)) = 1$ et $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$?

6) Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $x \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $b \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. On note M la matrice de taille $m \times (n+1)$ ayant comme n premières colonnes celles de A et comme dernière colonne b. Si $\mathrm{rang}(A) = r$ et $\mathrm{rang}(M) = r+1$, où $r < \min\{m, n\}$, combien de solutions admet le système linéaire $Ax = b$?

Solution.

1) Oui, car si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$, alors

$$f(P) = (X-2)\,2a_2 - X(a_1 + 2a_2X) = -4a_2 + (-a_1 + 2a_2)X - 2a_2X^2$$

c'est-à-dire

$$C_{\mathcal{X}}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =: A\,C_{\mathcal{X}}(P)$$

où $\mathcal{X} = (1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc f est linéaire avec A la matrice associée dans la base canonique.

2) g n'est pas linéaire car

$$g(2X) = -4 \neq -2 = 2\,g(X).$$

3) Oui, car

$$3 = 1 + 2 = \dim(\ker(f) + \dim(\mathrm{im}(f)).$$

Par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

définit une telle application linéaire dans la base canonique.

4) Non, car si $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$, alors

$$\dim(\ker(f)) \geq \dim(\mathrm{im}(f)) = 2.$$

Donc, d'après le théorème du rang,

$$3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) \geq 4$$

qui est impossible.

5) Oui, car le théorème du rang n'est pas violé par l'hypothèse. Comme ci-dessus, on arrive à

$$3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) \geq 2.$$

Par exemple, on peut prendre l'application linéaire définie par

$$e_1, e_2 \mapsto 0 \qquad \text{et} \qquad e_3 \mapsto e_1.$$

6) Aucune, car un système linéaire est résoluble si et seulement si $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(M)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, 3x_2 - 2x_3 - 3x_4)$$

dans les coordonnées associées aux bases canoniques $\mathcal{C}_4$ et respectivement $\mathcal{C}_3$.

1) Donner la matrice associée à f dans les bases canoniques, c'est-à-dire $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_4}(f)$.

2) Déterminer le noyau et l'image de f en produisant une base pour chacun des sous-espaces.

3) Déterminer aussi un système d'équations linéaires dont l'espace des solutions est l'image de f.

4) Choisir de nouvelles bases $\mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement, telles que f applique les premiers vecteurs de $\mathcal{B}_4$ sur les premiers vecteurs de $\mathcal{B}_3$ et applique les autres sur le vecteur nul.

5) Donner la matrice associée à f dans les bases $\mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_3$, c'est-à-dire $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4}(f)$. Donner les matrices de passage de $\mathcal{C}_4$ à $\mathcal{B}_4$ et de $\mathcal{C}_3$ à $\mathcal{B}_3$ respectivement.

6) Les matrices T et S sont-elles équivalentes ? Les matrices T et S sont-elles semblables ? Justifier votre réponse.

Solution.

1) $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_4}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$

2) On applique l'algorithme de Gauss en pensant aussi aux équations de l'image de f.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & y_1 \\ \boxed{1} & 1 & -1 & -1 & y_2 \\ 0 & 3 & -2 & -3 & y_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 3 & y_1 - 2y_2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & y_2 \\ 0 & 3 & \boxed{-2} & -3 & y_3 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 - 2y_2 + y_3 \\ 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & y_2 + y_3/2 \\ 0 & -3/2 & 1 & 3/2 & y_3/2 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}((2,1,0),(0,1,2)) : y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$$

et que

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,2,3,0),(-1,0,-3,2)).$$

3) On a vu que $\mathrm{im}(f)$ est définie par $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$.

4) Comme $f(e_1) = (2, 1, 0)$ et $f(e_3) = (0, -1, -2)$, on choisit

$$\mathcal{B}_4 = (e_1, -e_3, (1, 2, 3, 0), (-1, 0, -3, 2))$$

et

$$\mathcal{B}_3 = ((2, 1, 0), (0, 1, 2), (1, 0, 0)).$$

5) On a

$$S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{C}_4, \mathcal{B}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \mathrm{Pass}_{\mathcal{C}_3, \mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) Les matrices T et S sont équivalentes ; on a $S = Q^{-1}TP$. Elles ne peuvent pas être semblables car elles ne sont pas carrées.

Exercice 3. Soient $v_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $v_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est fixé.

1) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) Rappeler la définition de s_{F_1,F_2}, la symétrie par rapport à F_1 et de direction F_2, où $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$.

3) On pose $F_j = \mathrm{Vect}(v_j)$. Donner la matrice de l'endomorphisme s_{F_1,F_2} dans la base $\mathcal{B}$.

4) Calculer la matrice de s_{F_1,F_2} dans la base canonique.

5) Écrire dans la base canonique les matrices de toutes les symétries qui invarient l'ensemble des trois vecteurs

$$\left\{(1, 0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

(On rappelle qu'une fonction $f : X \to X$ invarie un sous-ensemble $S \subset X$ si pour tout élément $x \in S$, on a $f(x) \in S$.)

Solution.

1) Les vecteurs v_1 et v_2 engendrent $\mathbb{R}^2$ car

$$(\cos\theta)v_1 - (\sin\theta)v_2 = (1, 0)$$

et

$$(\sin\theta)v_1 + (\cos\theta)v_2 = (0, 1).$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) Par définition $s_{F_1,F_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ applique le vecteur $w = w_{F_1} + w_{F_2}$ sur $w_{F_1} - w_{F_2}$, où $w_{F_j} \in F_j$.

3) On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_{F_1,F_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4) Si on note par $\mathcal{C}$ la base canonique, alors

$$\mathrm{Pass}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(s_{F_1,F_2}) &= \mathrm{Pass}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_{F_1,F_2})\,\mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\\
&= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\sin\theta\,\cos\theta\\ 2\sin\theta\,\cos\theta & -\cos^2\theta+\sin^2\theta\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos(2\theta) & \sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5) $s_\theta = s_{F_1,F_2}$, avec les notations ci-dessus, invarie l'ensemble

$$X = \left\{(1,0), \Big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big), \Big(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\right\}$$

si et seulement si $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Donc les matrices recherchées sont

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Pour voir ceci, soit S_θ la matrice de s_θ dans la base canonique, avec $\theta \in [0,\pi[$. Alors

$$S_\theta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(2\theta)\\ \sin(2\theta)\end{pmatrix} \in \left\{(1,0), \Big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big), \Big(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\right\}.$$

On obtient trois possibilités pour $\left(\begin{smallmatrix}\cos(2\theta)\\ \sin(2\theta)\end{smallmatrix}\right)$ avec les solutions 0, $\pi/3$ et $2\pi/3$ dans $[0,\pi[$.

Remarque. On peut démontrer que si s est une symétrie qui invarie l'ensemble X, alors elle est du type s_θ. Soit $s = s_{U,V}$ une symétrie telle que

$$s((1,0)) = (1,0) \quad \text{et} \quad s\Big(\Big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big) = \Big(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{2}\,s((0,1)) = s\Big(\Big(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big) &= s\Big(\Big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big) + s\Big(\Big(\frac{1}{2}, 0\Big)\Big)\\
&= \Big(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2}, 0\Big)\\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}(0,1),
\end{aligned}$$

donc $s((0,1)) = -(0,1)$.

Le calcul a été fait dans la base canonique. Si on supposait

$$s\Big(\Big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big) = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad \text{et} \quad s((1,0)) = \Big(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big),$$

alors on aurait dû travailler dans la base formée avec les vecteurs (voir la figure 1)

$$u_1 = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad \text{et} \quad u_1 = \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\Big)$$

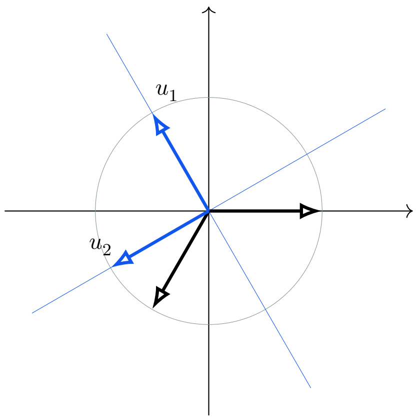

Figure 1: La symétrie qui fixe u_1 et échange les deux vecteurs noirs vérifie $s(u_1) = u_1$ et $s(u_2) = -u_2$.

Exercice 4. Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire telle que $\operatorname{im}(T) = \ker(T)$.

1) Montrer que n est pair.
2) Donner un exemple d'une telle application pour $n = 4$.
3) Montrer que $T^2 = 0$.

Solution.

1) D'après le théorème du rang

$$n = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{im}(T)) = 2\dim(\ker(T)),$$

donc n est pair.

2) Un exemple est l'application dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Soit $v \in \mathbb{R}^n$. On a

$$T^2(v) = T(T(v)) = T(w) = 0$$

car $w = T(v) \in \operatorname{im}(T) = \ker(T)$.

Barème indicatif : 6 — 7 — 5 — 2