RACONTE MOI LES INVARIANTS DE GROMOV-WITTEN

ÉTIENNE MANN

1. Géométrie énumérative

La géométrie énumérative est une branche des mathématiques où nous comptons des objets géométriques et plus précisément ici des courbes complexes (c'est-à-dire des surfaces réelles cf Figure 1) qui ont certaines propriétés d'incidence comme passer par des points.

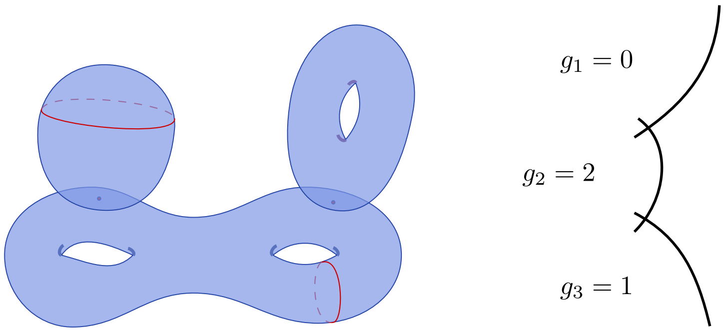

Figure 1. À gauche, nous avons le dessin heuristique d'une surface réelle et à droite sa représentations comme courbe complexe.

La question la plus naïve est de voir ces courbes comme des droites. Ainsi, la première question est : combien y a-t-il de droites qui passent par 2 points? Évidemment, la réponse est qu'il n'y en a qu'une seule, mais en fait cette question est mal formulée pour plusieurs raisons :

(1) D'abord, pourquoi 2 points ? Si nous n'avons qu'un seul point, nous avons un nombre infini de droites et si nous avons trop de points (au dessus de 3) non alignés nous n'avons aucune droite. Nous voyons qu'il faut poser un nombre précis de conditions pour que ce nombre soit fini et non nul. Si nous bougeons nos 2 points, nous avons toujours une unique droite sauf si bien sûr les deux points se rencontrent! Intuitivement, nous obtenons alors une condition sur les points qu'on appelle 2 points *généraux* c'est-à-dire sans aucune particularité.

(2) Ensuite, ces droites appartiennent à quel espace ? Nous pouvons nous poser la question dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, un espace projectif ou une variété quelconque. Pour compter de manière satisfaisante les objets, nous voyons vite que nous avons besoin du corps des nombres complexes[1]. Par exemple, une courbe $x^2 + y^2 = -1$ n'a pas de points réels alors qu'elle en possède dans $\mathbb{C}$. Dans la suite, nous allons garder l'espace projective complexe $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ comme exemple. Pour des raisons techniques, nous aurons besoin de compacité dans la suite mais le lecteur, peu familier avec l'espace projectif, peut le remplacer simplement par $\mathbb{C}^r$.

(3) La dernière question est celle du comptage à proprement parler. Nous savons que pour avoir des beaux résultats pour sur les racines des polynômes, il faut les compter avec leurs multiplicités. Dans notre cas de comptage de courbes, nous avons aussi à prendre en compte leurs multiplicités, pour cela nous utilisons la théorie de l'intersection "à la Fulton" que nous n'allons pas trop développer ici.

[1] Nous pouvons aussi compter sur le corps des nombres réels mais ce nombre va dépendre de la position des points et c'est une tout autre histoire.

Remarquons que la droite est une courbe de degré 1 et nous avons fixé 2 points. Une généralisation naturelle est de considérer une courbe de degré d.

Question: Combien de points devons-nous fixer pour avoir un nombre fini et non nul de courbes de degré d passant par ces points dans le plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$?

La réponse est $3d-1$ points. Ceci se comprend de la manière suivante, nous comptons le nombre d'applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} &\to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \\ [x:y] &\mapsto [f_0(x,y) : f_1(x,y) : f_2(x,y)] \end{aligned}$$

où f_1, f_2, f_3 sont des polynômes homogènes de degré d c'est-à-dire qu'ils sont de la forme

$$a_0 x^d + a_1 x^{d-1} y + \cdots + a_d y^d.$$

Au final, nous avons donc $d+1$ degrés de liberté (i.e., les $a_0, \ldots, a_d$) pour chaque polynôme et donc au total $3(d+1)$ paramètres. Cependant, nous devons soustraire 1 à ce nombre car dans l'espace projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, nous pouvons multiplier toutes les coordonnées par un scalaire sans rien changer. De plus, comme nous nous intéressons à l'image de ces applications, nous pouvons reparamétrer la source de ces applications, c'est-à-dire les applications $f, g : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sont équivalentes s'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"', "\sim"] & \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Nous savons que les automorphismes de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sont les homographies (c'est le groupe $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$) et que ce groupe est de dimension 3.

Au final, nous obtenons le décompte du nombre de degrés de liberté qui est

$$3(d+1) - 1 - 3 = 3d - 1.$$

Ainsi, pour avoir un nombre fini de courbes de degré d, il faut fixer $3d-1$ conditions. Remarquez que depuis le début, nous n'avons compté que des courbes de genre 0. La même question en genre supérieur est beaucoup plus délicate.

Nous appelons $N(d)$ le nombre de courbes de genre 0 de degré d dans le plan projectif complexe, qui passent par $3d-1$ points généraux, ces nombres sont des exemples d'invariants de Gromov-Witten pour le plan projectif. Des résultats classiques nous donnent les premières valeurs de $N(1), N(2), N(3)$ et $N(4)$.

d	1	2	3	4	5	$\cdots$
N(d)	1	1	12	620	?	$\cdots$

Après le degré 5, nous ne savions rien jusqu'à ce que Kontsevich découvre la formule suivante à la suite des travaux de Witten et de Candelas-Ossa-Green-Park.

$$N(d) = \sum_{\substack{k,\ell \in \{1,\ldots,d-1\} \\ k+l=d}} N(k)N(\ell)k^2\ell \left(\ell \binom{3d-4}{3k-2} - k \binom{3d-4}{3k-1} \right) \tag{1.0.1}$$

La surprise de cette formule est que non seulement, elle permet de calculer tous les nombres $N(d)$ mais aussi qu'elle est récursive, et donc elle est déterminée seulement par $N(1) = 1$, c'est-à-dire le nombre de droites passant par 2 points distincts.

Premier pas vers une définition plus générale et plus rigoureuse. En première approximation, la définition des nombres $N(d)$ est correcte mais elle a quelques faiblesses.

(1) Dans $N(d)$, la courbe de départ est de genre 0 et nous voudrions généraliser au genre supérieur et nous voudrions également remplacer $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ par une variété lisse et projective X. Du coup, nous considérons des applications $f : C \to X$ de degré d fixé et C est une courbe de genre g.

(2) Au lieu de passer par des points, nous pourrions demander que la courbe, ou plutôt son image par f, passe par des sous-variétés fixées. Pour ce faire, nous considérons des courbes C avec des points marqués, notés $x_1, \dots, x_n$. Nous choisissons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des classes de cohomologie qui représentent via la dualité de Poincaré des sous-variétés en position générale dans X et nous demandons que pour chaque i dans $\{1, \dots, n\}$, $f(x_i)$ soit un point sur la sous-variété de classe α_i.

Au final, pour définir les invariants de Gromov-Witten qui seront des nombres rationnels, il nous faut une variété lisse et projective X, des entiers (g, n, d) et n classes de cohomologie de X notées $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Remarquons que pour le problème d'incidence soit bien posé, c'est-à-dire qu'on ait pas une infinité de possibilité ou trop de contraintes (cf. la discussion en (1)), il y a une condition entre ces données pour que les invariants soient finis et non nuls.

Le cas de $N(d)$ correspond à $X = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $g = 0$, $n = 3d - 1$, les classes α_i sont tous égales à la classe du point dans la cohomologie de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Remarquons que dans cet exemple, le degré d fixe aussi n, ceci est la condition entre ces données dont on vient de parler quelques lignes plus hauts.

Dans le paragraphe suivant, nous allons donner d'autres motivations qui viennent de la physique et aussi une définition plus rigoureuse de ces nombres.

2. Définition des invariants de Gromov-Witten

Avant de donner une définition plus précise de ces invariants en mathématique, rappelons les motivations provenant de la physique théorique et notamment de la théorie des cordes fondées par Edward Witten en 1995. Dans cette théorie, il y a deux nouvelles idées par rapport à la physique classique.

(1) L'espace temps $\mathbb{R}^4$ est remplacé par un espace $\mathbb{R}^4 \times X$ où X est une variété de "taille" tellement petite qu'on ne la verra jamais ($\sim 10^{-33}$ cm).
(2) Les particules ne sont pas ponctuelles mais des "petits" cercles qu'on appelle des cordes. Ainsi, quand une corde se déplace dans $\mathbb{R}^4 \times X$, elle dessine un cylindre et quand deux cordes se rencontrent, elles dessinent un pantalon. Au final ces pantalons peuvent se recoller et on obtient des surfaces réelles (cf Figure 2). Comme les trajectoires dans $\mathbb{R}^4$ sont décrites par la physique classique, le but est de comprendre ces trajectoires dans la variété X.

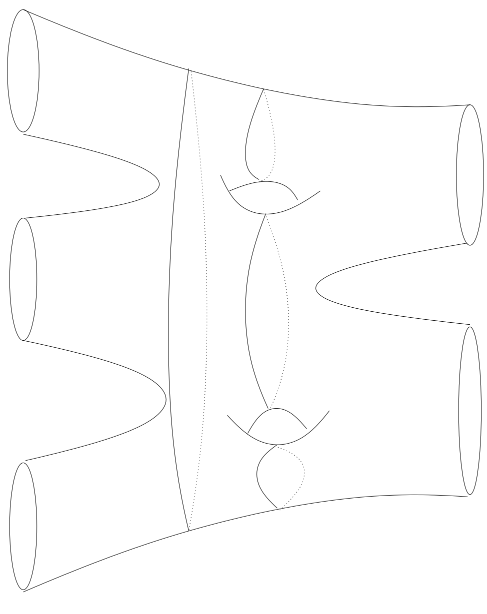

Figure 2. Ce dessin représente 3 cordes qui se rencontrent en une seule corde puis elles se reséparent en 3 cordes et elles finissent avec 2 cordes.

Le lien avec la partie de géométrie énumérative du paragraphe précédente se fait naturellement en imaginant ces trajectoires de cordes comme des applications d'une surface réelle dans X. Dans l'exemple précédent, la variété X était $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Cette idée a donné naissance aux invariants de Witten qui étaient définis seulement en physique des cordes. s En mathématique, Mikhaïl Gromov a défini des invariants en considérant des applications holomorphes d'une surface réelle dans une variété X. Cette idée a été développée avec des outils de géométrie symplectique. Au milieu des années 1990, en généralisant les idées mathématiques de Gromov et celles de Witten, plusieurs mathématiciens ont défini, de façon rigoureuse, ces nombres rationnels, appelé invariants de Gromov-Witten. Il y a deux approches : l'une avec la géométrie symplectique (Yongbin Ruan, Gang Tian, Jun Li, Kenji Fukaya, Kaoru Ono,...) et l'autre avec la géométrie algébrique (Maxim Kontsevich, Yuri Manin, Kai Behrend, Barbara Fantechi, William Fulton, Rahul Pandharipande,...).

Dans ces deux approches (symplectique ou algébrique), les mathématiciens construisent un espace appelé "espace de modules des applications stables" qui traduit la discussion de la fin du paragraphe 1.

Les points de cet espace sont les données $(C, x_1, \ldots, x_n, f)$ où $(C, x_1, \ldots, x_n)$ est une courbe complexe nodale (c'est-à-dire avec des singularités localement du type $xy = 0$ cf. la Figure 1) de genre g (vue comme surface réelle, c'est un tore avec g trous) avec $x_1, \ldots, x_n$ des points marqués distincts, et f est une application de $C \to \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ de degré d. Nous notons cet espace $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}, d)$. Le fait $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ soit compact et que nous ayons rajouté des singularités nodales implique que cet espace est compact (c'est pour cette raison qu'il y a une barre dans la notation $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}, d)$). La compacité de cet espace de module n'est pas évidente. En effet, quelle est la limite quand 2 points marqués se rencontrent ? La réponse de Gromov était très belle dans [M.85], il a expliqué qu'il fallait rajouter un $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Plus précisément, si x_1 et x_2 se rencontrent au point p de la courbe C alors la limite est la courbe C auquel on colle un $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ au point p de C et les points p, x_1 et x_2 sur le $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sont $\{0, 1, \infty\}$. Cette idée est connue sous le terme "d'ajout de bulles".

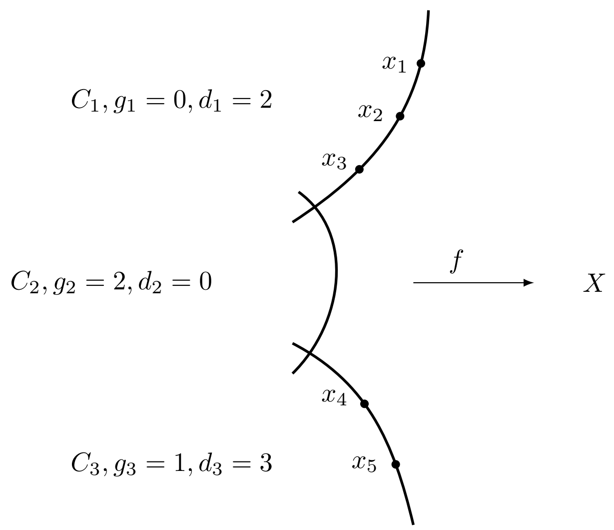

FIGURE 3. Exemple d'application stable de degré 5 et de genre 3.

À partir de cet espace, nous avons des applications d'évaluation. Plus précisément, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, nous définissons

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}, d) &\to \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}} \\ (C, x_1, \ldots, x_n, f) &\mapsto f(x_i). \end{aligned}$$

Si nous avons $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des classes de cohomologie sur $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$, nous pouvons les tirer en arrière sur l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}, d)$ via les applications ev_i puis les intégrer dessus. Au final, nous définissons les invariants de Gromov-Witten par l'intégrale

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{0,n,d} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}},d)]} \mathrm{ev}_1^* \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{ev}_n^* \alpha_n \in \mathbb{Q}. \tag{2.0.1}$$

(1) Ces invariants sont des nombres rationnels même si les α_i sont des classes à coefficient entiers car l'espace d'intégration n'est pas une variété, mais une orbifold c'est-à-dire localement le quotient d'un ouvert de $\mathbb{C}^k$ par un groupe fini.

(2) Remarquons que cette intégrale est nulle dès que la dimension de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}, d)$ n'est pas égale à la somme des degrés cohomologiques des α_i. Ceci modélise la question du nombre de conditions nécessaires pour que nous ayons un nombre fini et non nul de courbes vérifiant des conditions d'incidence (cf. la discussion intuitive au §1.(1)).

(3) Pour définir une telle intégrale, il faut que l'espace d'intégration soit compact et lisse. La compacité est vraie mais pas la lissité ce qui cause de sérieux soucis. Cependant, dans [BF97], Behrend-Fantechi ont expliqué comment définir proprement cette intégrale, c'est-à-dire sur quel cycle nous devons intégrer : cette classe est appelée la *classe fondamentale virtuelle*. Leur réponse repose sur la déformation au cône normal et la théorie de l'intersection à la Fulton. Remarquons que l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, d)$ est lisse en genre 0 et quand X est un espace projectif ou une grassmanienne. Dès que le genre est strictement positif, l'espace de modules n'est jamais lisse et donc le calcul fait intervenir cette classe virtuelle ; les calculs deviennent beaucoup plus compliqués.

Dans l'exemple de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, notons [pt] la classe du point qui est dans le $H_0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Ce groupe est isomorphe au $H^4(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ par dualité de Poincaré. La "vraie" définition de $N(d)$ correspond aux choix $g = 0, n = 3d - 1$ et $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{3d-1} = [\mathrm{pt}]$ et nous avons :

$$N(d) = \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,3d-1}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},d)]} \prod_{i=1}^{3d-1} \mathrm{ev}_i^*[\mathrm{pt}].$$

Si nous prenons cette égalité comme la définition de $N(d)$ alors la théorie de l'intersection nous dit que ce nombre $N(d)$ est bien égal à celui défini dans le §1. L'exemple $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est assez particulier car tous les invariants de genre 0 peuvent se déduire des invariants ci-dessus. Cependant les invariants de genre supérieur sont très délicats à calculer. Il faut utiliser des méthodes avancées qui seront décrites plus bas.

Quelles sont les propriétés d'invariance de ces nombres ? La réponse est qu'ils sont invariants par déformation lisse et propre. Plus précisément, considérons une famille de variétés paramétrées par une base B, par exemple $B = \mathbb{C}$ et la famille de variété est notée $(X_t)_{t\in\mathbb{C}}$. Les conditions de lissité et de propreté signifient que les variétés X_t sont lisses projectives avec des cohomologies isomorphes. Ainsi cette invariance par déformation lisse et propre se formule en disant que les invariants de Gromov-Witten de X_t, ne dépendent pas de t.

3. Comment calculer ces invariants de Gromov-Witten

Une fois que nous avons défini ces invariants, nous voulons les calculer. Il y a plusieurs techniques pour les calculer.

Faire une série génératrice, appelée potentien de Gromov-Witten. Pour se faire nous les mettons dans une série génératrice et nous cherchons des équations différentielles vérifiées par cette série génératrice.

Prenons l'exemple de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, rappelons que la cohomologie de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ à coefficients complexes est un espace vectoriel de dimension 3. Choisissons une base "naturelle" et notons la $([1], [H], [\mathrm{pt}])$ et des coordonnées t_0, t_1, t_2 associées à cette base. Ainsi, un point de cet espace vectoriel est de la forme $t_0[1] + t_1[H] + t_2[\mathrm{pt}]$ avec t_0, t_1, t_2 dans $\mathbb{C}$. Nous définissons alors une fonction, appelée potentiel de

Gromov-Witten, sur cette cohomologie :

$$\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(t_0,t_1,t_2)=\sum_{d\in\mathbb{N}}\sum_{n\geq 0}\sum_{\substack{k_0,k_1,k_2 \mid \\ k_0+k_1+k_2=n}}\frac{t_0^{k_0}t_1^{k_1}t_2^{k_2}}{k_0!k_1!k_1!}\langle\underbrace{[1],\dots,[1]}_{k_0},\underbrace{[H],\dots,[H]}_{k_1},\underbrace{[pt],\dots,[pt]}_{k_2}\rangle_{0,n,d}.$$

Comme les invariants vérifient certaines propriétés, que nous n'allons pas expliciter, cette série génératrice peut se réécrire plus simplement :

$$\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(t_0,t_1,t_2)=\frac{t_1^2t_0}{2}+\frac{t_0^2t_2}{2}+\sum_{d\in\mathbb{N}^*}N(d)e^{dt_1}\frac{t_2^{3d-1}}{(3d-1)!}. \tag{3.0.1}$$

Cette fonction satisfait l'équation différentielle appelée équation WDVV (pour Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde)

$$\partial_{t_2}\partial_{t_2}\partial_{t_2}\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}+(\partial_{t_1}\partial_{t_1}\partial_{t_1}\mathcal{F}_0).\left(\partial_{t_1}\partial_{t_2}\partial_{t_2}\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}\right)=\left(\partial_{t_1}\partial_{t_2}\partial_{t_2}\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}\right)^2.$$

Remarquons que la formule spectaculaire (1.0.1) a été trouvée simplement en identifiant les termes devant $e^{dt_1}t_2^{3d-1}$ dans l'équation ci-dessus. Même si cette technique fonctionne très bien en genre 0, elle a ses limites notamment pour calculer ces invariants de genre supérieur.

Utiliser une déformation plate pour dégénérer X en morceaux plus simples. Comme ces nombres sont invariants par déformation lisse, il est naturel de se poser la question sur une déformation un peu plus générale par exemple une déformation plate. Cette dernière est une généralisation de la situation suivante: la famille d'hyperboles $xy=t$ pour $t\in\mathbb{C}^*$ dégénère quand $t=0$ en l'union de 2 droites $xy=0$. Ainsi, nous essayons de déformer X en une variété singulière Y avec 2 morceaux Y_1 et Y_2 qui se recollent le long d'une hypersurface, c'est-à-dire $Y=Y_1\cup Y_2$. En théorie, nous imaginons que Y_1 et Y_2 sont plus simples c'est-à-dire que nous arrivons à calculer leurs invariants de Gromov-Witten. Remarquons que la variété Y n'est plus lisse et donc la théorie générale de Gromov-Witten ne s'applique plus. Cependant, dans [Li02], Jun Li a démontré que sous certaines hypothèses, on peut retrouver les invariants de Gromov-Witten de X en connaissant ceux de Y_1 et Y_2. Nous obtenons une formule qui s'appelle la formule de dégénérescence.

Faire une récurrence en recollant les courbes. Supposons que nous avons deux applications stables $(C_1,x_1,\dots,x_4,f_1)$ et $(C_2,y_1,\dots,y_3,f_2)$ telles que $f_1(x_1)=f_2(y_3)$ (cf. Figure 4). Nous pouvons les recoller en identifiant les points marqués (par exemple ici x_1 et y_3) et nous obtenons une application stable, notée $f_1\cup f_2$ de degré d_1+d_2 d'une courbe de genre g_1+g_2 vers $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Du coup, nous pouvons

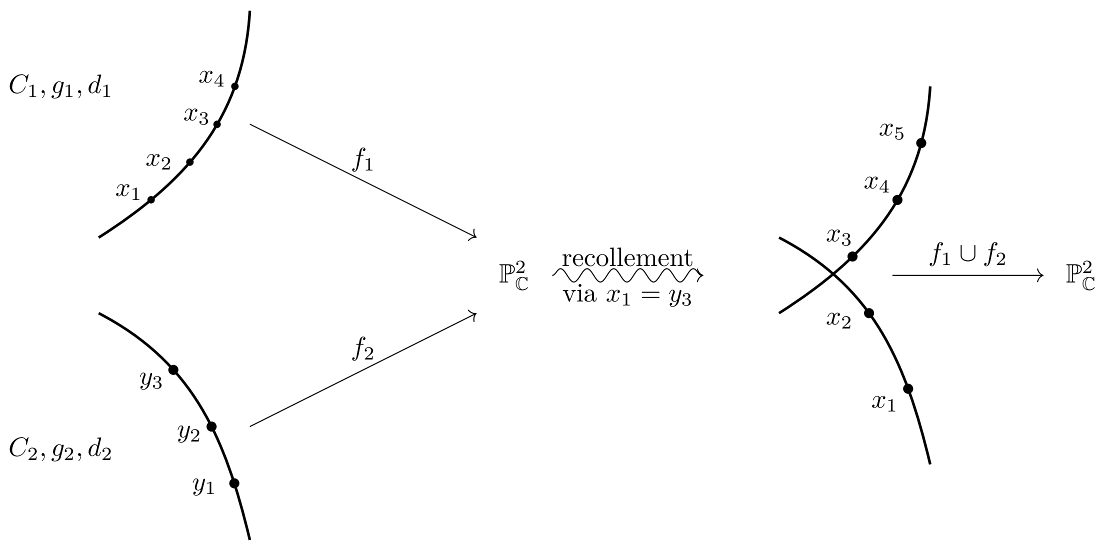

FIGURE 4. On peut recoller les applications stables ci-dessus car $f_1(x_1)=f_2(y_3)$.

espérer calculer les invariants en genre supérieur en cassant les courbes en morceaux de genre et de degré plus petit. Nous obtenons alors une récurrence sur le degré et le genre. Cette idée forte a donné beaucoup d'algorithmes : la récursion topologique de Chekhov-Eynard-Orantin (voir [CEO06]) et la théorie cohomologique des champs.

Utiliser une formule de localisation. Supposons que nous ayons un groupe G qui agisse sur X (par exemple si X est une variété torique et $G = (\mathbb{C}^*)^n$). Alors nous pouvons faire agir le groupe sur l'espace de modules et l'intégrale (2.0.1) se calcule via les points fixes de cette action sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,d)$ (cf. Graber-Pandharipande [GP99]).

4. Autres domaines en lien avec les invariants de Gromov-Witten

À part calculer les invariants de Gromov-Witten, il y a aussi beaucoup de liens entre ces nombres et d'autres domaines des mathématiques. Ces relations viennent pour la plupart des idées de physique des cordes.

Symétrie miroir. La symétrie miroir en mathématique a des formulations très variées. Un des exemples surprenants est qu'à partir de la théorie des singularités du polynôme de Laurent $x+y+(xy)^{-1}$, nous pouvons calculer les invariants de Gromov-Witten de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Conjecture de Witten. La conjecture de Witten, que Kontsevich a démontrée dans [Kon92], établie que le potentiel de Gromov-Witten du point (c'est-à-dire où nous avons remplacé $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ par un point dans (3.0.1)) est la fonction tau de la hiérarchie KdV (Korteweg–de Vries). Une hiérarchie est une suite infinie d'équations aux dérivées partielles dont les flots commutent deux à deux et la fonction tau d'une hiérachie encode d'une certaine façon les solutions à ces équations. Ce résultat est très spectaculaire car, il relie les invariants de Gromov-Witten du point à des constantes qui apparaissent dans une solution du système intégrable historique KdV.

Le lecteur attentif remarquera que la géométrie énumérative du point doit être assez facile. C'est effectivement le cas mais ici Witten rajoute des choses. En effet, il n'y a qu'une seule application de $C \to \mathrm{pt}$, du coup l'espace de modules est simplement donnée par la courbe C de genre g avec n points marqués, noté $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Sur cet espace, il y a des fibrés en droite naturels, notés $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$, qui sont les espaces cotangents à la courbe aux points marqués. Ces fibrés donnent naissance à des classes de cohomologie, notées $\psi_1, \dots, \psi_n$, sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Nous obtenons des nombres rationnels en intégrant les puissances de ces premières classes de Chern sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ c'est-à-dire

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{k_1} \cup \cdots \cup \psi_n^{k_n}.$$

Dans ce cas, il n'y a plus d'interprétation énumérative évidente mais nous avons une structure plus riche.

Correspondance Landau-Ginzburg vs Calabi-Yau. Cette correspondance, imaginée par Witten, prédit une relation entre les invariants de Gromov-Witten d'une variété de Calabi-Yau et des invariants de Fan-Jarvis-Ruan-Witten d'un polynôme. Dans [CR10], Alessandro Chiodo et Yongbin Ruan ont démontré cette correspondance dans le cas suivant. D'un coté, nous prenons les invariants de Gromov-Witten d'une quintique dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ donnée par les zéros d'un polynôme homogène de degré 5 : par exemple $W = x_0^5 + \cdots + x_4^5$ où $[x_0 : \cdots : x_4]$ sont les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$. Nous obtenons alors une série génératrice associé à ces invariants de Gromov-Witten.

D'un autre coté, nous calculons des invariants qui comptent le nombre de courbes (orbifold) complexes munies de fibrés en droites, qui vérifient certaines conditions. Ces invariants sont appelés, les invariants de Fan-Jarvis-Ruan-Witten et nous construisons une autre série génératrice avec ces invariants.

Cette correspondance prédit que les deux séries génératrices construites à partir de ces deux familles d'invariants sont égales après un changement de variable bien choisi.

Théorie cohomologique des champs. Une théorie cohomologique de champs est la donnée d'un espace vectoriel de dimension finie, noté V, et d'une famille $\varphi = (\varphi_{g,n})$ d'applications

$$\varphi_{g,n} : V \otimes \cdots \otimes V \to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$$

qui vérifient certaines conditions, notamment des conditions de recollements sur les courbes.

Par exemple, la théorie de Gromov-witten produit pour chaque variété lisse et projective X une théorie cohomologique de champs, notée φ^X avec $V = H^*(X)$. En particulier, la théorie de Gromov-Witten (avec les classes ψ cf. conjecture de Witten) où X est un point produit un exemple particulièrement simple mais important (voir plus bas).

Une questions naturelle est de savoir si étant donner deux variétés projectives lisses X_1 et X_2, pouvons-nous relier les théories cohomologiques des champs φ^{X_1} avec φ^{X_2} ? Dans [Giv01], Alexander Givental a prédit une telle relation dans certains cas et Constantin Teleman l'a démontrée dans [Tel12].

Plus précisément, Givental a trouvé un groupe, noté G, qui agit sur les théories cohomologiques des champs, c'est-à-dire pour tout $h \in G$, et pour toute théorie cohomologique des champs φ, on peut construire une autre théorie cohomologique des champs notée $h\varphi$. Le résultat spectaculaire de Givental-Teleman est que si la théorie cohomologique des champs φ est "semi-simple" avec un espace vectoriel de dimension r (par exemple celle provenant de la théorie de Gromov-Witten de $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$) alors nous pouvons trouver un élément dans le groupe de Givental qui envoie la théorie cohomologique des champs de r points sur φ.

Cette construction est complexe mais assez explicite pour pouvoir faire des calculs en particulier, ceci permet de calculer les invariants de Gromov-Witten de $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$ en genre supérieur.

Gromov-Witten via la géométrie algébrique dérivée. La géométrie algébrique dérivée développée par Bertrand Toën et Gabriele Vezzosi est une extension de la géométrie algébrique qui permet de traiter géométriquement les foncteurs dérivés. Une très belle application de ce cadre est une construction beaucoup plus naturelle de la classe fondamentale virtuelle à la Behrend-Fantechi. Plus précisément, l'espace de modules des applications stables a naturellement une structure supplémentaire ([STV15]) et la classe fondamentale virtuelle proviendrait du faisceau structural de cette structure additionnelle.

References

[BF97] K. Behrend and B. Fantechi. The intrinsic normal cone. *Invent. Math.*, 128(1):45–88, 1997.

[CEO06] Leonid Chekhov, Bertrand Eynard, and Nicolas Orantin. Free energy topological expansion for the 2-matrix model. *J. High Energy Phys.*, (12):053, 31, 2006.

[CR10] Alessandro Chiodo and Yongbin Ruan. Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence for quintic three-folds via symplectic transformations. *Invent. Math.*, 182(1):117–165, 2010.

[Giv01] Alexander B. Givental. Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic Hamiltonians. volume 1, pages 551–568, 645. 2001. Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100th anniversary.

[GP99] T. Graber and R. Pandharipande. Localization of virtual classes. *Invent. Math.*, 135(2):487–518, 1999.

[Kon92] Maxim Kontsevich. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. *Comm. Math. Phys.*, 147(1):1–23, 1992.

[Li02] Jun Li. A degeneration formula of GW-invariants. *J. Differential Geom.*, 60(2):199–293, 2002.

[M.85] Gromov M. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82(2):307–347, 1985.

[STV15] Timo Schürg, Bertrand Toën, and Gabriele Vezzosi. Derived algebraic geometry, determinants of perfect complexes, and applications to obstruction theories for maps and complexes. *J. Reine Angew. Math.*, 702:1–40, 2015.

[Tel12] Constantin Teleman. The structure of 2D semi-simple field theories. *Invent. Math.*, 188(3):525–588, 2012.

Étienne Mann, Université d'Angers, Département de mathématiques, LAREMA UMR 6093, Bâtiment I Faculté des Sciences 2 Boulevard Lavoisier F-49045 Angers cedex 01 France

E-mail address: `etienne.mann@univ-angers.fr`