Université d'Angers
Département de Mathématiques

L2, MA, MI et DL

Algèbre linéaire 1 – 2024-2025

Contrôl continu no 1
octobre 2024 — 9:00-10:30

Toute réponse non justifiée ne vaudra aucun point.
Téléphones, ordinateurs, calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels ?

$$\begin{aligned} E &= \{(x, 5x-y, 2y-x) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ F &= \{(x, y, z) \mid xz - y = 0\} \\ G &= \{(x+z, y, z+|z|) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Solution.
Pour E on a

$$\begin{aligned} E &= \{(x, 5x-y, 2y-x) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, 5x, -x) + (0, -y, 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,5,-1) + y(0,-1,2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,5,-1), (0,-1,2)), \end{aligned}$$

donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Pour F on voit que $(1,1,1) \in F$ mais que $(2,2,2) = 2(1,1,1) \notin F$; on en déduit que F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Comme $z + |z| \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que G n'est pas un sous-espace vectoriel. Explicitement, pour avoir un contre-exemple, on peut prendre $x = y = 0$ et $z = 1$; alors

$$(1,0,2) \in G \quad \text{mais} \quad -2(1,0,2) = (-2,0,-4) \notin G.$$

Exercice 2. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

1) Soit

$$E_1 = \left\{ (x,y,z,t) \;\middle|\; \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - z - 2t = 0 \end{cases} \right\}.$$

Déterminer une base de E_1.

2) Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. Soit $E_2 = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, où

$$v_1 = (1,1,1,1), \quad v_2 = (1,-1,1,0), \quad v_3 = (0,2,0,m), \quad v_4 = (2,0,2,1).$$

Déterminer une base de E_2 en fonction des valeurs de m.

3) Donner des équations de E_2 en nombre minimal dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ en fonction des valeurs de m.

4) On suppose $m \neq 1$. Déterminer une base de $E_1 \cap E_2$. Que peut-on dire de $E_1 + E_2$?

Solution.

1) Pour résoudre le système linéaire et homogène qui définit E_1, on utilise le x de la deuxième équation comme pivot ; par élimination (sur la première équation), on obtient

$$\begin{cases} \phantom{x -{}} y + 2z + 3t = 0 \\ x \phantom{{}+y} - z - 2t = 0. \end{cases}$$

11 novembre 2024

Les variables x et y sont des variables principales (pivot) et les variables z et t des paramètres. Donc

$$\begin{cases} \quad y = -2z - 3t \\ x \quad = z + 2t. \end{cases}$$

Par conséquent

$$E_1 = \{z(1,-2,1,0) + t(2,-3,0,1) \mid z,t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-2,1,0),(2,-3,0,1)).$$

On en déduit que $((1,-2,1,0),(2,-3,0,1))$ est une base de E_1.

2) On applique l'algorithme du pivot (en colonnes). On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & m & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la dimension de E_2 est 3 si $m \neq 1$ ($m-1$ en troisième colonne devient pivot), et elle est 2 si $m = 1$. De plus, si $m \neq 1$, les vecteurs

$$(0,2,0,1), \quad (1,-1,1,0) \quad \text{et} \quad (0,0,0,1)$$

forment une base de E_2, et si $m = 1$, les deux premiers vecteurs en forment une.

3) On applique l'algorithme du pivot (en utilisant les lignes) à la matrice M formée avec les vecteurs de la base trouvée ci-dessus auxquels on rajoute un vecteur général v de $\mathbb{R}^4$.

$v \in E_2$ si et seulement si $\mathrm{rank}(M) = \dim(E_2)$

Si $m \neq 1$, on a

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & 0 & y+x \\ 0 & 0 & 0 & z-x \\ 1 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

Comme $\dim(E_2) = 3$, on cherche une équation qui définit $E_2 \subset \mathbb{R}^4$. Donc on a

$$E_2 : x - z = 0. \tag{$*_m$}$$

Si $m = 1$, alors on a

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & -1 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 0 & y+x \\ 0 & 0 & z-x \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y+x-2t \\ 0 & 0 & z-x \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{rank}(M) = 2$ si et seulement si on a deux ligne nulles dans la dernière matrice. On en déduit

$$E_2 : \begin{cases} x \quad - z \quad = 0 \\ x + y \quad - 2t = 0. \end{cases} \tag{$*_1$}$$

4) Le sous-espace $E_1 \cap E_2$ est définit par les équations qui définissent E_1 et celles qui définissent E_2. Dans le cas $m \neq 1$, en utilisant ($*_m$), on a

$$E_1 \cap E_2 : \begin{cases} x + y + z + \ t = 0 \\ x \quad - z - 2t = 0 \\ x \quad - z \quad = 0. \end{cases}$$

On applique de nouveau la méthode du pivot (sur les lignes) et on obtient

$$E_1 \cap E_2 = \mathrm{Vect}((1, -2, 1, 0)).$$

Comme $\dim(E_1 \cap E_2) = 1$, on a

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Donc $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^4$.

Exercice 3. On considère $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degrés ≤ 3.

1) Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, puis déterminer une base de F.

2) Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(0) = P'(1)\}$. Déterminer une base de G.

3) Déterminer une base de $F \cap G$.

Solution.
Un élément général de $\mathbb{R}_3[X]$ est un polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. Les conditions qui définissent les sous-espaces F et G de l'énoncé sont des conditions sur les coefficients a_j, $0 \leq j \leq 3$.

1) On a

$$\begin{aligned}
F &= \{P \mid P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1)\} \\
&= \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \text{ avec, pour tout } j,\ a_j \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0, \text{ avec, pour tout } j,\ a_j \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + (-a_1 - a_2)X^3 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a_0 + a_1(X - X^3) + a_2(X^2 - X^3) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}(1, X - X^3, X^2 - X^3)
\end{aligned}$$

et le système de générateurs est une base de F. On note que F est un sous-espace vectoriel car il peut s'exprimer comme un vect.

2) On a

$$\begin{aligned}
G &= \{P \mid P \in \mathbb{R}_3[X], P'(0) = P'(1)\} \\
&= \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3, \text{ avec, pour tout } j,\ a_j \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid 2a_2 + 3a_3 = 0, \text{ avec, pour tout } j,\ a_j \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a_0 + a_1X + a_2X^2 - \frac{2a_2}{3} X^3 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a_0 + a_1X + \frac{a_2}{3} (3X^2 - 2X^3) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}(1, X, 3X^2 - 2X^3)
\end{aligned}$$

et le système de générateurs est une base de G.

3) Pour l'intersection on doit résoudre le système formé avec les deux équations définissant F et G respectivement,

$$\begin{cases} a_1 + \ \ a_2 + \ \ a_3 = 0 \\ \qquad 2a_2 + 3a_3 = 0. \end{cases}$$

On a, par élimination (pivot de Gauss), le système équivalent

$$\begin{cases} a_1 \qquad - \frac{1}{2}\, a_3 = 0 \\ \quad a_2 + \frac{3}{2}\, a_3 = 0. \end{cases}$$

Donc

$$F \cap G = \left\{ a_0 + \frac{1}{2}\, a_3 X - \frac{3}{2}\, a_3 X^2 + a_3 X^3) \;\middle|\; a_0, a_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(1, X - 3X^2 + 2X^3).$$

Exercice 4. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soient

$$f = \cos, \quad g = \sin, \quad h : x \mapsto \sin(2x), \quad k : x \mapsto 2\sin(x) - 3\cos(x).$$

Donner une base de $\mathrm{Vect}(f, g, h, k)$.

Solution.
On remarque que $k = -3f + 2g$. Il nous reste à décider si la famille $\{f, g, h\}$ est libre.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$af + bg + ch = 0.$$

Pour $x = 0$ on obtient $a = 0$ et pour $x = \pi/2$ on obtient $b = 0$. Il s'ensuit que $c = 0$ aussi (pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $c\,\cos(2x) = 0$). Donc la famille est libre et représente une base de $\mathrm{Vect}(f, g, h, k)$.

Barème indicatif : 3 — 8,5 — 6,5 — 3