

LISTES DE DÉVELOPPEMENTS POSSIBLES EN ANALYSE POUR L'AGRÉGATION

ÉTIENNE MANN

SOMMAIRE

1. Inversion de Fourier	2
2. Théorème de Banach-Steinhaus	3
3. Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$	4
4. Les Cantor	4
5. L^p est complet pour p entre 1 et $+\infty$	5
6. Théorème de Liapounov	5
7. Théorème de Müntz et déterminant de Gram	6
8. Théorème des fonctions implicites et d'inversion locale	7
9. Point de Fermat	7
10. Théorèmes de Stampacchia et de Lax-Milgram	8
11. Lemme de Milnor, lemme de non rétraction, théorème de Brouwer et théorème de la sphère chevelue	9
12. Condition de jauge pour une boule unité	11
13. Projection sur un convexe fermé dans un Hilbert	13
14. Point fixe attractif, répulsif ou superattractif et un exemple	14
15. Quelques résultats sur la fonction Γ	15
16. Deux équations, deux inconnues	18
17. Théorème de Stone-Weierstrass	18
18. Théorème d'Ascoli (version compacte) et $H(\Omega)$ n'est pas normable	19
19. Théorème de Sharkovski	22
20. Méthode de Laplace	24
21. Théorème de Borel	25
22. Exemple d'une fonction continue nulle part dérivable	25
23. Densité des fonctions nulle part dérivables	26
24. Théorème de Bernstein	26
25. Théorème de Hanh-Banach version analytique	27
26. Méthode numérique de résolution d'équation différentielle	27
27. Théorème de Riesz	30
28. Les différentes définitions des sous-variétés	31
29. Etude de $y' = y^2 - x$	33
30. Théorème d'Abel et théorème de Tauber faible	34

Date: Septembre 2000.

1. INVERSION DE FOURIER

Cf : Rudin Analyse réelle et complexe 3^{ième} édition, p.221 et sq.

On note $C_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions qui tendent vers 0 en l'infini.

Théorème 1 (Inversion de Fourier). *Si f et $\widehat{f}$ sont dans L^1 et si*

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{ixt} dt$$

alors $g \in C_0(\mathbb{R})$ et $g = f$ presque partout.

Remarques sur la preuve :

- (1) Dans la preuve de 9.10, on utilise plutôt Hölder que Jensen.
- (2) Pour la fin de 9.10 (les trois dernières lignes), démontrer directement 9.10 en adaptant la démonstration de 9.5. Je vais être un peu plus précis : (je reprends les notations de Rudin)

Lemme 1. *Soit g une fonction continue en 0, bornée sur $\mathbb{R}$ alors*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} g(y) h_{\lambda}(y) dy = g(0).$$

Preuve : Un calcul direct montre que pour tout $\eta > 0$ on a :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \eta} h_{\lambda}(x) dx = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme g est continue en 0 il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x| \leq \eta$ on a $|g(x) - g(0)| \leq \varepsilon$. On a donc les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} h_{\lambda}(y) g(y) dy - g(0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} g(y) - g(0) h_{\lambda}(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{|x| \geq \eta} (g(y) - g(0)) h_{\lambda}(y) dy + \int_{|x| \leq \eta} (g(y) - g(0)) h_{\lambda}(y) dy \right| \\ &\leq 2 \sup_{y \in \mathbb{R}} |g(y)| \int_{|x| \geq \eta} h_{\lambda}(y) dy + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Ainsi quand λ tend vers 0 on a le résultat.

Puis pour démontrer la fin de 9.10 (les fameuses trois dernières lignes) on va poser $g(y) = \|f_y - f\|_p^p$ qui est bornée par $2\|f\|_p^p$.

On va montrer que g est continue en 0 puis le lemme nous donnera la conclusion de 9.10.

On sait que $C_c(\mathbb{R})$ est dense dans L^p , soit $k \in C_c(\mathbb{R})$ telle que $\|k - f\| < \varepsilon$, on a $k_y(x) = k(x - y)$ et $\|k_y - f_y\|_p < \varepsilon$

de plus $\|k_y - k\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |k(x-y) - k(x)|^p dx$. Or $\lim_{y \rightarrow 0} \|k_y - k\|_p^p = 0$ car k est continue. D'où

$$\begin{aligned} \|f_y - f\|_p &\leq \|f_y - k_y\|_p + \|k_y - k\|_p + \|k - f\|_p \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui montre la continuité de g en 0.

- (3) Lire aussi le poly de Faraut p.120 (attention ce poly n'est pas autorisé aux oraux)¹.

Remarque : Faire aussi le lien avec les approximations de l'unité pour le produit de convolution : pourquoi l'unité n'existe pas (cf Schwarz T4) ? ... Bref une petite révision du produit de convolution. A ce propos, pour f et g dans $L^1(\mathbb{R})$ on a $f * g$ dans $L^1(\mathbb{R})$, mais ceci n'est pas si simple car on utilise le théorème de Fubini et ce n'est pas si clair que $f(x-y)g(y)$ est mesurable par rapport à $\mathbb{R}^2$ (Cf Rudin p.208 et p.12).

2. THÉORÈME DE BANACH-STEINHAUS

Cf : Gourdon analyse p.398-399.

Théorème 2 (Théorème de Banach-Steinhaus). *Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. On note $L_c(E, F)$, l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F muni de la norme usuelle. Soit H une partie de $L_c(E, F)$ alors on a :*

- ou bien $(\|f\|)_{f \in H}$ est borné,
- ou bien $\sup \|f(x)\|_F = +\infty$.

Remarques :

- (1) Dans Gourdon, il pose $\Omega_k = \{x \in E \mid \sup_{f \in H} \|f(x)\| > k\}$ et il affirme que Ω_k est ouvert or cela mérite, à mon humble avis, une justification (cf Madère *Développements d'analyse*).
- (2) Revoir les espaces de Baire dans Gourdon.

Applications :

- (1) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de E dans F qui converge simplement vers une fonction f de E vers F . Alors f est une application linéaire continue.
- (2) Il existe des fonctions continues et 2π -périodiques différentes de leur série de Fourier.

Remarques :

- (1) Pour l'application 2, Gourdon explicite une telle fonction (p.262 exo 4). J'ai entendu qu'il y avait un problème dans cette démonstration alors il faut faire attention.

¹Pourrait paraître un jour chez Espaces34/Belin.

- (2) Il faut aussi savoir pourquoi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est semi-convergente et connaître un moyen de calculer sa somme.

3. SOUS-GROUPES DE $(\mathbb{R}, +)$

Cf : Gourdon, analyse p.199

Théorème 3. Soient G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et $G \neq \{0\}$. Alors G vérifie une des deux assertions suivantes :

$$\begin{cases} (i) \exists m > 0 \text{ tel que } G = m \cdot \mathbb{Z}, \\ (ii) G \text{ est dense dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Remarque : C'est peut-être un peu trop facile et trop classique mais parfois à l'oral on est bien content d'avoir un développement comme ça sous la main!

Une petite variante : Soit P une partie de $\mathbb{R}$ stable par addition qui contient au moins un nombre strictement positif et un nombre strictement négatif. Alors on a :

$$\begin{cases} (i) \exists m > 0 \text{ tel que } P = m \cdot \mathbb{Z}, \\ (ii) P \text{ est dense dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Remarque : Je n'ai pas de référence pour cette variante mais la démonstration est la même que pour le théorème 3.

Applications :

- (1) Soient a et b deux nombres réels non nuls. On a l'équivalence suivante :

$$a \cdot \mathbb{Z} + b \cdot \mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}.$$

- (2) Soient a et b deux réels strictement positifs. On a l'équivalence suivante :

$$a \cdot \mathbb{N} - b \cdot \mathbb{N} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}.$$

- (3) En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sin(n)$ est l'intervalle $[-1, 1]$.

4. LES CANTOR

Cf : Chambert-Loir, Analyse tome 1 et Gourdon, Analyse p.63.

Théorème 4. L'ensemble triadique de Cantor, noté K_3 , est :

- (i) de mesure nulle,
- (ii) compact,
- (iii) d'intérieur vide,
- (iv) égal à $\{x \in [0, 1] \text{ tels que } x = \sum_{i \geq 1} a_i 3^{-i} \text{ avec } a_i \in \{0, 2\}\}$,
- (v) sans point isolé,

(vi) *totalelement discontinu.*

Remarques :

- (1) Chambert-Loir n'est jamais clair² et il y a toujours des erreurs, donc faire très attention.
- (2) Attention $\frac{1}{3}$ est dans K_3 donc (iv) serait faux, mais si on prend l'autre écriture décimale i.e. $1 = 0.999\dots$ c'est bon tout est cohérent.
- (3) Il existe aussi des Cantors de mesure non nulle (on les appelle les Cantors gras) ayant les mêmes propriétés (cf Faraut). On peut construire des Cantor gras de mesure arbitraire dans $[0, 1[$.
- (4) Connaître aussi l'escalier de Cantor... (cf Hauchecorne)

5. L^p EST COMPLET POUR p ENTRE 1 ET $+\infty$

Cf : Rudin Analyse réelle et complexe 3^{ième} édition p.83.

Théorème 5. L^p est complet pour p entre 1 et $+\infty$.

Remarques :

- (1) Ce résultat découle en partie du lemme de Fatou sauf pour $p = +\infty$.
- (2) Par contre, la démonstration nous donne un résultat important qui est utile notamment dans l'inversion de Fourier.

Ce résultat est le suivant :

Corollaire 1. Soit p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$ et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans L^p possédant une limite f . Il existe une sous suite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge ponctuellement presque partout vers f .

6. THÉORÈME DE LIAPOUNOV

Cf : Rouvière Petit guide du calcul différentiel p.130

Théorème 6 (Théorème de Liapounov). Soit le système différentiel $y' = f(y)$, $y(0) = x$ où f est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f(0) = 0$. Si la matrice $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de parties réelles strictement négatives, l'origine est un point d'équilibre attractif.

Remarques :

- (1) En fait l'origine est asymptotiquement stable (ceci n'est pas précisé dans Rouvière).
- (2) Très bon développement.
- (3) Comprendre d'où sortent les majorations du début (ça vient de l'algèbre linéaire).
- (4) Avoir une petite idée sur les fonctions de Liapounov.

²ou plutôt : n'est pas toujours très clair...

7. THÉORÈME DE MÜNTZ ET DÉTERMINANT DE GRAM

Cf : Gourdon Algèbre p.259.

Soient E un espace préhilbertien réel et $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs de E . On note $G(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de la matrice $[\langle x_i, x_j \rangle]_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$

Théorème 7 (Déterminant de Gram). *Soient E un espace préhilbertien réel, V un sous-espace vectoriel de E muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit x dans E , alors la distance d de V à x vérifie :*

$$d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

Remarques :

- (1) Quand a-t-on $V \oplus V^\perp = E$?
- (2) Pourquoi la distance de $x \in E$ à un sous-espace V de E vaut $\|x - p(x)\|$ où p est la projection orthogonale sur V ?
- (3) Faire la comparaison entre la dimension finie et la dimension infinie sur des problèmes de projections orthogonales, de plus petite distance à une partie, de fermeture des sous-espaces,...

Application : Dans Gourdon algèbre p.262 il y a un exemple de calcul d'une intégrale avec le déterminant de Cauchy et le déterminant de Gram.

Proposition 1 (Gourdon algèbre p.144). *Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ soient a_i et b_i appartenant à $\mathbb{R}$ tels que $a_i + b_i$ soient non nuls pour $i \in \{1, \dots, n\}$ alors on a :*

$$\det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}.$$

Théorème 8 (Théorèmes de Müntz (Gourdon Analyse p.286)). (1) *On appelle E_n l'espace $\langle x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n} \rangle$ et $E = \langle x^{\alpha_i} \rangle_{i \in \mathbb{N}}$. Alors E est dense dans $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ si et seulement si la série*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\alpha_n} \text{ diverge.}$$

- (2) *Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de termes positifs et avec $\alpha_0 = 0$ et telle que la limite des α_n soit strictement supérieure à 1. Alors E est dense dans $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ si et seulement si la série*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\alpha_n} \text{ diverge.}$$

Remarques :

- (1) Noter que la norme infinie est la norme “naturelle” de l’ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ car cet espace est complet pour cette norme.
- (2) Remarquer l’endroit où on utilise $\alpha_0 = 0$: c’est pour ajuster la constante pour la primitive h de g (comme $\alpha_0 = 0$ on a les constantes dans E).

8. THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES ET D’INVERSION LOCALE

Cf : Laudenbach p.62 et p.66.

Remarques :

- (1) C’est des théorèmes FONDAMENTAUX.
- (2) Bien les maîtriser c’est essentiel, voir des applications dans Rouvière.
- (3) Comprendre leurs interprétations géométriques et faire le lien avec la méthode de Newton.

9. POINT DE FERMAT

Cf : Rouvière p.358.

Proposition 2 (Point de Fermat). *Soit ABC un triangle dont tous les angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$, on cherche le minimum de la fonction définie par :*

$$f(M) = MA + MB + MC.$$

Le point cherché est le point P tel que

$$\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}.$$

Remarques :

- (1) Comme la fonction qui à M associe MA n’est pas différentiable en A , on différentie f sur $\mathbb{R}^2 - \{A, B, C\}$ puis on regarde ce qui se passe pour M proche de A , B et C .
- (2) Si on construit trois triangles équilatéraux en utilisant les côtés de ABC alors P est l’intersection des cercles circonscrits aux triangles équilatéraux ; mais c’est aussi l’intersection des droites AA' , BB' et CC' (avec des notations évidentes).
- (3) Que se passe-t-il si l’angle en A est supérieur à $\frac{2\pi}{3}$?

Dans la démonstration, on sait que la fonction f admet un minimum dans le plan (par la compacité) : soit P ce minimum. Le calcul différentiel nous dit que les angles $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$ et $\widehat{CPA}$ mesurent $\frac{2\pi}{3}$, ainsi P est l’intersection d’arcs capables. Or si l’angle en A est supérieur à $\frac{2\pi}{3}$, il n’y a pas d’intersection et donc pour tout point M du plan $df(M) \neq 0$ ainsi f atteint son minimum en A , B ou C .

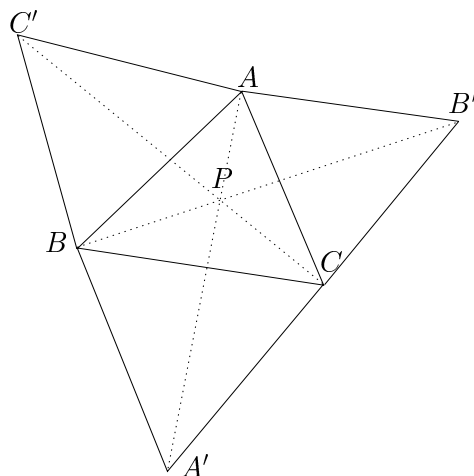


FIGURE 1. Point de Fermat

Attention, j'ai tendance à dire : “ $df(M) \neq 0$ donc pas de minimum”, pas vous ? ... Tant mieux!

10. THÉORÈMES DE STAMPACCHIA ET DE LAX-MILGRAM

Cf : Brézis p.83

Ici H désigne un espace de Hilbert.

Théorème 9 (Théorème de Stampacchia). *Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive définie sur H^2 et soit K un convexe fermé non vide. Soit $\Phi \in H'$ alors il existe un unique vecteur u dans K tel que pour tout v dans K on a : $a(u, v - u) \geq \Phi(v - u)$.*

De plus, si $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors u est caractérisé par :

$$\begin{cases} u \in K \\ \frac{1}{2}a(u, u) - \Phi(u) = \min_{v \in K} \left(\frac{1}{2}a(v, v) - \Phi(v) \right) \end{cases}$$

Remarque : C'est une application du théorème de point fixe de Picard (comme l'inversion locale et Cauchy-Lipshitz).

Corollaire 2 (Lax-Milgram Brézis p.84). *Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive définie sur H^2 alors pour tout $\Phi \in H'$ tel que pour tout $v \in H$*

$$a(u, v) = \Phi(v)$$

De plus si $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique alors u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in H \\ \frac{1}{2}a(u, u) - \Phi(u) = \min_{v \in K} \left(\frac{1}{2}a(v, v) - \Phi(v) \right). \end{cases}$$

Remarque : Il faut absolument savoir à quoi servent ces théorèmes, lire au moins Brézis p.119 pour les idées.

11. LEMME DE MILNOR, LEMME DE NON RÉTRACTION, THÉORÈME DE BROUWER ET THÉORÈME DE LA SPHÈRE CHEVELUE

Cf : Leborgne p.36 pour l'essentiel, Chambert-Loir Analyse 3 p.178 et Gonnord p.64.

Lemme 2 (Lemme de Milnor). *Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$, U un voisinage de A et v un champ de vecteurs C^∞ sur U i.e. $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit

$$\begin{aligned} v_t : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x + tv(x) \end{aligned}$$

Alors pour tout voisinage V ouvert de A , où $\overline{V}$ inclus dans U , relativement compact il existe $t_0 > 0$ tel que v_t restreint à V soit un C^∞ difféomorphisme de V sur $v_t(V)$ et $\text{vol}(v_t(A))$ un polynôme en t .

Un petit bout de preuve : Dans la démonstration, on montre le théorème des accroissements finis sur un compact pour avoir la condition de Lipschitz suivante :

il existe $C > 0$ tel que pour tout $x, y \in \overline{V}$ on a : $\|v(x) - v(y)\| \leq C\|x - y\|$

En effet, recouvrons $\overline{V}$ par un nombre fini de boules $B_1, \dots, B_p$ incluses dans U . On peut choisir les boules telles que les $\overline{B_i}$ soient incluses dans U en prenant des boules de rayons $\frac{a}{2}$ où $a = d(\overline{V}, U^c) > 0$ (car $\overline{V}$ est compact et U^c est fermé).

Comme les $\overline{B_i}$ sont compactes et v est C^1 alors pour tout $x \in B_i$ il existe $k_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|dv(x)\| \leq k_i = \sup_{x \in \overline{B_i}} \|dv(x)\|.$$

Puis on utilise l'inégalité "classique" des accroissements finis (car v est C^1 et B_i est convexe), v est donc lipschitzienne sur B_i .

Soit $K = \max_{i \in \{1, \dots, p\}} (k_i)$. Pour tous $x, y \in B_i$ on a $\|v(x) - v(y)\| \leq K \cdot \|x - y\|$.

Puis sur

$$\overline{V} \times \overline{V} - \bigcup_{i=1}^p (B_i \times B_i)$$

qui est compact (fermé dans un compact), $\|x - y\|$ est minorée par $\delta > 0$ (la distance est continue sur un compact donc elle atteint son minimum). On peut alors définir la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \overline{V} \times \overline{V} - \bigcup_{i=1}^p (B_i \times B_i) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{\|v(x) - v(y)\|}{\|x - y\|}. \end{aligned}$$

Cette fonction est continue sur un compact donc elle est minorée par K' . Si on pose $C = \max(K, K')$ alors on a la condition cherchée.

Théorème 10 (lemme de non rétraction). *Soit S^{n-1} la sphère euclidienne de $\mathbb{R}^n$, il n'existe pas d'application C^∞*

$$f : B_f^n \longrightarrow S^{n-1}$$

laissant chaque point de S^{n-1} fixe.

Remarques sur la preuve :

- (1) Dire qu'une fonction est C^∞ sur un fermé, c'est dire, par définition, qu'elle est C^∞ sur un ouvert qui contient ce fermé.
- (2) Pour montrer que $v_t(\text{int}(B^n)) = \text{int}(B^n)$ voir Gonnord p.64 (on utilise la définition de la connexité).

Corollaire 3 (Théorème de Brouwer version C^∞). *Soit $f : B^n \rightarrow B^n$ une application C^∞ . Alors f admet un point fixe dans B^n .*

Remarques :

- (1) Dans Leborgne, il donne ensuite une version où f est simplement supposée continue, ce qui utilise forcément le théorème de Weierstrass (de même pour le lemme de non rétraction).
- (2) C'est standard, de passer par le lemme de non rétraction pour démontrer Brouwer car en fait ces énoncés sont équivalents.
- (3) Le théorème reste vrai si on suppose au lieu d'une boule fermée un compact convexe d'intérieur non vide : ce dernier est homéomorphe à la boule unité.
- (4) Au siècle dernier, on s'est demandé si l'orbite de la terre était stable. On a fait des observations et on s'est aperçu que son orbite varie et qu'elle n'est pas réellement périodique. Les scientifiques se penchèrent sur la question et Poincaré eut l'idée de modéliser le problème en fixant un plan orthogonal au plan de l'orbite terrestre et de noter l'endroit où la terre traverse ce plan. Ainsi on est ramené à un problème plan et on a une fonction du plan dans lui-même qui est continue (c'est les équations physiques qui nous le donnent). On remarque que les lieux où la terre traverse ce plan est dans un disque ; on applique Brouwer et donc il existe une orbite stable proche de celle où se trouve l'orbite terrestre. Ceci ne répond pas complètement à la question mais quand même ça rassure : c'est typiquement une réponse d'agrégatif ...

Application : Champ rentrant dans la sphère (Chambert-Loir analyse 3 p.77). Soit v un champ de vecteurs continu dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une application continue $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Supposons v rentrant dans la sphère unité, c'est-à-dire que pour tout $x \in S^{n-1}$, on a $\langle x, V(x) \rangle < 0$

Alors v s'annule en un point de B^n .

Remarque : Je trouve que la démonstration de l'application n'est pas terrible et plutôt bourrine mais bon...

Théorème 11 (Théorème C^∞ de la sphère chevelue (Leborgne p.40)). *Soit f une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout x dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$, $\langle f(x), x \rangle = 0$. Alors si n est impair, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution.*

Remarques :

- (1) Dans la preuve on a l'implication suivante : comme $v_t(A) = A\sqrt{1+t^2}$, alors $\text{vol}(v_t(A)) = \text{vol}(A)(\sqrt{1+t^2})^n$. En effet on passe d'un volume à l'autre par une homothétie.
- (2) On a aussi la version où f est supposée continue.

Corollaire 4 (La "vraie" shère chevelue). *Il n'existe pas de fonction continue de $S^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ telle que pour tout $x \in S^{2k}$ $\langle f(x), x \rangle = 0$ et $f(x) \neq 0$.*

Remarques :

- (1) Ce théorème dit simplement que tout champ de vecteurs continu tangent à la sphère de dimension paire doit s'annuler, c'es-à-dire qu'on ne peut pas coiffer une sphère dans $\mathbb{R}^{2k+1}$ sans avoir un épi.
- (2) Si la dimensoin de la sphère est impaire, il y un contre exemple dans Gonnord p.62. Sinon, c'est clair en dimension 1 (cf la figure 2) et pour le cas général (avec la même idée) on considère $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ et le champ de vecteurs qui à x dans S^{2n-1} associe ix . On a bien ix orthogonal à x : en effet multiplier par i revient à faire une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou, pour ceux qui préfèrent, dans $\mathbb{C}^n$ on a un produit hermitien ($\langle z, t \rangle = z_1 \bar{t}_1 + \dots + z_n \bar{t}_n$) et donc un produit scalaire qui est la partie réelle du produit hermitien. On a bien $\text{Ré}(\langle ix, \bar{x} \rangle) = \text{Ré}(i\|x\|^2) = 0$.

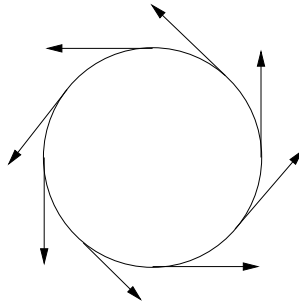


FIGURE 2. Champ de vecteurs sur le cercle

12. CONDITION DE JAUGE POUR UNE BOULE UNITÉ

Cf : Rouvière p.8 et p.15

Lemme 3 (Rouvière p.8). *Soit E un espace vectoriel normé pas forcément de dimension finie. Dans la définition d'une norme on peut remplacer l'inégalité triangulaire par :*

$$\{x \in E, \|x\| \leq 1\} \text{ est un convexe.}$$

Théorème 12 (Rouvière p.15). *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une partie K est convexe, compacte, symétrique par rapport à 0 et voisinage de 0 si et seulement si K est la boule unité fermée pour une norme.*

Remarques :

- (1) Les deux démonstrations sont simples.
- (2) La deuxième fait intervenir la jauge d'un convexe ce qui est une notion importante. En effet la jauge d'un convexe est une semi-norme et ceci permet de passer de la version analytique du théorème de Hahn-Banach à la version géométrique (cf Brézis).
- (3) Si on prend un disque centré en 0 dans $\mathbb{R}^2$ alors sa jauge est la norme euclidienne, si on prend un carré c'est la norme infinie ou la norme 1 (selon la position du carré).

Application : Soit H un "vrai" hexagone symétrique par rapport à 0 et d'intérieur non vide alors il existe un plan P dans $\mathbb{R}^3$ et un cube C centré en 0 tels que $C \cap P$ soit le bord de l'hexagone H .

Preuve : Elle n'est faite nulle part (autant que je sache). D'abord comme H est symétrique, H est convexe et ses côtés opposés sont parallèles, on note D_i et D'_i les côtés parallèles. Il existe une forme linéaire α_i de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \alpha_1(x) = 1\}.$$

En fait il suffit de prendre un vecteur unitaire u_1 orthogonal à D_1 et on a $\alpha_1(y) = \langle u_1, y \rangle$. On fait de même pour chaque D_i est on a construit trois formes linéaires α_1, α_2 et α_3 qui vérifient $D_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \alpha_i(x) = 1\}$.

Le théorème 12 appliqué à H nous dit que la jauge de H est une norme (on la note j_H) et H est la boule unité fermée pour cette norme.

Peut-on avoir une expression plus simple de cette norme ?

Oui, on a en fait

$$j_H(y) = \max(|\alpha_1(y)|, |\alpha_2(y)|, |\alpha_3(y)|)$$

car l'ensemble des points y du plan tels que $|\alpha_i(y)| \leq 1$ est la zone entre D_i et D'_i . Ainsi l'ensemble des points y qui vérifient $\max(|\alpha_1(y)|, |\alpha_2(y)|, |\alpha_3(y)|) \leq 1$ est exactement H .

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à y associe $(\alpha_1(y), \alpha_2(y), \alpha_3(y))$. L'application f étant une immersion, l'image de f est un plan P dans $\mathbb{R}^3$. On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme infinie, la boule unité est un cube noté C ; on a donc

$$C \cap P = \{y \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|f(y)\|_\infty \leq 1\} = \partial H$$

par définition de H .

Remarque : Rien à dire c'est superbe !

13. PROJECTION SUR UN CONVEXE FERMÉ DANS UN HILBERT

Cf : Brézis p.79. Ici aussi, H est un espace de Hilbert.

Théorème 13 (Théorème de projection dans un Hilbert). *Soit K un convexe fermé non vide de H . Pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que $|f - u| = \min_{v \in K} |f - v|$.*

De plus u est caractérisé par la propriété :

$$\begin{cases} u \in K, \\ \forall v \in K \text{ on a } \langle f - u, v - u \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Si on note $P_K f = u$ on a aussi

$$\forall f_1, f_2 \in H \text{ on a } |P_K f_1 - P_K f_2| \leq |f_1 - f_2|.$$

Remarque : Bien comprendre l'interprétation géométrique de la démonstration de l'unicité du projeté.

Corollaire 5. *Soit M un sous-espace vectoriel fermé de H . Soit $f \in H$ alors $u = P_M f$ est caractérisé par :*

$$\begin{cases} u \in M, \\ \forall v \in M \text{ on a } \langle f - u, v \rangle \leq 0. \end{cases}$$

De plus P_M est linéaire.

Application : Polynôme de meilleure approximation quadratique (Demailly p.54). Soit E la partie des éléments de $C([a, b])$ tels que $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$ soit finie. Soit $\omega \in C([a, b])$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b x^n \omega(x) dx \text{ soit finie.}$$

Alors il existe un unique polynôme r_n de degré inférieur à n tel que

$$\|f - r_n\|_2 = d_2(f, P_n).$$

Le polynôme r_n est appelé le meilleur polynôme d'approximation quadratique de f à l'ordre n .

Remarque : Peut-être un peu classique mais l'application est bonne. Dans un plan il faut toujours mettre une application à un théorème un peu abstrait.

On peut aussi se poser des questions sur la fonction distance d'un point à une partie (si elle est continue, différentiable...). Le théorème suivant donne des réponses.

Théorème 14 (Théorème de Motzkin (cf sujet ENS Lyon-Cachan 1999)). *Soit C un fermé de $\mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) C est convexe.
- (ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $c \in C$ tel que $d(x, c) = d_C(x) = \inf_{y \in C} d(x, y)$.
- (iii) La fonction d_C est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus C$.

14. POINT FIXE ATTRACTIF, RÉPULSIF OU SUPERATTRACTIF ET UN
EXEMPLE

Cf : Rouvière p.137, Leichtnam Tome 3 p.26, Gourdon p.219.

Proposition 3 (Rouvière p.137). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^2 de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$ un point fixe de f . On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- (i) Si $|f'(a)| < 1$ alors a est attractif et

$$x_{n+1} - a \sim_{n \rightarrow +\infty} f'(a)(x_n - a).$$

- (ii) Si $f'(a) = 0$ et f'' non nulle sur I alors a est superattractif et

$$x_{n+1} - a \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f''(a)(x_n - a)^2}{2}.$$

- (iii) Si $|f'(a)| > 1$ alors a est répulsif et x_n ne tend pas vers a .

Exercices : (Leichtnam T 3 p.26)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $f(x) = x(1 - ax^\alpha \phi(x))$ où $a > 0$, $\alpha > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = 1$.

- (1) Montrer que pour u_0 petit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ tend vers 0 en décroissant.
- (2) Chercher $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ soit équivalente à une constante.
En déduire que $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$.

Application : Gourdon analyse p.279. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ u_{n+1} = \sin(u_n). \end{cases}$$

Montrer que $u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}\log(n)}{10n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\log(n)}{n\sqrt{n}}\right)$.

Remarques :

- (1) Ce développement est assez simple car il n'y a pas de difficulté théorique mais il n'est fait nulle part en un seul bloc.
- (2) L'exercice est une méthode générale pour trouver un équivalent d'une suite récurrente. Mais il faut faire attention aux hypothèses (notamment f définie sur $\mathbb{R}_+$).

Exemple : Pour $f(x) = xe^{-x} = x - x^2 + o(x^2)$, si $u_0 > 0$, la suite u_n est équivalente à $\frac{1}{n}$ et si $u_0 < 0$, comme $f(x) \leq x$ alors u_n tend vers $-\infty$.

15. QUELQUES RÉSULTATS SUR LA FONCTION Γ

Cf: Zuily-Quéfélec, Bost, Rudin, Chambert-Loir, Gourdon analyse, Schwartz T 4.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose :

$$(1) \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

15.1. La fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 4. On a les trois propriétés suivantes :

- (i) L'intégrale (1) converge.
- (ii) La fonction Γ est C^∞ sur $]0, +\infty[$.
- (iii) Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\Gamma(n+1) = n!$

Remarque : Pour (i) et (ii) c'est Zuily-Quéfélec p.305 et pour (iii), c'est Bost p.70.

Proposition 5 (Une caractérisation de Γ). Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifie :

- (i) $f(x+1) = f(x)$.
- (ii) $f(1) = 1$.
- (iii) f est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ inclus dans D_f .

Alors $f \equiv \Gamma$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarques :

- (1) Les références sont Rudin analyse réelle et complexe p.94 (3^{ième} édition) et Chambert-Loir p.53 T 2.
- (2) (i) et (ii) ne suffisent pas à caractériser Γ : prendre $f(x) = x$ sur $]0, 1[$ et $f(1) = 1$ et la prolonger sur $\mathbb{R}_+^*$ avec (ii). Ainsi, on s'aperçoit que la condition de log convexité est très forte.
- (3) De plus cette démonstration nous dit que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n n!}{(x+n) \dots (x+1)x}.$$

Attention, il faut aussi montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n n!}{(x+n) \dots (x+1)x}$ existe pour $x \in]0, 1[$.

Pour cela posons $g_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n n!}{(x+n) \dots (x+1)x}$ pour $x \in]0, 1[$.

Une des inégalités de la démonstration nous dit que : $g_{n-1}(x) \leq \frac{(x+n)g_n(x)}{n}$

or $g_n(x) > 0$. Donc pour tout $x \in]0, 1[$, $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc convergente.

- (4) Quand on a cette formule, on est proche de la formule des compléments dans le cas réel :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} &= x \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{p}\right)^2\right) \\ &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi}. \end{aligned}$$

Ceci est fait dans Gourdon analyse p.294 et ça utilise le développement on produit infini du sinus qui est démontré dans Gourdon analyse p.260.

15.2. La fonction Γ dans le plan complexe.

Proposition 6 (Bost p.73). *L'intégrale $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Ré}(z) > 0$ et définit une fonction holomorphe sur le demi plan*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Ré}(z) > 0\}.$$

Remarque : Le théorème du prolongement analytique montre que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Ré}(z) > 0$ on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Conséquences (Bost p.74):

- (1) Ainsi pour $\text{Ré}(z) > 0$ on a :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Cette identité montre que Γ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C} - \{-\mathbb{N}\}$.

- (2) Tous les entiers négatifs sont des pôles simples et $\text{Rés}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

Proposition 7 (Zuily-Quéfélec p.306). *Pour $\text{Ré}(z) > 0$ on a*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z n!}{(z+n)\dots(z+1)z}$$

Commentaires sur la preuve :

- (1) On veut utiliser le théorème suivant :
soit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur tout compact vers f alors f est holomorphe.
- (2) Pour k assez grand on peut prendre la détermination principale du log.

(3) Pour montrer que

$$\sum_{k=E(R)+1}^n \left(\log\left(1 + \frac{z}{k}\right) - z \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)$$

converge uniformément sur $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < R\}$ vers une fonction holomorphe, on peut regarder dans Chambert Loir T 2 p.115.

Remarque : Ici on ne se sert pas des résultats qu'on a démontrés dans la partie 15.1 sinon on aurait pu aller plus vite.

15.3. **Lien entre Γ et $B(p, q)$.** Pour $\text{Ré}(p)$ et $\text{Ré}(q) > 0$, on définit

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

Proposition 8 (Schwartz T 4 p.400). *Pour $\text{Ré}(p)$ et $\text{Ré}(q) > 0$ on a*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Conséquences :

(1) L'intégrale de Wallis : $W(r) = \int_0^{+\infty} \cos^r(\theta) d\theta = B\left(\frac{r+1}{2}, \frac{1}{2}\right).$

(2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Proposition 9 (Formule des compléments “le retour” (Schwartz p.402)).
Pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Remarque : La démonstration se fait en utilisant la formule des résidus, les calculs sont difficiles même si on peut s'aider de la page 391.

15.4. **Une application de la fonction Γ .**

Proposition 10 (Chambert Loir T 1 p.205). *Le volume de la boule unité n dimensionnelle est*

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}.$$

Remarque : Dans Schwartz T 4 p.401, il y a un récapitulatif des aires et des volumes des boules unités.

16. DEUX ÉQUATIONS, DEUX INCONNUES

Cf : Rouvière p.199

Exemple : Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

- (1) Rappeler la discussion du système linéaire

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$$

où a, b, c et d sont dans $\mathbb{R}$.

- (2) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} \phi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) \end{aligned}$$

une fonction de classe C^1 . Discuter le système

$$\begin{cases} f(x, y) = u \\ g(x, y) = v \end{cases}$$

selon le rang de $D\phi$.

- (3) Exemple : on pose :

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ g(x, y) = \frac{2x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Remarque : “Moi, personnellement je” trouve ce développement bien car pas trop dur et il donne une vue plus générale des systèmes linéaires. De plus il utilise le théorème d’inversion locale qui est, rappelons le, FONDAMENTAL (!)

17. THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS

Cf : Dieudonné Fondements de l’analyse moderne p.139. On note $C_{\mathbb{R}}(E)$ l’ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans E .

Théorème 15. *Soit E un espace métrique compact. Si une sous algèbre A de $C_{\mathbb{R}}(E)$ contient les fonctions constantes et sépare les points de E alors A est dense dans l’espace de Banach $(C_{\mathbb{R}}(E), \|\cdot\|_{\infty})$.*

Remarques :

- (1) Que l’algèbre A sépare les points signifie que pour tout $x, y \in E$ il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.
- (2) On munit $C_{\mathbb{R}}(E)$ de la norme infinie car cette norme rend l’espace complet. C’est aussi pour cela que l’ensemble des fonctions holomorphes est muni de la convergence uniforme sur tous compacts.

Attention la complétude n’est pas une notion topologique mais métrique.

- (3) Le théorème est faux pour $C_{\mathbb{C}}(E)$. Il faut rajouter aux hypothèses:
 “si $f \in A$ alors $\overline{f} \in A$.”

Applications :

- (1) Soit E une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, $A = \{\text{polynômes à coefficient réels à } n \text{ variables}\}$. Comme A est inclus dans $C_{\mathbb{R}}(E)$, A est dense dans $C_{\mathbb{R}}(E)$.
- (2) Soit S^1 le cercle. C'est un espace topologique compact. Soit A l'algèbre engendrée par les constantes et les fonctions $(e^{ikt})_{k \in \mathbb{Z}}$. Elle est incluse dans $C(S^1, \mathbb{C})$ et e^{it} sépare les points. Ainsi toute fonction 2π -périodique continue est limite uniforme d'un polynôme trigonométrique.

Remarque : L'application 2 donne la réponse à un problème important. En effet, Fourier voulait résoudre l'équation de la chaleur, pour cela il sépara les variables (i.e. il cherchait la solution sous la forme $f(x)g(t)$ ce qui se justifie en physique car la variable spatiale x est indépendante de la variable temporelle t) et il trouva une solution. Puis il postulait qu'il les avait toutes. Les mathématiciens se penchèrent sur la question et c'est l'analyse hilbertienne et l'application 2 qui démontra ce résultat. Pour cela regarder Zuily-Quéfélec et Brézis.

18. THÉORÈME D'ASCOLI (VERSION COMPACTE) ET $H(\Omega)$ N'EST PAS NORMABLE

Cf : Vautier-Prat, Zuily-Quéfélec, Dieudonné (Fondements de l'analyse moderne), Serge Lang (Analyse réelle).

On note $C(X, F)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans F .

18.1. Le théorème d'Ascoli.

Théorème 16 (Théorème d'Ascoli (Lang p.220)). *Soit X une partie compacte d'un espace métrique, soit F un espace de Banach et soit Φ une partie de $(C(X, F), \|\cdot\|_{\infty})$. La partie Φ est relativement compacte si et seulement si*

- (1) *elle est équicontinue sur X et*
 (2) *pour tout $x \in X$, la partie*

$$\Phi(x) = \{f(x) \mid f \in \Phi\}$$

est relativement compacte.

L'exemple fondamental : (Vautier-Prat p.38) Soient E et F des espaces normés, Ω un ouvert de E et A une famille d'applications dérivables de Ω dans F telle que :

$$\exists M \text{ telle que } \forall z \in \Omega, \forall f \in A, |f'(z)| \leq M.$$

Alors A est équicontinue.

Preuve : On va montrer que A est équicontinue en tout x de Ω . Pour $x \in \Omega$ il existe une boule $B(x, \eta)$ incluse dans Ω . Or $B(x, \eta)$ est convexe.

Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $y \in B(x, \eta)$ et pour tout $f \in A$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\| \leq M\eta.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on choisit $m = \min\left(\frac{\varepsilon}{M}, \eta\right)$ et donc A est équicontinue sur Ω .

Remarque : On peut simplement supposer que pour tout $x \in \Omega$ il existe un voisinage convexe $V(x)$ de x tel que :

$$\exists M > 0 \text{ telle que } \forall y \in V(x), \forall f \in A \text{ on a } |f'(y)| < M.$$

18.2. Application du théorème d'Ascoli (Vautier-Prat p.36).

Théorème 17. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Les compacts de $H(\Omega)$ sont les fermés bornés ($H(\Omega)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact).*

Définition 1. *Soit $A \subset H(\Omega)$, A est bornée si pour tout compact K il existe une constante M_K telle que pour tout $z \in K$, pour tout $f \in A$ on a $|f(z)| \leq M_K$.*

Preuve : La démonstration n'est faite nulle part.

- (1) Soit A compact de $H(\Omega)$ alors A est fermé. Montrons que A est borné (on ne sait pas si $H(\Omega)$ est métrisable).

Soit K un compact de Ω , on note $p_K(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|$. Soit $\varepsilon > 0$.

$$A \subset \bigcup_{f \in A} B_K(f, \varepsilon) \text{ où } B_K(f, \varepsilon) = \{g \in H(\Omega) \text{ tels que } p_K(f - g) < \varepsilon\}.$$

On en tire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe $f_1, \dots, f_n$

$$\text{telles que } A \subset \bigcup_{i=1}^n B_K(f_i, \varepsilon).$$

Soit $f \in A$ alors $f \in B_K(f_{i_0}, \varepsilon)$, i.e.

$$\begin{aligned} \forall z \in K \quad |f(z)| &\leq |f(z) - f_{i_0}(z)| + |f_{i_0}(z)| \\ &\leq \varepsilon + f_{i_0}(z). \end{aligned}$$

Donc pour tout $z \in K$, on a $|f(z)| \leq \varepsilon + \max_{i \in \{1..n\}} (\sup_{z \in K} |f_i(z)|)$

Ainsi A est borné (normal un compact est toujours fermé et borné).

- (2) Réciproquement, supposons A fermé et borné et on va montrer que :

$$\begin{cases} \text{(i) } A \text{ est équicontinu} \\ \text{(ii) } A(x) = \{f(x), f \in A\} \text{ est relativement compact.} \end{cases}$$

Puis par Ascoli modifié (il y a plusieurs versions d'Ascoli, ici on utilise celle où X n'est pas supposé compact, cf la remarque ci-dessous).

Pour (ii) : A est borné donc pour tout compact K $\exists M(K) > 0$ telle que $\forall z \in K, \forall f \in A$ on a $|f(z)| < M_K$.

Soit $x \in \Omega$ on note $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ or $\exists M(K) > 0$ telle que $\forall x \in K$ alors $\forall f \in A$ on a $|f(x)| < M(K)$. Donc $A(x)$ est borné dans $\mathbb{C}$.

En d'autres termes, $A(x)$ est relativement compact pour tout $x \in \Omega$.

Pour (i) : Soit $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D_f(a, r) \subset \Omega$, alors comme A est borné

$$\exists M_A \text{ telle que } \forall f \in A, \quad \forall z \in D_f(a, r)$$

on ait $|f(z)| < M_A$.

Par Cauchy on a $|f'(a)| \leq \frac{M_A}{r}$ et pour

$$z \in D_f\left(a, \frac{r}{2}\right), \text{ on a } D_f\left(z, \frac{r}{2}\right) \subset D_f(a, r).$$

Ainsi par Cauchy sur $D_f(a, r/2)$ on a

$$|f'(z)| < \frac{2M_A}{r} = M'$$

et pour tout $a \in \Omega$ il existe un voisinage $V(a)$ de a inclus dans $D_f(a, r/2)$ tel que pour tout $z \in V(a)$ et pour tout $f \in A$ on ait $|f'(z)| < M'$.

D'après l'exemple fondamental A est équicontinue sur Ω .

Remarques :

- (1) Il y a ce théorème dans Cartan Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes p.165 mais il ne le démontre pas de cette manière.
- (2) La version d'Ascoli est dans Vautier-Prat, elle est un peu plus générale que celle de Lang.
- (3) Voilà pourquoi je me suis intéressé à ce résultat : on montre facilement que $H(\Omega)$ muni de la convergence uniforme sur tout compact n'est pas normable (par contre il est métrique) car sinon la boule unité fermée serait compacte ce qui contredirait le théorème de Riesz (cf le paragraphe 27) car $H(\Omega)$ est de dimension infinie.

Théorème 18 (Zuily- Quéfelec p.151). *Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $A \subset H(\Omega)$, la partie A est localement bornée si et seulement si A est relativement compact dans $(H(\Omega), \delta)$.*

Remarque : δ est la métrique suivante :

$$\delta(f, g) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \frac{p_n(f - g)}{1 + p_n(f - g)}$$

où $K_n = B_f(0, n) \cap \Omega$ et $p_n(f) = \sup_{z \in K_n} (|f(z)|)$.

Lemme 5. *Soit J un intervalle compact. Si $J \subset f(J)$, alors f a un point fixe.*

Preuve : Si $J = [a, b]$ comme $J \longrightarrow J$ il existe c et $d \in [a, b]$ tels que :

$$\begin{cases} f(c) = a \leq c \text{ et} \\ f(d) = b \geq d \end{cases}$$

On pose alors $g(x) = f(x) - x$ et on a $g(d) \geq 0$ et $g(c) \leq 0$. Ainsi, on applique le théorème des valeurs intermédiaires à g et on conclut que f a un point fixe.

Lemme 6. *Si $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_n$ alors il existe un intervalle $\Delta_n \subset I_0$ tel que $f^n(\Delta_n) = I_n$ et pour $k = 0, \dots, n$ on a : $f^k(\Delta_n) \subset I_k$.*

Preuve : On va le démontrer par récurrence sur n .

Pour $n = 1$, c'est le lemme 4.

Supposons la propriété vraie au rang n , on applique l'hypothèse de récurrence à $I_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n+1}$. Il existe $\Delta_n \subset I_1$ tel que pour $k = 0, \dots, n$ on a $f^k(\Delta_n) \subset I_{k+1}$ et pour $I_0 \longrightarrow \Delta_n$ on applique le cas $n = 1$. Ainsi il existe $\Delta_{n+1} \subset I_0$ tel que pour tout $k = 0, \dots, n+1$, $f^k(\Delta_{n+1}) \subset I_k$.

Ainsi le résultat est démontré par récurrence.

Lemme 7. *Soit $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$, alors il existe $x \in I_0$ tel que pour $i = 1, \dots, n-1$ on a $f^i(x) \in I_i$ et $f^n(x) = x$.*

Preuve : D'après le lemme 6, il existe $\Delta_n \subset I_0$ tel que pour $k = 0, \dots, n-1$ on a $f^k(\Delta_n) \subset I_k$ et $f^n(\Delta_n) = I_0$.

Comme $\Delta_n \subset I_0$ on a $f^n(\Delta_n) = I_0$ et $\Delta_n \subset I_0$. Or f^n est continue de Δ_n dans I_0 alors le lemme 5 nous donne l'existence de $x \in \Delta_n$ tel que $f^n(x) = x$ et le lemme 6 assure que $x \in \Delta_n$ et $f^k(x) \in I_k$ pour $k = 1, \dots, n-1$.

Preuve du théorème : Soit a un point 3-périodique, son orbite est l'ensemble $\{a, f(a), f^2(a)\}$. On peut supposer sans perdre de généralité que $a < f(a) < f^2(a)$. On pose alors $I = [a, f(a)]$ et $J = [f(a), f^2(a)]$. Le théorème des valeurs intermédiaires implique que $I \longrightarrow J$ et $J \longrightarrow I \cup J$.

On a $J \longrightarrow I$ et $J \longrightarrow J$. On considère le diagramme suivant :

$$I \rightleftharpoons J \circlearrowright$$

Pour construire un point n -périodique on considère le diagramme :

$$I \longrightarrow J \longrightarrow J \longrightarrow \dots \longrightarrow J \longrightarrow I \text{ avec } n-1 \text{ fois } J.$$

Le lemme 7 nous dit qu'il existe $x \in I$ tel que $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \in J$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Il faut vérifier que $f^k(x) \neq x$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Comme $x \in I = [a, f(a)]$ et $f^k(x) \in J = [f(a), f^2(a)]$ (car $I \cap J = \{f(a)\}$).

Si $x = f(a)$ alors x est un point 3-périodique.

Si $x \neq f(a)$ alors $f^k(x) \neq x$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Car si $f^{k_0} = f(a)$ alors $f^{k_0+2} = a$ qui est dans $J \cap I$ et ceci est absurde d'après le lemme 7.

Remarques :

- (1) Dans le livre il y a le “vrai théorème” de Sharkovski quelques pages plus loin.
- (2) Ce développement est “magique” car le résultat est surprenant et la démonstration n'utilise que des choses simples.

20. MÉTHODE DE LAPLACE

Cf : Gourdon analyse p.160, Leitchnam T 1 analyse p.112.

Théorème 20. Soient g et h deux fonctions : $]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

- (i) $\int_0^{+\infty} |g(x)| e^{h(x)} dx$ converge.
- (ii) $\exists \delta_0 > 0$ tel que $\forall \delta \in]0, \delta_0[, \forall x \geq \delta$ on a $h(x) \leq h(\delta)$.
- (iii) au voisinage de 0^+ , on a :
 - (a) $g(x) \sim_{0^+} A x^\alpha$
 - (b) $h(x) = a - cx^\beta + o(x^\beta)$ pour $c > 0$ et $\beta > 0$.

On a alors

$$\int_0^{+\infty} g(x) e^{th(x)} dx \sim_{t \rightarrow \infty} \frac{A}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{at} (ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}$$

Remarques :

- (1) La preuve est assez technique mais pas très dure, je pense que pour bien la présenter il faut bien comprendre les hypothèses notamment (ii) et être persuadé(e) que ce qui compte dans l'intégrale c'est le morceau de 0 à δ (ceci vient essentiellement de (ii)).
- (2) Gourdon dit qu'on a les mêmes conclusions pour $\int_0^b g(x) e^{th(x)} dx$ avec g et h qui vérifient les mêmes hypothèses sur $[0, b]$ et il le justifie en posant $g(x) = 0$ et $h(x) = a - 1$ pour $x > b$, puis se ramène au cas précédent. Or ceci ne marche pas car les prolongements de g et h ne sont plus continus en b . Pour résoudre ce problème il suffit de poser $\forall x > b + 1, g(x) = 0$ et $h(x) = a - 1$ puis de faire un recollement continu pour $x \in [b, b + 1]$ (cf le théorème de Borel (théorème 21) et ses corollaires).
- (3) Faire le lien avec la transformée de Laplace (cf Pommelet p.197). En effet le théorème nous donne un équivalent de la transformée de Laplace, si la fonction vérifie les hypothèses du théorème 20.

Corollaire 6. Soient g et h deux fonctions C^2 sur $]a, b[$ pour a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$ tel que

- (i) $\int_a^b |g(x)| e^{h(x)} dx$ converge.
- (ii) h' ne change de signe qu'en un seul point $c \in]a, b[$ où de plus h atteint son maximum et où $g(c) \neq 0$ et $h''(c) < 0$.

Alors

$$\int_a^b g(x)e^{th(x)} dx \sim_{+\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) g(c)e^{th(c)} \sqrt{\frac{-2}{th''(c)}}.$$

Remarque :

- (1) Gourdon dit simplement de séparer les intégrales et d'appliquer le théorème précédent. Mais il faut faire attention car alors on additionne les équivalents ; cela mérite une justification (si $f \sim g$ et $h \sim g$ alors $f + g \sim 2g$).
- (2) Ce résultat est aussi présenté dans Rouvière p.322.

Exemple : Si on applique le corollaire à $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ alors on a la formule de Stirling :

$$\Gamma(x+1) \sim_{+\infty} x^{\frac{x+1}{2}} \sqrt{2\pi} e^{-x}.$$

21. THÉORÈME DE BOREL

Cf : Rouvière p.333

Théorème 21 (Théorème de Borel). *Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque de réels, alors il existe une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $u^{(k)}(0) = a_k$.*

Corollaire 7. *Soit f une fonction C^∞ sur $[a, b]$ alors on peut prolonger f en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

Remarques :

- (1) La démonstration n'est pas très dure mais le résultat est très utile pour tous les recollements C^∞ : par exemple la remarque 2 du paragraphe 20.
- (2) Il paraît que le résultat est aussi vrai pour une suite de nombres complexes.

22. EXEMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE NULLE PART DÉRIVABLE

Cf : Gourdon Analyse p.83

Exemple : Soit Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est 1-périodique et dont la restriction à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ vaut $\Delta(x) = |x|$ On définit alors f par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x) \end{aligned}$$

et f est continue mais dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Remarques :

- (1) Si on sait que les polynômes sont denses dans $C^0([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ (i.e. le théorème de Weierstrass 17) alors on sait que les fonctions continues nulle part dérivables sont denses dans $C^0([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ (ce résultat peut être obtenu théoriquement en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus 2 cf Gourdon analyse p.399). En effet, soit g la fonction nulle part dérivable déjà construite, soit $f \in C^0([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ alors $f - g$ est continue et donc par Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme P tel que $\|f - g - P\|_\infty < \varepsilon$, ainsi $g + P$ approche f et $g + P$ est continu et nulle part dérivable.
- (2) Construire des fonctions à l'aide du développement décimal de la variable permet d'expliciter des fonctions bizarres !

23. DENSITÉ DES FONCTIONS NULLE PART DÉRIVABLES

Cf : Gourdon Analyse p.395

Théorème 22. *Soit $I = [0, 1]$, alors l'ensemble E des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans $(C^0([0, 1], \|\cdot\|_\infty))$.*

Remarques :

- (1) Bien connaître les espaces de Baire et voir des applications dans Gourdon Analyse p.391.
- (2) Lire le paragraphe 22.

24. THÉORÈME DE BERNSTEIN

Cf : Gourdon analyse p.249

Théorème 23. *Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ , on suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-a, a[$, $f^{(2k)}(0) \geq 0$. Alors f est développable en série entière sur $] -a, a[$.*

Remarque : Regarder dans Gourdon analyse p.238 pour savoir quand une fonction est développable en série entière. Penser au reste intégrale de Taylor, revoir les différentes hypothèses pour avoir les différents restes de Taylor.

Question : — Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction développable en série entière en tout point de I , peut-on développer f en série entière jusqu'au bord de I ?

— NON, si on a un pôle, on est coincé. Dans $\mathbb{R}$, on ne voit pas les pôles complexes. Ceci est à comparer le résultat suivant sur les fonctions analytiques : si f est analytique sur U ouvert alors pour $x_0 \in U$ on sait que f est au moins développable sur $B(x_0, d(x_0, U^c))$ (cf la démonstration du résultat 10.16 de Rudin p.251).

25. THÉORÈME DE HANH-BANACH VERSION ANALYTIQUE

Cf : Rudin p.133, Rouvière p.23 (en dimension finie)

Théorème 24. *Soit X un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé et M un sous espace de X , si f est une forme linéaire continue sur M alors f peut être prolongée en une forme linéaire continue sur X en préservant la norme.*

Remarques :

- (1) M n'est pas supposé fermé.
- (2) Si X est euclidien alors il suffit de prolonger f par 0 sur $M^\perp$.
- (3) Il y a une version avec des semi-normes, et cette version permet de démontrer la version géométrique (cf Brézis).

Corollaire 8. *Soient X un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé, M un sous espace de X et $x_0 \in X$, x_0 appartient à $\overline{M}$ si et seulement si il n'existe pas d'application linéaire f sur X telle que $\forall x \in M$, $f(x) = 0$ tandis que $f(x_0) \neq 0$.*

Corollaire 9 (Rudin p.136). *Soit X un espace vectoriel normé si $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, il existe une forme linéaire continue f sur X de norme 1 telle que $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Remarque : Puis on peut montrer que l'ensemble des formes linéaires continues sur X sépare les points.

26. MÉTHODE NUMÉRIQUE DE RÉOLUTION D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Cf : Demailly p.205 et suivantes, Hubbard West.

Soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ assez régulière, on considère le problème suivant:

$$(E) \begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

On définit une méthode numérique à un pas :

$$\begin{cases} y_0 &= y(t_0) \\ y_{n+1} &= y_n + h\Phi(t_n, y_n, h) \end{cases}$$

où $\Phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est assez régulière et $t_k = t_0 + nh$ et $h = \frac{T}{N}$.

Exemple :

- (1) Méthode d'Euler :

On prend $\Phi(t, y, h) = f(t, y)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{cases}$$

- (2) Méthode du point milieu :

On prend $\Phi(t, y, h) = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y))$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} y_{n+\frac{1}{2}} &= y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}) \\ t_{n+1} &= h + t_n \end{cases}$$

Définition 2. (1) *L'erreur de consistance e_n relative à une solution exacte z est l'erreur $e_n = z(t_{n+1}) - y_{n+1}$ pour $0 \leq n < N$ en supposant que $y_n = z(t_n)$ soit la solution exacte en t_n .*
 (2) *La méthode est consistante si pour toute solution exacte z :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N |e_n| = 0$$

Remarque : La définition de l'erreur de consistance est bizarre car elle suppose que la condition $z(t_n) = y_n$ est vérifiée, mais plus tard c'est cette définition qui sera utile.

Définition 3. *La méthode est stable s'il existe $S \geq 0$ tel que pour toutes suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour $0 \leq n < N$*

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + h\Phi(t_n, y_n, h_n) \\ \tilde{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n + h\Phi(t_n, \tilde{y}_n, h_n) + \varepsilon_n \end{cases}$$

on ait

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\tilde{y}_n - y_n| \leq S(|\tilde{y}_0 - y_0| + \sum_{0 \leq n < N} |\varepsilon_n|).$$

Remarque : Bien comprendre la définition de la stabilité, i.e. une petite perturbation ne change pas trop la solution.

Définition 4. *On dit que la méthode est convergente si pour toute solution exacte z , la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit par $y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$, alors*

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ y_0 \rightarrow z_0}} \max_{0 \leq n \leq N} |y_n - z(t_n)| = 0$$

Remarque : C'est LA chose qui compte en pratique.

Proposition 11. *Si la méthode est stable et consistante, elle est convergente.*

Théorème 25. *La méthode à un pas définie par Φ est consistante si et seulement si $\forall (t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}$ on a $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$.*

Théorème 26. *Pour que la méthode soit stable il suffit que Φ soit lipschitzienne en y , en d'autres termes qu'il existe une constante $\Lambda \geq 0$ telle que $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall h \in \mathbb{R}$ on a :*

$$|\Phi(t, y_1, h) - \Phi(t, y_2, h)| \leq \Lambda |y_1 - y_2|$$

et dans ce cas $S = e^{\Lambda T}$

Remarque : La méthode d'Euler est stable si f est k -lipschitzienne.

Définition 5. *On dit qu'une méthode à 1 pas est d'ordre p si pour toute solution exacte z de $y' = f(t, y)$ avec $f \in C^p$ il existe $C > 0$ tel que pour $0 \leq n < N$ on a $|e_n| \leq Ch^{p+1}$.*

Théorème 27. *La méthode est d'ordre p si et seulement si Φ est choisie telle que pour $0 \leq l \leq p - 1$, on ait*

$$\frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(t, y, 0) = \frac{1}{l+1} f^{[l]}(t, y)$$

où $f^{[l+1]} = D_1 f^{[l]} + f D_2 f^{[l]}$.

Remarque : En pratique c'est ce critère qu'on utilise pour savoir qu'une méthode est d'ordre p . On peut vérifier facilement que la méthode des points milieux est une méthode d'ordre 2.

Théorème 28 (On veut majorer l'erreur globale). *Si on a une méthode d'ordre p alors*

$$\sum_{0 \leq n < N} |e_n| \leq CTh^p$$

où T est la longueur de l'intervalle de temps.

Remarque : Ainsi si la méthode est stable on a

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - z(t_n)| \leq S(|y_0 - z(t_0)| + CTh^p).$$

On va regarder l'influence des arrondis :

Supposons que le calcul de $\Phi(t_n, \tilde{y}_n, h)$ donne une erreur ρ et celui de $\tilde{y}_{n+1}$ donne une erreur σ .

Théorème 29. *Supposons la méthode stable alors*

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\tilde{y}_n - z(t_n)| \leq S(|\varepsilon_0| + T\rho + N\sigma + CTh^p)$$

où $\varepsilon_0 = |\tilde{y}_0 - z(t_0)|$.

Remarque : Posons

$$\begin{aligned} E(h) &= S(|\varepsilon_0| + T\rho + N\sigma + CTh^p) \\ &= S(|\varepsilon_0| + T\rho + \frac{T}{h}\sigma + CTh^p). \end{aligned}$$

On peut alors tracer $E(h)$ (cf Demailly), on en déduit un h_{min} pour l'erreur. Attention ce h_{min} ne minimise pas l'erreur, il minimise juste le **majorant** de l'erreur, ce qui n'est pas exactement la même chose !

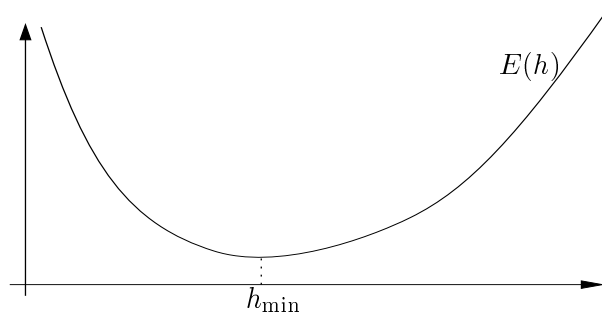


FIGURE 4

27. THÉORÈME DE RIESZ

Cf : Pommelet p.70, Brézis p.92.

Théorème 30. *Si la boule unité est compacte dans $(E, \|\cdot\|)$ alors E est de dimension finie.*

Exercices :

- (1) Montrer que les compacts sont d'intérieur vide en dimension infinie.
- (2) Montrer que le complémentaire d'un compact est connexe en dimension infinie.
- (3) Existe-t-il une application continue surjective de $\mathbb{R}^p$ dans un Banach E ?
- (4) Soit A un opérateur compact en dimension infinie, montrer que A n'est pas inversible.

Solutions :

- (1) Sinon il y a une boule ouverte dans le compact et donc une boule fermée. Or un fermé dans un compact est compact ce qui contredit le théorème de Riesz.
- (2) Soit K un compact inclus dans E . On sait qu'un compact est borné donc il existe $R > 0$ et $a \in E$ tels que $K \subset B(a, R)$. Il est clair que le complémentaire de $B(a, R)$ est connexe ; pour montrer le résultat il suffit alors de vérifier que pour tout point $x_0 \in B(a, R)$ il existe une demi-droite partant de x_0 qui ne coupe pas K .

Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in B(a, R)$ tel que toutes les demi-droites partant de x_0 coupent K . Ainsi on construit une fonction ϕ de K dans $S(a, R)$ qui à x de K associe l'intersection de la demi-droite $d_x = [x_0x)$ et $S(a, R)$.

Or cette fonction est continue (un petit dessin nous en convainc) donc $S(a, R)$ est compact ($S(a, R)$ est clairement un espace séparé) ce qui contredit le théorème de Riesz.

- (3) Non, supposons par l'absurde qu'il existe une fonction f continue et surjective de $\mathbb{R}^p$ dans E . On recouvre $\mathbb{R}^p$ par une réunion dénombrable de pavés compacts, et l'image de cette union est E . Ainsi

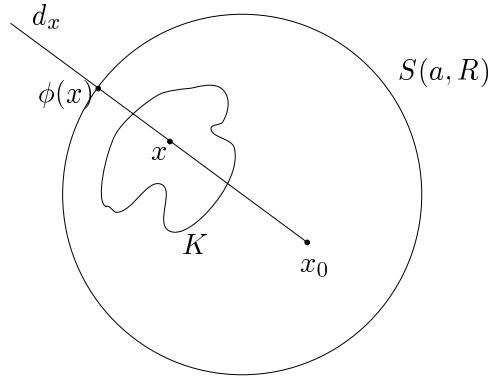


FIGURE 5

E est une réunion dénombrable de compacts, or les compacts sont d'intérieur vide donc par le théorème de Baire (cf Gourdon analyse p.391) E est d'intérieur vide ce qui est absurde. Remarquer que grâce à la propriété de Baire on peut montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie est de dimension non dénombrable (cf Gourdon analyse p.393).

- (4) On a $A \cdot A^{-1}$ qui est un opérateur compact ainsi $\overline{B(0, 1)}$ est compact, ce qui est absurde (cf Brézis p.90). Dans Rudin analyse fonctionnelle, il y parle des opérateurs compacts à la page 103.

28. LES DIFFÉRENTES DÉFINITIONS DES SOUS-VARIÉTÉS

Cf : Lafontaine p.29, Avez p.93.

Définition 6. Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p si $\forall x \in M, \exists U_x \subset \mathbb{R}^n$ voisinage ouvert de x et $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ voisinage ouvert de 0 et une fonction $f : U_x \rightarrow V_0$ difféomorphisme telle que $f(U_x \cap M) = f(U_x) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

Théorème 31. On a équivalence entre :

- (i) M est une sous-variété de dimension p .
- (ii) Pour tout a dans M , il existe un ouvert U_a de $\mathbb{R}^n$ contenant a et une submersion $g : U_a \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$.
- (iii) Pour tout a dans M , il existe un ouvert U_a de $\mathbb{R}^n$ contenant a et V_0 un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $h : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ une immersion dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de V_0 sur $U_a \cap M$.
- (iv) Pour tout a dans M , il existe un ouvert U_a de $\mathbb{R}^n$ contenant a , V ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a_1, \dots, a_p)$ et $G : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ tels que $U_a \cap M$ soit le graphe de G (i.e. $U_a \cap M = (u, G(u))$ avec u dans V).

Preuve :

On va montrer que $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$

(1) **Pour (i) $\Rightarrow$ (iii)**(cf Lafontaine)

Soit f le difféomorphisme défini au voisinage de U_a avec a dans M , alors f^{-1} est un difféomorphisme de $f(U_a)$ sur U_a . Sa restriction à $(\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap f(U_a)$ est une immersion de cet ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme sur $U_a \cap M$.

(2) **Pour (iii) $\Rightarrow$ (iv)**(cf Avez p.97)

Soit a dans M , on a $h(0) = a$ où h est une application de $V_0 \subset \mathbb{R}^p$ dans $U_a \subset \mathbb{R}^n$ telle que $dh(0)$ soit injective donc $dh(0)$ est de rang p . On peut supposer que $(dh_1(0), \dots, dh_p(0))$ sont linéairement indépendants. Soit $\Pi_1 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}^p$ la projection canonique : $\Pi_1(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$. Et

$$\begin{aligned} D(\Pi_1 \circ h)(0) &= \Pi_1 \circ Dh(0) && \text{car } \Pi_1 \text{ est linéaire.} \\ &= (dh_1(0), \dots, dh_p(0)) \end{aligned}$$

Ainsi $D(\Pi_1 \circ h)(0)$ est un isomorphisme, on applique donc le théorème d'inversion local à $\Pi_1 \circ h$, il existe un voisinage inclus dans V_0 de 0, on note encore ce voisinage V_0 et U_1 un voisinage de $\Pi_1 \circ h(0)$ tels que $\Pi_1 \circ h|_{V_0}$ soit un difféomorphisme de V_0 sur U_1 . h envoie continuellement V_0 dans $U_a \subset \mathbb{R}^n$.

Quitte à restreindre V_0 on peut supposer $U_a = U_1 \times U_2$ où $U_1 \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$ et $U_2 = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$.

Soit $\Pi_2 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ si $x \in V_0$ on a $h(x) = (\Pi_1 \circ h(x), \Pi_2 \circ h(x))$ et comme $\Pi_1 \circ h(x)$ est un difféomorphisme de V_0 sur U_1 . On pose $y = \Pi_1 \circ h(x)$ et $h(x) = (y, \Pi_2 \circ h(x))$ i.e. $U_a \cap M$ est le graphe de $\Pi_2 \circ h \circ (\Pi_1 \circ h)^{-1} : U_1 \rightarrow U_2$.

(3) **Pour (iv) $\Rightarrow$ (ii)**(cf Lafontaine)

Soit $G : V \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ où $U_a \cap M$ est le graphe de G . On pose :

$$\begin{aligned} U_a \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-p} \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_{p+1} & - & G_1(x_1, \dots, x_p) \\ \vdots & & \\ x_n & - & G_{n-p}(x_1, \dots, x_p) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$g^{-1}(0) = \{x \in U_a \mid x_{p+1} = G_1(x_1, \dots, x_p), \dots, x_n = G_{n-p}(x_1, \dots, x_p)\} = U_a \cap M.$$

Et pour $i \geq p+1$ on a $\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = 1$. Ainsi $dg(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ est de rang $n-p$, c'est dire que c'est une submersion.

(4) **Pour (ii) $\Rightarrow$ (i)**(cf Avez)

Soit a dans M , on a $g : U_a \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$. Comme $dg(a)$ est surjective on peut compléter $dg_1(a), \dots, dg_{n-p}(a)$ en une base

$$(dg_1(a), \dots, dg_{n-p}(a), f_{n-p+1}, \dots, f_n)$$

de $\mathbb{R}^{n^*}$.

Ainsi on pose $\varphi(g_1, \dots, g_{n+1}, f_{n-p+1}, \dots, f_n)$ et $\varphi : U_a \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $d\varphi$ est surjective donc inversible, ainsi on peut appliquer le théorème d'inversion locale sur $V_a \subset U_a$.

Donc $\varphi : V_a \rightarrow \varphi(V_a)$ est un difféomorphisme et $\varphi(V_a \cap M) = \varphi(V_a) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$.

Remarques :

- (1) En fait (ii) $\Rightarrow$ (iv) est le théorème des fonctions implicites.

En effet, soit a dans M et soit g une submersion, $g : U_a \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$, on peut supposer $U_a = U_1 \times U_2$ avec $U_1 \in \mathbb{R}^p$ et $U_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$.

On peut supposer que $(dg_1(a), \dots, dg_p(a))$ sont linéairement indépendantes. Ainsi on prend $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ et $\frac{\partial g}{\partial \mathbb{R}^p}$ est un isomorphisme et on applique le théorème des fonctions implicites. On a donc

$$\text{pour } (x, y) \in U_1 \times U_2, \text{ on a } g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \psi(x)$$

où $\psi : U_1 \rightarrow U_2$ est donné par le théorème des fonctions implicites, $U_a \cap M$ est donc le graphe de ψ de U_1 sur U_2 .

- (2) Si on connaît bien les sous-variétés (en fait les espaces tangents aux sous-variétés) on peut démontrer assez facilement le théorème des extréma liés (cf Avez vars la page 100). Pour avoir quelques applications regarder dans Rouvière. Je pense qu'il ne faut surtout ne pas le démontrer comme dans Gourdon.
- (3) Il est INDISPENSABLE de faire des figures. Elles ne sont pas faites ici parce qu'on les trouve dans Lafontaine, par exemple.

29. ETUDE DE $y' = y^2 - x$

Cf : Artigue et Gautheron p.30.

- (1) Recherche des isoclines

On cherche les courbes qui vérifient $y' = k$. Ce sont des paraboles I_k d'équations $y^2 = x + k$. Remarquons que I_0 est une zone piège : i.e. si la solution rencontre I_0 alors elle reste à l'intérieur de cette parabole.

- (2) Etude de y'' (point d'inflexion et concavité).

- (3) Solutions du type α

Celles qui passent par $y'' = 0$. La courbe $y'' = 0$ est une courbe en deux morceaux C_1 et C_2 (C_2 est la parabole). Soit $M_0(x_0, y_0) \in C_1$ et C_{M_0} la solution passant par M_0 .

On a les résultats suivants :

- (a) C_{M_0} coupe C_1 en au plus un point,
- (b) C_{M_0} ne coupe pas I_0 pour $x < x_0$,
- (c) C_{M_0} ne rencontre pas I_0 donc ne rencontre pas C_2

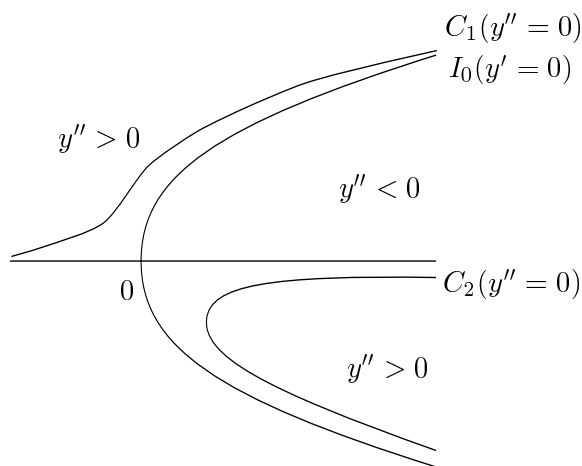


FIGURE 6

- (d) Une solution de type α a deux branches infinies à direction asymptotique verticale.
- (4) Solutions de type β
 - Soit $M_1(x_1, y_1) \in I_0$ et C' la solution passant par M_1 .
 - (a) Une solution du type β ne coupe pas C_1 .
 - (b) Pour $x < x_1$ C' a une direction asymptotique de direction verticale.
 - (c) Pour $x > x_1$ C' reste dans I_0 et rencontre C_2 (C_2 est une zone piège).
 - (d) C' est asymptote à I_0 et à C_2 .
- (5) La solution particulière
 - C'est celle qui est coincée entre I_0 et C_1 .
 - (a) Si elle existe elle est unique.
 - (b) Les solutions β coupent l'axe (Oy) suivant l'intervalle $]-\infty, b[$.
 - (c) Les solutions α coupent l'axe (Oy) suivant l'intervalle $]c, +\infty[$.
 - (d) D'où l'unicité.

Remarques :

- (1) Cet exemple montre la force du raisonnement qualitatif, cependant il est très classique.
- (2) Derrière ces zones pièges se cachent la théorie des entonnoirs et des anti-entonnoirs (cf Hubbard-West).

30. THÉORÈME D'ABEL ET THÉORÈME DE TAUBER FAIBLE

Cf : Gourdon Analyse p.249 -251, Arnaudies T 3 p.97 et 100.

Théorème 32 (Théorème d'Abel). Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur à 1 telle que $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge. Soient f la somme de cette série entière sur le disque unité, $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et

$$\Delta_0 = \{z \in \mathbb{R} \text{ tel que } |z| < 1, \exists \rho > 0, \exists \theta \in]-\theta_0, \theta_0[\text{ et } z = 1 - \rho.e^{i\theta}\}.$$

Alors

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_0}} = \sum_{n \geq 0} a_n.$$

Remarque : Si $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge absolument alors pour $|z| \leq 1$ la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement donc $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est continue sur $|z| \leq 1$.

Exemple :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan(x) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Attention la réciproque est fautive :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+z} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où le théorème suivant.

Théorème 33 (Théorème de Tauber faible). Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1.

On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = S \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Si $a_n = o(\frac{1}{n})$ alors $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et $\sum_{n \geq 0} a_n = S$.

Remarques :

- (1) Il y a un théorème de Tauber fort où on suppose simplement $a_n = O(\frac{1}{n})$, mais ce n'est pas la même démonstration, elle utilise le théorème de Weierstrass.

- (2) Bien regarder dans la démonstration où on utilise l'hypothèse $a_n = o(\frac{1}{n})$ et voir qu'on ne peut pas l'affaiblir en $a_n = O(\frac{1}{n})$.

31. EXERCICES D'ORAL ET QUELQUES IDÉES

31.1. Suites homographiques. Cf : Ovaert analyse T 1 p.44

Quand on a une suite homographique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ où } ad-bc \neq 0. \end{cases}$$

- (i) si $f(z) = z$ a deux solutions α et β alors on pose :

$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$$

et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

- (ii) si $f(z) = z$ a une solution double α alors on pose :

$$v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$$

et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Pourquoi est-ce-qu'on pose cela ? et pourquoi ces résultats ?

Dans le cas (i) on a une homographie avec deux points fixes α et β . si on conjugue f par g où $g(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$ alors $g \circ f \circ g^{-1}(z) = qz$. Ainsi la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_{n+1} = g \circ f \circ g^{-1}(w_n)$ est une suite géométrique.

Dans le cas (ii) on a un point fixe double α ainsi si on conjugue f par h où $h(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ alors $h \circ f \circ h^{-1}(z) = z + r$. Ainsi la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_{n+1} = h \circ f \circ h^{-1}(w_n)$ est une suite arithmétique.

Remarque : “According to me”, ceci est vraiment hyper bien car c'est typiquement une remarque qu'on peut faire pendant la présentation du plan. Cela montre que l'on a du recul et qu'on a fait le lien entre les suites homographiques et le début de la théorie de la géométrie projective qu'évidemment on maîtrise parfaitement, isn't it? .

31.2. Exercice sur les fonctions holomorphes. Soit f une fonction entière non constante et propre. Montrer que f est un polynôme.

Solution : On pose $g(z) = f(\frac{1}{z})$ et comme f est propre, on a :

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty$$

Ainsi $\exists r > 0$ tel que $f(\mathbb{C} - B(0, r)) \subset \mathbb{C} - B(0, \frac{1}{2})$.

Et donc $g(B(0, \frac{1}{r})) \subset \mathbb{C} - B(0, \frac{1}{2})$. i.e. $g(B(0, \frac{1}{r}))$ n'est pas dense donc 0 est un pôle non essentiel de g . i.e. g est méromorphe en 0. Donc f est un polynôme.