# Algèbre linéaire 1 – 2023-2024

Contrôle continu no 1
Durée 2h

Toute réponse non justifiée ne vaudra aucun point.
Téléphones, ordinateurs, calculatrices sont interdits.

**Exercice 1.** Donner une définition de : *La famille* $\{v_1, \dots, v_p\}$ *d'éléments du* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $E$ *n'est pas génératrice de* $E$.

***Solution.***
La définition de la famille génératrice et sa négation pour $\{v_1, \dots, v_p\}$ sont les suivantes :

**pour tout** $v \in E$ **il existe** $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ tels que $v = a_1v_1 + \cdots + a_pv_p$
**il existe** $v \in E$ tel que **pour tous** $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$, on a $v \neq a_1v_1 + \cdots + a_pv_p$

**Exercice 2.** Les sous-ensembles suivants (d'espaces vectoriels *connus*) sont-ils des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels ? Si "oui", donner une base du sous-espace.

$$\begin{aligned}
E &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z = 0\} \\
F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz + y = 0\} \\
G &= \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \exists a \in [0, 1] \text{ tels que } P(a) = 0\} \\
H &= \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } P = (a + 2b) - 3bX + (b - 4a)X^2\}.
\end{aligned}$$

***Solution.***
• $E$ est un sous-espace vectoriel car

$$\begin{aligned}
E &= \{(x, y, z, t) \mid 2x - y + 4z = 0\} \\
&= \{(x, y, z, t) \mid y = 2x + 4z\} \\
&= \{(x, 2x + 4z, z, t) \mid x, z, t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1, 2, 0, 0) + z(0, 4, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 \mid x, z, t \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}((1, 2, 0, 0), (0, 4, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).
\end{aligned}$$

• $F$ n'est pas un sous-espace vectoriel. Par exemple $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$ appartiennent à $F$, mais

$$(1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 0, 1) \notin F.$$

• $G$ n'est pas un sous-espace vectoriel. Par exemple les polynômes $X$ et $1 - X$ appartiennent à $G$, mais

$$X + (1 - X) = 1 \notin G.$$

• $H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car

$$\begin{aligned}
H &= \{P \mid \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } P = (a + 2b) - 3bX + (b - 4a)X^2\} \\
&= \{P \mid \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } P = a(1 - 4X) + b(2 - 3X + X^2)\} \\
&= \{a(1 - 4X) + b(2 - 3X + X^2) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}(1 - 4X, 2 - 3X + X^2).
\end{aligned}$$

**Exercice 3.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants

$$u = (-1, 3, 0), \quad v = (-2, -1, 1), \quad w = (1, 0, 2) \quad \text{et} \quad t = (1, 11, -2),$$

et les familles

$$\mathcal{A} = \{u, v, w, t\}, \quad \mathcal{B} = \{u, v, w\}, \quad \mathcal{C} = \{u, v\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \{w, t\}.$$

On note $A, B, C, D$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

1) La famille $\mathcal{A}$ est-elle libre ?

2) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

3) À-t-on $C = \mathbb{R}^3$ ? $A = B$ ?

4) Pour $C$ et $D$ respectivement, donner des bases puis des équations en nombre minimal dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

5) Donner une base de $C \cap D$ puis des équations en nombre minimal dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

***Solution.***
On applique le pivot de Gauss sur la famille $\mathcal{A}$ en travaillant avec les lignes des matrices. On note $(x_1, x_2, x_3)$ les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -2 & 1 & 1 & x_1 \\ 3 & -1 & 0 & 11 & x_2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & x_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -7 & 3 & 14 & x_2 + 3x_1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -2 & x_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & -3 & x_1 + 2x_3 \\ 0 & 0 & \boxed{24} & 0 & 3x_1 + x_2 + 7x_3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

1) La famille $\mathcal{A}$ n'est pas libre car $|\mathcal{A}| = 4 < 3$ la dimension de l'espace.

2) D'après le pivot de Gauss, les vecteurs $u$, $v$ et $w$ sont libres, donc $\mathcal{B}$ est une base de $B = \mathbb{R}^3$.

3) $\dim(C) \leq |\mathcal{C}| = 2$, donc $C \neq \mathbb{R}^3$. Comme les vecteurs $u$, $v$ et $w$ sont linéairement indépendants, on a

$$A = \mathrm{Vect}(\mathcal{A}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = B = \mathbb{R}^3.$$

4) Toujours d'après le pivot de Gauss, $C = \mathrm{Vect}(\mathcal{C})$ est de dimension 2 et

$$C : 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 0.$$

Pour obtenir une description de $D$ comme solution d'un système linéaire, on recommence (il est plus simple) le pivot de Gauss, cette fois seulement sur les vecteurs $w$ et $t$. On a

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & x_1 \\ 0 & 11 & x_2 \\ 2 & -2 & x_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 11 & x_2 \\ 0 & -4 & x_3 - 2x_1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 44 & 4x_2 \\ 0 & \boxed{-4} & -2x_1 + x_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & -22x_1 + 4x_2 + 11x_3 \\ 0 & -4 & -2x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Donc $\dim(D) = 2$, $\mathcal{D}$ étant une base de $D$, et

$$D : -22x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 0.$$

5) L'intersection $C \cap D$ est décrite par le système obtenu en mettant ensembles les équations obtenues pour $C$ et $D$ :

$$C \cap D : \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ -22x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 0. \end{cases}$$

Pour trouver une base de l'intersection, il faut résoudre le système. On a (par le pivot ou directement en coordonnées) successivement

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ -34x_1 \qquad - 17x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 \qquad - x_3 = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -11x_1 + x_2 & = 0 \\ 2x_1 \quad + x_3 & = 0 \end{cases}.$$

Donc $C \cap D = \mathrm{Vect}((1, 11, -2)) = \mathrm{Vect}(t)$.

**Exercice 4.** Soit $m \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère la famille

$$\mathcal{F}_m = \{1 + X + 2X^2,\ 1 + 2X + mX^2,\ -1 + mX + 2X^2\}.$$

1) Pour quelles valeurs de $m$ la famille $\mathcal{F}_m$ donne-t-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$ ?

2) On suppose $m = 3$. Donner une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_3)$ puis des équations en nombre minimal dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ définissant $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_3)$.

3) Existe-t-il une valeur de $m$ pour laquelle $\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_m)) = 1$ ? Justifier votre réponse.

***Solution.***

1) On commence par appliquer l'algorithme de Gauss à la famille $\mathcal{F}_m$ avec un vecteur quelconque rajouté :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a_0 \\ 1 & 2 & m & a_1 \\ 2 & m & 2 & a_2 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a_0 \\ 0 & 1 & m+1 & a_1 - a_0 \\ 0 & m-2 & 4 & a_2 - 2a_0 \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a_0 \\ 0 & 1 & m+1 & a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & 4 - m^2 + m + 2 & a_2 - (m-2)a_1 + (m-2)a_0 - 2a_0 \end{pmatrix} \qquad (1) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a_0 \\ 0 & 1 & m+1 & a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & -m^2 + m + 6 & (m-4)a_0 - (m-2)a_1 + a_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les trois vecteurs de la famille $\mathcal{F}_m$ sont linéairement indépendants si et seulement si $-m^2+m+6 \neq 0$ (il y a trois pivots dans (1)). Donc $\mathcal{F}_m$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si $m \neq -2$ et 3.

2) Pour $m = 3$, l'algorithme du pivot dans (1) devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a_0 \\ 1 & 2 & 3 & a_1 \\ 2 & 3 & 2 & a_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a_0 \\ 0 & 1 & 4 & a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_0 - a_1 + a_2 \end{pmatrix}.$$

Donc $(1 + X + 2X^2, 1 + 2X + 3X^2)$ est une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_3)$ est

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_3) : a_0 + a_1 - a_2 = 0.$$

3) Non, car le rang de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_m$ est au moins deux — il y a a au moins deux pivots dans (1).

**Exercice 5.** Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que les fonctions $f_0 : x \mapsto e^x$, $f_1 : x \mapsto xe^x$ et $f_2 : x \mapsto x^2e^x$ forment une famille libre de $E$.

2) La fonction $x \mapsto \sin(x)$ appartient-elle à $\mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$ ? Justifier votre réponse.

***Solution.***

1) Soient $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$a_0e^x + a_1xe^x + a_2x^2e^x = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En prenant $x = 0$ on obtient $a_0 = 0$. En prenant $x = 1$ et puis $x = -1$ on obtient

$$\begin{cases} ea_1 + \quad ea_2 = 0 \\ -e^{-1}a_1 + e^{-1}a_2 = 0. \end{cases}$$

On en déduit que $a_1 = a_2 = 0$. Donc la famille est libre.

2) On suppose qu'il existe $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sin x = a_0 e^x + a_1 x e^x + a_2 x^2 e^x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En prenant $x = 0$ on obtient $a_0 = 0$. Maintenant, on prend $x = \pi$ et puis $x = -\pi$ pour arriver au système linéaire

$$\begin{cases} \pi e^{\pi} a_1 + \quad \pi^2 e^{\pi} a_2 = 0 \\ -\pi e^{-\pi} a_1 + \pi^2 e^{-\pi} a_2 = 0. \end{cases}$$

On obtient $a_1 = a_2 = 0$, c'est-à-dire une contradiction. On conclut que la fonction sin n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$.

**Barème indicatif : 1 — 4.5 — 7.5 — 4 — 3**