logo.png

Faculté des Sciences

Licence Mathématiques

Systèmes de vote

LECHAT Oriane
SORIN Julie

Année 2017-2018

Table des matières

Introduction

Le 7 mai 2017, Emmanuel Macron était élu président de la République française au suffrage universel direct. Pour la première fois dans l'histoire de la V^{e} république, un candidat issu d'un parti politique « centriste » était élu.

- Pourquoi durant près de 50 ans se sont succéder uniquement deux grands partis opposés (socialiste vs républicains) ?
- Était-ce le souhait des français ou le système de vote actuel (système majoritaire à deux tours) favorise t-il ces candidats ?
- Le résultat aurait-il été identique avec un système de vote différent ?

Pour tenter de répondre à ces questions, nous expliquerons dans un premier temps le contexte à travers les critères que doivent respecter les systèmes de vote et nous évoquerons la notion de manipulation. Ensuite, nous présenterons quelques systèmes de vote à l'aide d'un exemple précis.

Dans un second temps, nous mathématiserons le sujet et nous citerons les principaux résultats démontrés à ce jour, à savoir le Paradoxe d'Arrow et les théorèmes de Gibbard-Satterthwaite.

1 Vulgarisation

1.1 Contexte

De nos jours, de nombreux pays sont en démocratie, c'est à dire que les citoyens ont le pouvoir d'élire leurs représentants. C'est principalement pour cela qu'ils sont amenés à voter. Cependant, il existe de multiples façons de voter et de nombreux systèmes de votes. Pour les différencier, il est important de déterminer les avantages et inconvénients de chacun. C'est pour cela qu'ont été développés des critères de système de vote [**?**].

1.1.1 Les critères de système de vote

TOT **Totalité ou Souveraineté** Tous les candidats doivent avoir une chance d'être élus.

MONO **Monotonie** Si un candidat n'est pas gagnant et qu'il baisse dans le classement d'un certain nombre de votants sans modifier l'ordre des autres, alors il ne doit pas pouvoir gagner.

Remarque 1.1.1. Ces deux critères peuvent être remplacés par le critère suivant.

UNA **Unanimité** Si un candidat est préféré/détesté par la totalité des votants, il doit alors être le gagnant/perdant.

UNI **Universalité** On doit toujours pouvoir déterminer un gagnant A sur un ensemble de candidats. C'est à dire qu'on doit toujours pouvoir déduire une volonté collective à partir des volontés individuelles.

ICNP **Indépendance des candidats non-pertinent** L'introduction de candidats supplémentaires ne doit pas modifier l'ordre relatif existant entre les autres candidats dans chaque bulletin.

ND **Non-dictature** Aucun votant ne doit pouvoir imposer ses préférences indépendamment des préférences des autres.

Remarque 1.1.2. Ces critères sont souvent appelés les critères d'Arrow et seront développés dans la partie II.

COND **Critère de Condorcet** S'il existe un candidat A qui remporte tous les duels face aux autres candidats, alors il doit remporter l'élection.

Remarque 1.1.3. Ce candidat A est appelé le vainqueur de Condorcet et il est unique.

Remarque 1.1.4. Dès qu'il y a au moins trois candidats, il existe des situations où il n'y a pas de vainqueur de Condorcet. C'est ce qu'on appelle « le paradoxe de Condorcet » (cf partie 1.1.2)

PCOND **Critère du perdant de Condorcet** Dans des bulletins avec classement des candidats, s'il existe un perdant de Condorcet, c'est-à-dire un candidat qui confronté à tout autre candidat est toujours le perdant alors ce candidat ne doit pas être élu.

COH **Cohérence** Si les bulletins sont partagés en deux groupes et si un candidat est le gagnant dans chaque groupe, il doit être nommé vainqueur des élections.

PART **Participation** Si A est gagnant et que l'on rajoute des bulletins dans lesquels A est toujours mieux placé que B, B ne doit pas être le nouveau vainqueur.

MAJ **Majorité** Si un candidat est placé premier dans plus de la moitié des bulletins, il doit être élu.

Remarque 1.1.5. Ce critère est fortement critiqué par l'utilitarisme qui estime qu' ≪ un candidat préféré par la majorité peut ne pas correspondre à la volonté du peuple, si la majorité n'est convaincue que de justesse par ce candidat, alors que la minorité le trouve franchement mauvais ≫.

NM **Non-manipulabilité ou Invulnérabilité aux votes tactique** : Un individu ne doit pas pouvoir favoriser son candidat préféré A, sans voter pour celui-ci.

Remarque 1.1.6. Ce dernier critère est primordial car on remarque que beaucoup de systèmes de vote sont facilement manipulables.

1.1.2 La manipulation des systèmes de vote

Enoncé 1.1.7. On appelle ≪ vote sincère ≫ un vote qui consiste à donner sa voix au candidat que l'on préfère, objectivement et indépendamment des autres candidats en lice.

On distingue trois façons de manipuler le vote :

- le vote utile : vote que l'on considère comme le plus efficace pour vaincre un candidat que l'on ne souhaite pas voir élire (Il ne tient pas nécessairement compte des convictions politiques profondes des électeurs).
- le vote stratégique : on ne vote pas selon ses convictions mais on exploite les failles du système pour aider son candidat.
- le vote contestataire (ou vote protestataire) : la tendance d'une partie des électeurs (ou des votants) à contester ou à exprimer un mécontentement en votant pour quelqu'un d'autre que les partis dont ils auraient pu se sentir proches.

Remarque 1.1.8. Bien que ces trois votes soient totalement différents et n'aient pas les mêmes visées, on arrive au même constat : ils manipulent tous les élections et changent le résultat final. C'est pourquoi ils ne seront pas différenciés dans la partie 2.

1.2 Un exemple d'élection

Pour bien comprendre le système de vote, nous allons présenter un exemple concret d'élections similaires à la dernière élection présidentielle en France [**?**]. Pour simplifier, nous utiliserons uniquement les 5 candidats principaux, à savoir les candidats des partis En Marche (M), Parti Socialiste (PS), les Républicains (LR), le Front National (FN) et les Communistes (C).

On a demandé aux électeurs de classer ces candidats de la première place (1) à la cinquième place (5). Avec cinq candidats, on aurait $5! = 120$ classements différents, ce qui est difficilement exploitable. Pour simplifier la situation, nous utiliserons les résultats suivant.

% des votes candidats	C	PS	M	LR	FN
33%	4	5	3	2	1
22%	4	1	2	3	5
18%	1	2	3	4	5
16%	2	3	4	1	5
7%	4	2	1	3	5
4%	2	4	1	3	5

1.2.1 Système majoritaire à deux tours

Le système majoritaire à deux tours [**?**] est le système actuellement utilisé en France pour les élections présidentielles. Dans ce système, on compte les voix des candidats premiers de liste uniquement :

- Si un candidat obtient la majorité absolue des voix (plus de 50% des voix), il est élu.
- Sinon, on garde les deux candidats ayant obtenu le plus de voix puis on recompte le nombre de voix comme si les candidats éliminés ne s'étaient pas présentés, celui qui obtient le plus de voix est élu.

(en pratique, il n'est pas demandé aux électeurs de classer les candidats, ils doivent juste voter pour leur candidat préféré aux deux tours, sachant qu'il n'y a que les deux meilleurs candidats au deuxième tour)

Dans notre exemple, aucun des candidats n'obtient la majorité absolue, on doit alors garder les deux candidats ayant obtenu le plus de voix comme premier de liste pour le deuxième tour.

% des votes candidats	C	PS	M	LR	FN
33%	4	5	3	2	**1**
22%	4	**1**	2	3	5
18%	**1**	2	3	4	5
16%	2	3	4	**1**	5
7%	4	2	**1**	3	5
4%	2	4	**1**	3	5
Total	18%	22%	11%	16%	33%

Au deuxième tour, on reporte les voix des candidats éliminés du premier tour et on obtient le tableau suivant :

% des votes candidats	PS	FN
33%	2	**1**
22%	**1**	2
18%	**1**	2
16%	**1**	2
7%	**1**	2
4%	**1**	2
Total	67%	33%

Dans ce système électoral, c'est donc PS qui serait élu. Cependant, ce système présente de nombreux inconvénients. En effet, il ne respecte pas certains critères, par exemple :

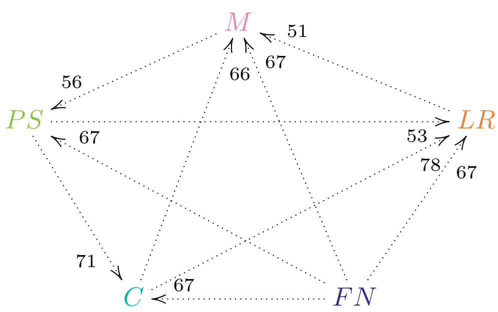
1. L'ICNP, à cause des interférences entre des candidats idéologiquement proches. Par exemple lors des élections de 2002, Jospin qui était pourtant gagnant d'après les sondages n'est pas passé au second tour à cause d'une dispersion des voix de gauche (Taubira et Chevènement).
2. Le Vainqueur de Condorcet (cf. partie 1.2.2).
3. La Non-Manipulabilité.

C'est pour pallier à ces nombreux défauts que, depuis des siècles, des chercheurs essaient de trouver un « meilleur » système de vote c'est à dire un système de vote qui respecterait plus de critères.

1.2.2 Méthode de Condorcet

La méthode de Condorcet [**?**] est une des plus anciennes méthodes de vote, elle date du XVIIIe siècle. Cette méthode consiste à comparer tous les candidats en duels. En utilisant les résultats précédents, on obtient le diagramme de préférences binaires ci-dessous où :

- Chaque candidat est représenté par une position distincte.
- Entre chaque paire de candidats, il y a une flèche qui pointe vers celui des deux qui serait vainqueur en face-à-face.
- Sur chaque flèche, on indique le score (en pourcentage) par lequel le vainqueur du face-à-face concerné gagne.



Dans cette situation, aucun des cinq candidats bat les quatre autres en duel, on n'a donc pas de vainqueur de Condorcet. On se retrouve dans le cas du paradoxe de Condorcet. Pour résoudre ce paradoxe et déterminer un vainqueur, on dénombre plusieurs méthodes :

- On peut chercher le candidat qui a gagné le plus de confrontations (mais ici on a égalité entre M et LR qui ont tous deux gagné 4 duels).
- La méthode du Minimax qui consiste à choisir le candidat qui a le moins perdu lors de sa plus mauvaise confrontation (ici c'est LR qui serait vainqueur car il a perdu un duel avec 49% des voix).

- La méthode Black qui consiste à utiliser la méthode de Condorcet et en cas de conflit seulement (comme dans notre exemple) à faire appel à méthode de Borda (cf partie 1.2.3).
- Le scrutin de Condorcet randomisé (aussi appelé méthode bipartiludique) qui élit le vainqueur de Condorcet, lorsque celui-ci existe. Sinon, il résout le paradoxe en choisissant l'élu selon une loi de probabilité parmi un sous-ensemble de candidats de tête (dans notre exemple tous les candidats excepté FN qui perd tous les duels). Cette loi de probabilité est déterminé par le graphe orienté des duels.

Remarque 1.2.1. Cette dernière méthode est robuste à la manipulation contrairement aux autres.

Remarque 1.2.2. Il est important de fixer le choix de la méthode pour résoudre le paradoxe avant le vote, celui-ci ayant des conséquences sur la détermination du vainqueur.

1.2.3 Classement des candidats

C'est principalement pour résoudre le paradoxe de Condorcet que le vote par classement des candidats est apparu.

On va s'intéresser et comparer deux méthodes qui utilisent le vote par classement :

- la méthode de Borda
- le vote alternatif

La méthode de Borda Utilisée en Slovénie, cette méthode consiste à additionner les rangs donnés par les électeurs, le candidat ayant le plus petit score gagne l'élection.

candidats	C	PS	M	LR	FN
score	306	301	272	**253**	368

Dans cette méthode, c'est LR qui remporterait l'élection.

Remarque 1.2.3. Ce système de vote ne respecte pas les critères suivants :

1. L'ICNP.
2. Le Vainqueur de Condorcet, avec la méthode de Condorcet ce serait LR qui aurait remporté l'élection.
3. La Majorité.

Le vote alternatif Utilisée en Australie et en Irlande, cette méthode se déroule en plusieurs étapes. Tout d'abord, on compte les voix des candidats premiers de liste :

- Si un candidat obtient la majorité absolue des voix (plus de 50% des voix), il est élu.
- Sinon, on élimine celui qui a eu le moins de voix puis on recompte les voix comme si le candidat éliminé ne s'était pas présenté.

On répète cette opération jusqu'à ce qu'un candidat ait 50% ou plus des voix.

Dans notre situation de départ, on a le tableau suivant :

% des votescandidats	C	PS	M	LR	FN
33%	4	5	3	2	**1**
22%	4	**1**	2	3	5
18%	**1**	2	3	4	5
16%	2	3	4	**1**	5
7%	4	2	**1**	3	5
4%	2	4	**1**	3	5
Total	18%	22%	11%	16%	33%

Aucun candidat obtient la majorité absolue. On élimine alors un candidat et on reporte ses voix de sorte qu'on obtienne le tableau suivant :

% des votes candidats	C	PS	LR	FN
33%	3	4	2	**1**
22%	3	**1**	2	4
18%	**1**	2	3	4
16%	2	3	**1**	4
7%	3	**1**	2	4
4%	**1**	3	2	4
Total	22%	29%	16%	33%

Encore aucun candidat obtient la majorité absolue. De ce fait, on répète la même opération jusqu'à ce qu'un candidat obtienne la majorité absolue.

% des votes candidats	C	PS	FN
33%	2	3	**1**
22%	2	**1**	3
18%	**1**	2	3
16%	**1**	2	3
7%	2	**1**	3
4%	**1**	2	3
Total	38%	29%	33%

% des votes candidats	C	FN
33%	2	**1**
22%	**1**	2
18%	**1**	2
16%	**1**	2
7%	**1**	2
4%	**1**	2
Total	67%	33%

Finalement, C obtient la majorité absolue, il est alors élu selon la méthode du vote alternatif.

Remarque 1.2.4. Ce système de vote ne respecte pas les critères suivants :

1. L'ICNP.
2. Le Vainqueur de Condorcet, avec la méthode de Condorcet ce serait LR qui aurait remporté l'élection.
3. La Monotonie.

1.2.4 Vote de valeurs

Il est difficile pour les électeurs de classer tous les candidats. C'est pour cela que des méthodes alternatives comme le vote de valeurs [?] se développent. Cette méthode consiste à évaluer chaque candidat en lui donnant une note $\in [-2, 2]$. Ensuite on calcule la somme des notes obtenues par chaque candidat, celui ayant obtenu le plus grand score est déclaré vainqueur. L'intérêt par rapport à la méthode de Borda est qu'il est possible de mettre la même note à deux candidats.

Remarque 1.2.5. Ce système de vote est à l'heure actuelle très peu utilisé en politique, mais on remarque qu'un système similaire (avec calcul de moyenne de note $\in [0, 5]$) est très utilisé sur internet pour évaluer des restaurants, hôtels...

En se basant sur notre exemple de départ, nous pourrions supposer qu'avec la méthode de vote par valeurs, nous obtiendrions les résultats suivants :

% des votes candidats	C	PS	M	LR	FN
33%	0	-1	1	1	2
22%	0	1	1	0	-2
18%	2	2	0	-1	-1
16%	0	-1	-1	1	-1
7%	-1	2	2	1	-2
4%	1	0	2	0	-2
Score	33	23	61	38	-34

Avec cette méthode, c'est M qui remporterait l'élection.

Remarque 1.2.6. Ce système de vote ne respecte pas les critères suivants :

1. Le Vainqueur de Condorcet.
2. La Majorité.

1.2.5 Jugement majoritaire

Le Jugement Majoritaire (JM) [**?**][**?**] est un système du type vote par valeurs qui se distingue par l'utilisation d'appréciations verbales plutôt que numériques, et la détermination du gagnant par la médiane plutôt que la moyenne. Pour chaque candidat, l'électeur a le choix entre plusieurs mentions : Excellent (E), Très Bien (TB), Bien (B), Assez Bien (AB), Passable (P), Insufisant (I) et à Rejeter (R).

Chaque candidat a une mention médiane, qu'on appelle ≪ mention majoritaire ≫, ce qui signifie que la majorité des électeurs (plus de 50 %) jugent qu'il mérite au moins cette mention.

Par rapport à notre exemple de départ, nous pourrions supposer que nous obtiendrions les résultats suivant :

% des votes candidats	C	PS	M	LR	FN
33%	P	I	AB	B	E
22%	AB	B	B	AB	R
18%	TB	TB	AB	I	I
16%	P	I	I	AB	I
7%	R	TB	TB	B	R
4%	B	P	E	AB	R

Figure 1 – Graphique

Capture.PNG

Ici, FN obtient la mention majoritaire Insuffisant(I), C et PS la mention Passable(P), M et LR la mention Assez Bien (AB). On a égalité entre M et R. Pour déterminer le gagnant, on va nuancer les mentions, c'est à dire qu'on va comparer le pourcentage de mention strictement supérieur (c'est à dire B, TB et E) au pourcentage de mention strictement inférieur (P, I et R). Si le pourcentage de mention strictement supérieur est plus élevé, on aura la mention AB+, sinon on aura la mention AB-.

- Pour M, on a 33% de mention $>$ et 16% de mention $<$, donc M a la mention AB+.
- Pour LR, on a 40% de mention $>$ et 18% de mention $<$, donc LR a la mention AB+.

On a encore une égalité entre M et LR. Dans ce cas, on compare le pourcentage de mention strictement supérieur, le candidat au pourcentage le plus élevé gagne (si nos deux candidats avaient eu comme mention majoritaire AB-, on aurait comparé le pourcentage de mention strictement inférieurs et le candidat au pourcentage le plus faible aurait gagné).

Finalement, dans notre exemple, LR serait le gagnant selon la méthode du Jugement Majoritaire.

Remarque 1.2.7. Ce système de vote ne respecte pas le critère de la majorité.

2 Mathématisation du système de vote

2.1 Contexte

Dans cette partie, on s'intéressera uniquement aux système de vote nécessitant un classement strict des candidats, c'est à dire qu'on exclu les systèmes de type vote de valeurs ou jugement majoritaire de la première partie.

2.1.1 Notations

$\mathcal{C}$ = ensemble des candidats, $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_m\}$.

V = ensemble des votants, V = $\{1, ..., n\}$

Cl est la fonction qui à chaque votant v associe son classement. On la nommera « profil de préférence ».

$$\begin{array}{rcccl} Cl & : & V & \to & \mathcal{C}^m \\ & & v & \mapsto & Cl(v) = (C_{v,1}, C_{v,2}, ..., C_{v,m}) \end{array}$$

f est la fonction de choix social (opération de passage des préférences individuelles vers une préférence collective). Pour tout $\mathcal{C}$, on a :

$$\begin{array}{rcccl} f_{\mathcal{C}^m} & : & \{\forall V, \forall Cl, Cl : V \to \mathcal{C}^m\} & \to & \mathcal{C}^m \\ & & Cl & \mapsto & f(Cl) \end{array}$$

Le gagnant de l'élection est $f_1(Cl)$.

$A >_v B$ Signifie qu'un candidat A est classé au dessus d'un candidat B dans $Cl(v)$, c'est à dire $Cl(v) = (..., A, ..., B, ...)$.

$A >_V B$ Signifie qu'un candidat A est classé au dessus d'un candidat B dans $f(Cl)$, c'est à dire $f(Cl) = (..., A, ..., B, ...)$.

Remarque 2.1.1. Dans la suite, on utilisera les deux sortes de notations décrites ci-dessus.

2.1.2 Les critères

TOT **Totalité ou Souveraineté** Tous les candidats doivent avoir une chance d'être élus c'est à dire que f est surjective :

$$\forall C \in \mathcal{C}, \exists Cl \in \mathcal{C}^m, f(Cl) = C.$$

MONO **Monotonie** : Si un candidat A n'est pas gagnant et qu'il baisse dans le classement de $p < n$ votants, $u_1, ..., u_p$ (où u_j est le j^{eme} votant dont le classement a été modifié) sans modifier l'ordre des autres, alors :

(i) Il ne doit pas pouvoir gagner.

(ii) Il ne doit pas pouvoir augmenter dans le classement de $f(Cl)$.

- Pour $p = 1$, (u_1 est le seul votant qui a changé son classement).
Soit $A \in C$ tel que $f_1(Cl) \neq A$, soit $Cl' \in C^m$, on a :
($Cl_i(u_1) = A$ et $Cl'_{i'}(u_1) = A$, $i' > i$) et ($f_k(Cl) = A$) tel que :

$$\text{(i)}\ \ Cl'(v) = \begin{cases} Cl(v) & \text{si } v \neq u_1 \\ Cl'(u_1) & \text{si } v = u_1 \end{cases} \Rightarrow f_1(Cl') \neq A$$

$$\text{(ii)}\ \ Cl'(v) = \begin{cases} Cl(v) & \text{si } v \neq u_1 \\ Cl'(u_1) & \text{si } v = u_1 \end{cases} \Rightarrow f_{k'}(Cl') = A,\ k' \geqslant k$$

- Pour $1 < p < n$. Soit $A \in C$ tel que $f_1(Cl) \neq A$, soit $Cl' \in C^m$, on a $\forall j = \{1, .., p\}$:
($Cl_{i_j}(u_j) = A$ et $Cl'_{i'_j}(u_j) = A$, $i'_j > i_j$) et ($f_k(Cl) = A$) tel que :

$$\text{(i)}\ \ Cl'(v) = \begin{cases} Cl(v) & \text{si } v \neq u_j \\ Cl'(u_j) & \text{si } v = u_j \end{cases} \Rightarrow f_1(Cl') \neq A$$

$$\text{(ii)}\ \ Cl'(v) = \begin{cases} Cl(v) & \text{si } v \neq u_j \\ Cl'(u_j) & \text{si } v = u_j \end{cases} \Rightarrow f_{k'}(Cl') = A,\ k' \geqslant k$$

UNA **Unanimité** : Lorsque tous les votants $v \in V$ préfèrent un certain candidat A à un certain B, la fonction de choix social doit associer cette même préférence A à la société, c'est à dire,

$$(\forall v \in V, A >_v B) \Rightarrow (A >_V B).$$

UNI **Universalité** : On doit toujours pouvoir déterminer un gagnant A sur un ensemble de candidat $\mathcal{C}$ c'est à dire la fonction f existe.

ICNP **Indépendance des Candidats Non-Pertinents** : Le classement relatif de deux candidats, A et B, ne doit dépendre que de leur position relative pour l'ensemble des votants V et non du classement des autres candidats.
Si l'on considère un sous-ensemble de candidats $\mathcal{C}' = \{A, B\} \in \mathcal{C}$ (avec $Card(\mathcal{C}') = 2 \leq m$), alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \{\forall V, \forall Cl, Cl : V \to \mathcal{C}^m\} \arrow[r, "f_{\mathcal{C}^m}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{C}^m \arrow[d, "\pi'"] \\ \{\forall V, \forall Cl, Cl : V \to \mathcal{C}'^2\} \arrow[r, "f_{\mathcal{C}'^2}"] & \mathcal{C}'^2 \end{tikzcd}$$

Où π est la fonction oubli qui, pour tous les classements des votants ne retient que la position relative de A et B. π' est la fonction oubli qui, pour le classement final ne retient que la position relative entre A et B.

ND **Non-dictature** : Aucun votant v ne doit pouvoir imposer ses préférences indépendamment des préférences des autres, en d'autres termes :

$$\forall v_0 \in V, \exists Cl \text{ tel que } Cl(v_0) \neq f(Cl)$$

NM **Non-Manipulabilité :** Un ensemble de votant $u_1, ..., u_p$, $p < n$ ne doivent pas pouvoir faire gagner leur candidat preféré A, sans voter pour celui-ci (c'est à dire le classer en premier).
($\forall j \in \{1, ..., p\}$, $Cl_1(u_j) = A$ et $f_1(Cl) \neq A$)
$\Rightarrow$ ($\forall Cl'$ tel que $Cl'_i(u_j) = A$, $i > 1$ et $f_1(Cl) \neq A$)

2.2 Le paradoxe d'Arrow

Kenneth Arrow (1921-2017)[**?**], a été récompensé pour sa carrière par le "prix Nobel" d'économie en 1972, c'est l'une des personnes principales ayant contribué à la théorie du choix social.

En 1951, Kenneth Arrow écrit un ouvrage , Social Choice and Individual Values, dans lequel il présente la première formulation de son théorème. Ce théorème est sûrement le plus connu et le plus surprenant en rapport avec le choix social, la théorie du choix social est un domaine multidisciplinaire lié aux thématiques de l'économie, de la théorie de la décision et de l'intelligence artificielle. Il montre que toute fonction de choix social devient dictatoriale sous certaines conditions. Kenneth Arrow a donc établi un certain nombre de critères que toute société démocratique devrait respecter. Il montre ensuite que ces propriétés peuvent soit conduire à un choix dictatorial, soit conduire à des profils de préférences irrationnels.

Définition 2.2.1. On dit que f est dictatoriale si :

$$\exists v_0 \in V, \forall Cl \text{ tq } Cl(v_0) = f(Cl)$$

Théorème 2.2.2. *Pour $Card(\mathcal{C}) \geq 3$, si f est Unanime et Indépendante aux Candidats Non-Pertinents alors f est dictatoriale.*

Remarque 2.2.3. Dans le théorème le critère d'Universalité est implicitement sous-entendu.

Démonstration. [**?**]On va démontrer ce théorème avec trois candidats A,B et C (ce qui se généralise pour m candidats car par ICNP, on peut toujours se ramener au cas de nos 3 candidats).

Remarque 2.2.4. Les deux schémas suivants sont équivalents :

$$Cl^0 : \begin{array}{ccc} \underline{A} & A & \underline{A} \\ \underline{B} & B & \underline{B} \end{array} \qquad\qquad Cl^0 : \begin{array}{ccccccc} A & ... & A & A & A & ... & A \\ \vee & ... & \vee & \vee & \vee & ... & \vee \\ B & ... & B & B & B & ... & B \end{array}$$

Existence de pivot

On va partir d'un profil de préférence Cl^0, où tous les votants préfèrent A à B (on ne s'occupe pas de C pour l'instant).

Au début, par unanimité, on sait que $f(Cl^0) = (A, B)$. À chaque itérations on va inverser, en partant de la gauche, les préférences entre A et B, jusqu'à ce que B soit préféré de tout le monde, $f(Cl^n) = (B, A)$.

$$Cl^0 : \begin{array}{ccc} \underline{A} & A & \underline{A} \\ \underline{B} & B & \underline{B} \end{array} \qquad\qquad Cl^n : \begin{array}{ccc} \underline{B} & B & \underline{B} \\ \underline{A} & A & \underline{A} \end{array}$$

À un moment, au cours de ce processus la préférence de B, pour le groupe, c'est inversée pour la première fois, on a alors : $f(Cl^{P_{B|A}}) = (B, A)$ où $P_{B|A}$ est le votant qui a causé la première inversion de la préférence du groupe (on le note ainsi car tous les votants à gauche préfèrent B et tous les votants à droite préfèrent A). On l'appellera votant pivot.

$$\begin{array}{cccc} & & P_{B|A} & \\ Cl^{P_{B|A}-1}: & \underline{B} & A & \underline{A} \\ & \underline{A} & B & \underline{B} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & P_{B|A} & \\ Cl^{P_{B|A}}: & \underline{B} & B & \underline{A} \\ & \underline{A} & A & \underline{B} \end{array}$$

Remarque 2.2.5. $f(Cl^{P_{B|A}-1}) = (A, B)$ car on a $A >_{P_{B|A}} B$

Peu importe les classements de C par ICNP, ce votant pivot ne dépend que de B et de A.

Remarque 2.2.6. C'est exactement la même démonstration pour un profil de préférence où tous les votants préfèrent B à A.

$P_{B|A}$ est dictateur pour la relation entre B et C (resp. A et C) c'est à dire qu'il décide de la préférence du groupe entre B et C(resp. A et C).

Lorsqu'on rajoute le candidat C, on peut obtenir 54 profils de préférences différents, car par définition du pivot, les votants à droite de celui-ci doivent préférer B à A et ceux à gauche doivent préférer A à B.

Considérons tout d'abord le profil de préférence $Cl^{(0)}$ (cf schéma p.16). Par définition du votant pivot $P_{B|A}$, on sait que la préférence du groupe entre A et B est celle du votant pivot, donc ici $A >_V B$. Par unanimité on a $C >_V A$ et donc par transitivité on obtient : $f(Cl^{(0)}) = (C, A, B) = Cl^{(0)}(P_{B|A})$.

Supposons que le votant pivot inverse sa préférence entre A et B, on a le nouveau profil $Cl^{(1)}$.

En utilisant le même raisonnement on obtient par définition du votant pivot $B >_V A$. De plus, $C >_V B$ car on n'a pas modifié l'ordre de préférence entre B et C par rapport à notre profil de préférence $Cl^{(0)}$,par ICNP vis à vis de A. Donc par transitivité, $f(Cl^{(1)}) = (C, B, A) = Cl^{(1)}(P_{B|A})$.

Grâce à un procédé similaire, si les votants se trouvant à droite du pivot inversent leurs préférences entre A et C, on obtient le profil $Cl^{(2)}$. Ainsi, on a $B >_V A$. De plus, $C >_V B$ car on n'a pas modifié l'ordre de préférence entre B et C par rapport à notre profil de préférence $Cl^{(1)}$. Donc par transitivité, $f(Cl^{(2)}) = (C, B, A) = Cl^{(2)}(P_{B|A})$.

On réitère le même raisonnement de sorte à obtenir les profils de préférences $Cl^{(3)}$, $Cl^{(4)}$, $Cl^{(5)}$ où :
$f(Cl^{(3)}) = Cl^{(3)}(P_{B|A})$, $f(Cl^{(4)}) = Cl^{(4)}(P_{B|A})$ et $f(Cl^{(5)}) = Cl^{(5)}(P_{B|A})$.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & P_{B|A} & \\
 & \underline{B} & C & \underline{C} \\
Cl^{(0)} : & \underline{C} & A & \underline{A} \\
 & \underline{A} & B & \underline{B}
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc}
 & & P_{B|A} & \\
 & \underline{B} & C & \underline{C} \\
Cl^{(1)} : & \underline{C} & B & \underline{A} \\
 & \underline{A} & A & \underline{B}
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc}
 & & P_{B|A} & \\
 & \underline{B} & C & \underline{A} \\
Cl^{(2)} : & \underline{C} & B & \underline{C} \\
 & \underline{A} & A & \underline{B}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & & P_{B|A} & \\
 & \underline{B} & C & \underline{A} \\
Cl^{(3)} : & \underline{C} & A & \underline{C} \\
 & \underline{A} & B & \underline{B}
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc}
 & & P_{B|A} & \\
 & \underline{B} & C & \underline{A} \\
Cl^{(4)} : & \underline{C} & A & \underline{B} \\
 & \underline{A} & B & \underline{C}
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc}
 & & P_{B|A} & \\
 & \underline{B} & C & \underline{A} \\
Cl^{(5)} : & \underline{C} & B & \underline{B} \\
 & \underline{A} & A & \underline{C}
\end{array}
$$

Remarque 2.2.7. On peut continuer le procédé jusqu'à obtenir les 54 profils de préférences différents dans lesquels la préférence du groupe est toujours égale à la préférence de l'individu pivot $P_{B|A}$.

Remarque 2.2.8. Pour commencer le procédé, il est nécessaire de partir d'un profil de préférence où il y a un cas d'unanimité entre B et C ou entre A et C.

Finalement, on observe que $P_{B|A}$ est dictateur pour la relation entre B et C (resp. A et C).

Prouvons l'inégalité : $P_{B|C} \leq P_{C|B}$

Considérons un profil de préférence Cl^0 où tous les votants préfèrent C à B (cf ci-dessous). Chacun leur tour, en partant de la gauche, les votants vont inverser leur préférences entre B et C jusqu'au votant pivot. On obtient alors le profil de préférence $Cl^{P_{B|A}}$. Puis les votants à droite inversent leurs préférences entre B et C de sorte que l'on ait le profil Cl^n.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & P_{B|A} & \\
 & \underline{C} & C & \underline{A} \\
Cl^{0} : & \underline{B} & A & \underline{C} \\
 & \underline{A} & B & \underline{B}
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc}
 & & P_{B|A} & \\
 & \underline{B} & B & \underline{A} \\
Cl^{P_{B|A}} : & \underline{C} & A & \underline{C} \\
 & \underline{A} & C & \underline{B}
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc}
 & & P_{B|A} & \\
 & \underline{B} & B & \underline{A} \\
Cl^{n} : & \underline{C} & A & \underline{B} \\
 & \underline{A} & C & \underline{C}
\end{array}
$$

D'après la partie 2 de la preuve :

- $f(Cl^0) = Cl^0(P_{B|A}) = (C, A, B)$
- $f(Cl^{P_{B|A}}) = (B, A, C)$
- $f(Cl^n) = (B, A, C)$

On remarque que la préférence du groupe entre B et C a été inversée. Le moment de première inversion, qui correspond au votant pivot $P_{B|C}$, est donc situé avant le votant $P_{B|A}$ ou en même temps que celui-ci. Autrement dit, $P_{B|C} \leqslant P_{B|A}$.

Considérons un profil de préférence Cl'^0 où tous les votants préfèrent B à C (cf ci-dessous). Chacun leur tour, en partant de la gauche, les votants vont inverser leur préférences entre B et C jusqu'au votant situé avant le votant pivot. On obtient alors le profil de préférence $Cl'^{P_{B|A}-1}$. Puis les votants à droite de celui-ci inversent leurs préférences entre B et C de sorte que l'on ait le profil Cl'^n.

$$\begin{array}{cccc} & & P_{B|A} & \\ & \underline{B} & B & \underline{A} \\ Cl'^0 : & \underline{C} & A & \underline{B} \\ & \underline{A} & C & \underline{C} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & & P_{B|A} & \\ & \underline{C} & B & \underline{A} \\ Cl'^{P_{B|A}-1} : & \underline{B} & A & \underline{B} \\ & \underline{A} & C & \underline{C} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & & P_{B|A} & \\ & \underline{C} & C & \underline{A} \\ Cl'^n : & \underline{B} & A & \underline{C} \\ & \underline{A} & B & \underline{B} \end{array}$$

D'après la partie 2 de la preuve :

- $f(Cl'^0) = Cl'^0(P_{B|A}) = (B, A, C)$
- $f(Cl'^{P_{B|A}-1}) = (B, A, C)$
- $f(Cl'^n) = (C, A, B)$

On remarque que la préférence du groupe entre B et C reste la même jusqu'au votant $P_{B|A}-1$. Donc le moment de première inversion, qui correspond au votant pivot $P_{C|B}$, est donc situé après le votant $P_{B|A}$ ou en même temps que celui-ci. Autrement dit, $P_{C|B} \geqslant P_{B|A}$.

D'où $P_{B|C} \leq P_{B|A} \leq P_{C|B}$.

Conclusion

Les rôles de A,B et C sont symétriques donc on peut faire une permutation de A, B et C. En particulier, $A \to A$, $B \to C$, $C \to B$. De l'inégalité précédente on en déduit : $P_{C|B} \leq P_{C|A} \leq P_{B|C}$. Des deux inégalités, on en conclut que $P_{C|B} = P_{B|C}$. D'où $P_{C|B} = P_{B|A} = P_{B|C} = P_{C|A} = ...$

Le votant pivot est en fait un seul votant : un dictateur.

$\square$

2.3 Gibbard-Satterthwaite

Nous avons évoqué dans la première partie que le critère de non-manipulabilité était un critère essentiel et que de nombreux systèmes de vote ne le respectaient pas, comme par exemple notre système de vote actuel en France. Mark Satterthwaite, un économiste et Allan Gibbard, un philosophe contemporain ont cherché s'il existait un système qui respecterait ce critère et en ont conclu les résultats suivants.

Définition 2.3.1. Soit un candidat A qui n'est pas gagnant et un ensemble de votants $p < n$, $u_1, ..., u_p$ qui veulent A gagnant. Si les p votants changent leurs votes et que A devient gagnant, on dit alors que f est manipulable.
($\forall j \in \{1, ..., p\}$, $Cl_1(u_j) = A$ et $f_1(Cl) \neq A$)
$\Rightarrow$ ($\exists Cl'$ tel que $Cl'_i(u_j) = A$, $i > 1$ et $f_1(Cl) = A$)

Théorème 2.3.2. ***Gibbard-Satterthwaite(1973)[?] :*** *Si $Card(\mathcal{C}) \geq 3$ et f est Non-Dictatoriale et Universelle, alors f est manipulable.*

Théorème 2.3.3. ***Corollaire de Gibbard-Satterthwaite (1973-1975) :*** *Si $Card(\mathcal{C}) \geq 3$ et f est Universelle et Non Manipulable, alors f est dictatoriale.*

Remarque 2.3.4. Ces théorèmes s'appliquent uniquement lorsqu'il y a 3 candidats ou plus. Car si l'on a seulement 2 candidats on est face à un référendum.

Théorème 2.3.5. ***Référendum :*** *Soit R tel que :*

$$\forall v \in V, Card(\mathcal{C}) = 2 \quad R \quad : \quad \begin{array}{ccc} \{r : V \to \mathcal{C}\} & \to & \mathcal{C} \\ r(v) & \mapsto & C_v \end{array}$$

($R(r(v)) = A$ ou B) Alors R est non manipulable.

Remarque 2.3.6. Cette méthode, appelée méthode la majorité, est la seule méthode démocratique qui soit robuste à la manipulation.