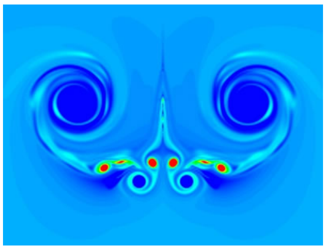
Département de Mathématiques

Étienne Mann

ANALYSE APPROFONDIE S4: L2 À DISTANCE



CNRS INSMI

LAREMA

CENTRE HENRI LEBESGUE CENTRE DE MATHÉMATIQUES

Étienne Mann

LARAEMA Bureau I 116, Faculté des Sciences, 2 Boulevard Lavoisier, F-49045 Angers cedex 01, France.

E-mail : etienne.mann@math.univ-angers.fr

Ce polycopié et les ressources attachées ont été réalisés dans un projet financé par l'université d'Angers.

ANALYSE APPROFONDIE S4: L2 À DISTANCE

Étienne Mann

TABLE DES MATIÈRES

Dans ce cours d'analyse approfondie, nous allons revoir beaucoup d'énoncés que vous avez déjà vu mais avec un point de vu rigoureux. La difficulté de ce cours n'est pas les énoncés mais plutôt la manipulation rigoureuse des quantificateurs ($\exists, \forall, ...$). Ainsi, nous pourrons donner des démonstrations rigoureuses à tous ces théorèmes.
Pour s'entraîner à comprendre ce cours, il faut donc lire en détail les preuves des énoncés.
Pour lire ce cours, je vous conseille en début de chapitre de regarder la vidéo où je présente le chapitre. J'explique les idées importantes et intuitives pendant environ 10 minutes. Dans un second temps, il faudrait lire le cours puis faire les exercices.

CHAPITRE

COMMENT RÉDIGER DES MATHÉMATIQUES ?

Principes généraux de rédactions

Dans ce cours, on va apprendre à rédiger proprement des mathématiques et on va voir qu'il y a des techniques de rédaction et que si on les applique, beaucoup d'exercices ou preuves deviennent faciles. Vos professeurs connaissent ces techniques mais elles ne sont jamais explicites. Après que vous ayez maîtrisé ces techniques, vous pourrez choisir votre propre style mais dans un premier temps, il est bon de les suivre pas à pas.
Dans ce poly, je vais expliciter ces étapes par des couleurs.
Étape 1: Écrire les hypothèses avec des quantificateurs. Dans ce poly, ça sera écrit en violet.
Étape 2: Écrire la conclusion avec des quantificateurs. Dans ce poly, on soulignera <u>cet énoncé.</u>

Un petit exemple facile et assez intuitif vaut mieux que tous les discours.

Exemple .0.1.

Soit f une fonction non bornée et g une fonction bornée. Montrer que il existe x tel que $f(x) > g(x)$.

Solution : Étape 1: On écrit les hypothèses

$$hyp1 : \forall A > 0, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > A$$
$$hyp2 : \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) < A$$

Principe de décoration des lettres. Il faut décorer les lettres qui apparaissent pour ne pas les confondre...en l'occurrence ici, c'est le A qui pose problème. Ainsi par exemple, on change A en B. Parfois, on met des indices aux lettres.

$$hyp1 : \forall A > 0, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > A$$
$$hyp2 : \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) < B$$

Étape 2: Montrons que $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > g(x)$.
Comme il faut trouver un x...on doit commencer par on pose $x = ...$ Par hypothèse 2, on a un l'existence d'un B tel que pour tout x, on a

$$g(x) < B \tag{.1}$$

Comme l'hypothèse 1 est vraie pour tout A, on l'utilise maintenant avec $A = B$ et on obtient

$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > A$$

On en déduit par (.1) que $f(x) > A = B > g(x)$.

Les différents énoncés mathématiques à démontrer.

Montrer $A \Rightarrow B$. — On a deux possibilités :

1. Démonstration directe. On suppose A vraie et on démontre que B est vraie.
   Rédaction:
   On suppose que A est vraie. Montrons que B est vraie.
2. Démonstration par l'absurde. On suppose A vraie et que B est faux et on cherche une contradiction. Rédaction: Il faut absolument marquer **on a une contradiction avec ...**
3. La démonstration par contraposé, càd $NONB \Rightarrow NONA$, est la même chose que par l'absurde donc en pratique on ne la fait jamais. Par contre la contraposé est parfois utile pour reformuler une hypothèse.

Montrer $A \Leftrightarrow B$. — On fait par double implication. On le fait jamais(1) par équivalence.
Rédaction:
Montrer que $A \Rightarrow B$ ...
Montrer que $B \Rightarrow A$ ...

(1)Enfin presque jamais

L'égalité ensembliste. — On veut montrer que les ensembles E et F sont égaux. On montre par double inclusion.

1. $E \subset F$ càd soit $x \in E$. Montrer que $x \in F$.
2. $F \subset E$

La récurrence. — Rédaction.
Soit $n \in A$ où $A \subset \mathbb{N}$. Par exemple $A = \mathbb{N}, \mathbb{N}*$ ou $\mathbb{N}_{\geq 2}$. On considère la proposition suivante

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}\textit{blabla}\text{"}$$

Initialisation. On commence par le plus petit entier de l'ensemble A, noté n_0 et on montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in A$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. bla bla

CHAPITRE I

INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ, BIJECTIVITÉ ET MONOTONIE

Définition I.0.1.

Soient I, J un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to J$ une fonction.

1. On dit que f est **injective** si pour tout x, x' dans I, nous avons
$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$
2. On dit que f est **surjective** si pour tout y dans J, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$.
3. On dit que f est **bijective** si elle est injective et surjective.
4. On dit que $g : J \to I$ est **la réciproque** de f si $f \circ g = \mathrm{id}_J$ et $g \circ f = \mathrm{id}_I$.

Exercice I.0.2. — Montrer que $f : I \to J$ est bijective si et seulement si pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

Solution de l'exercice I.0.2. — Pour montrer cette équivalence, on procède par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ hypothèse: f est bijective càd injective et surjective.
Montrons que $\forall y \in J, \exists! x \in I, f(x) = y$. Soit $y \in J$. Par surjectivité, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Pour montrer l'unicité de x, on suppose qu'il en existe deux càd soient x, x' tels que $f(x) = f(x') = y$ et montrons que $x = x'$. L'injectivité de f nous donne exactement que $x = x'$.
$\boxed{\Leftarrow}$ hyp $\forall y \in J, \exists! x \in I, f(x) = y$.
Montrons que f est injective et surjective. Montrons que f est surjective. Soit $y \in J$. Par hypothèse, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Donc f est surjective.
Montrons que f est injective. Soit $x, x' \in I$ tel que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. On pose $y = f(x)$, par hypothèse, il existe un unique x tel que $f(x) = y$. On en déduit que $x = x'$. □

Proposition I.0.3 (Preuve en exercice)**.**

1. *Si $f \circ g$ est injective alors g est injective.*
2. *Si $f \circ g$ est surjective alors f est surjective.*
3. *Si f admet une fonction réciproque alors elle est unique.*
4. *Soit $f : I \to J$ une fonction. La fonction f est bijective si et seulement si f admet une fonction réciproque.*

Comme la réciproque est unique, on la note f^{-1}.

Définition I.0.4.

Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction

1. Une fonction est **croissante** si
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$
2. Une fonction est **strictement croissante** si
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$
3. Une fonction est **décroissante** si
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$
4. Une fonction est **strictement décroissante** si
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Proposition I.0.5.

Toute fonction strictement croissante (ou décroissante) $I \to \mathbb{R}$ réalise un bijection sur son image.

Remarque I.0.6.

La conséquence importante de cette proposition et de la proposition I.0.5 est qu'une fonction strictement croissante (ou décroissante) admet une réciproque. Dans la suite, nous verrons des fonctions classiques qui admettent des réciproques : l'exponentielle et les fonctions trigonométriques.

Preuve de la Proposition I.0.5. — hypothèse: $\forall x, y,\ x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
Montrons que $\forall x, x' \in I,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
Soit $x, x' \in \mathbb{R}$. Par l'absurde, supposons que $f(x) = f(x')$ et que $x \neq x'$. On a soit $x > x'$ ou $x' > x$. Comme f est strictement croissante, on a par l'hypothèse 1, soit $f(x) > f(x')$ ou $f(x) < f(x')$. Ce qui contredit que $f(x) = f(x')$. □

Exercice I.0.7. — Montrer qu'une fonction strictement monotone est injective.

On a quatre applications très importantes de cette proposition.

La fonction exponentielle est strictement croissante $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Elle admet une fonction réciproque qui est le **logarithme** (Voir Figure 1).

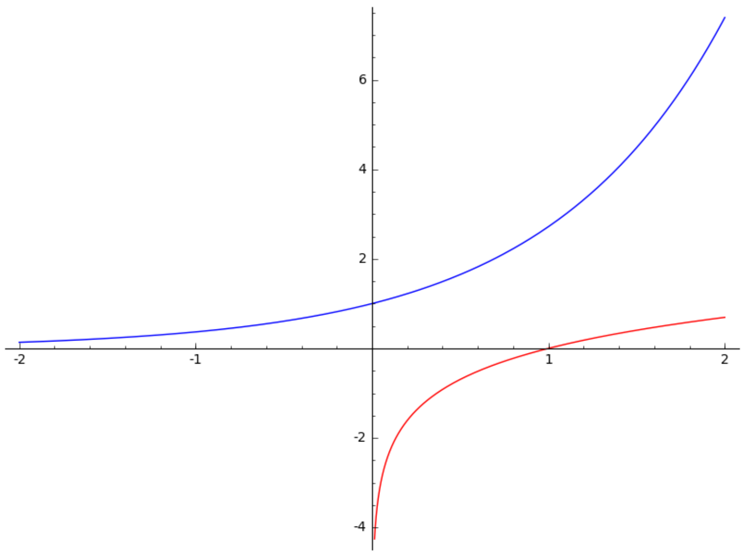


FIGURE 1. Exponentielle (bleu) et logarithme (rouge)

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi] \to [-1, 1]$. On en déduit une fonction **arccosinus** $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ (Voir Figure 2).

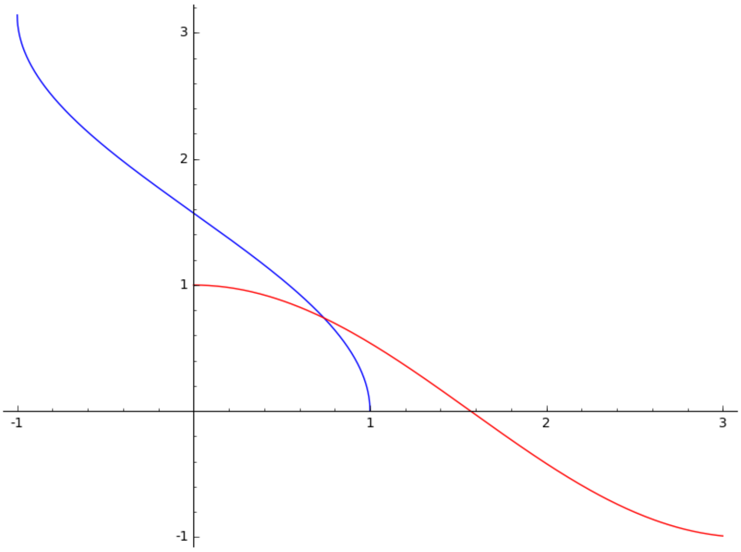


FIGURE 2. arccosinus (bleu) et cosinus (rouge)

La fonction sinus est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$. On en déduit une fonction **arcsinus** arcsin : $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ (Voir Figure 3).

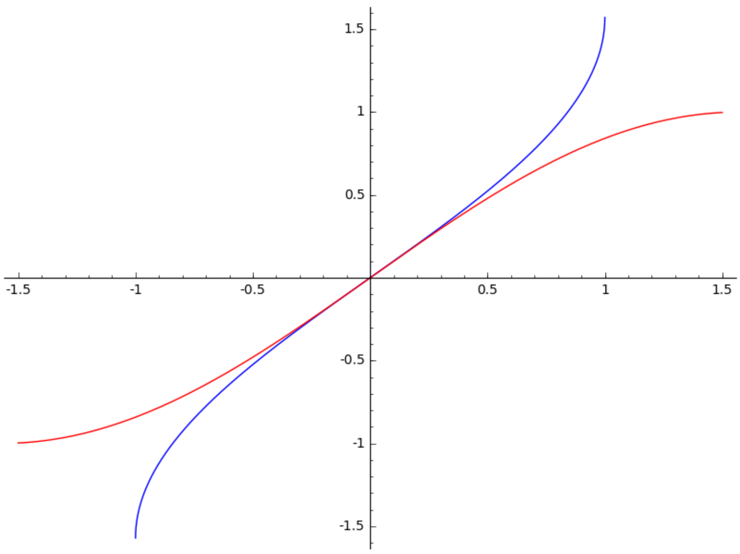


FIGURE 3. arcsinus (bleu) et sinus (rouge)

La fonction tangente est strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[\to]-\infty, +\infty[$. On en déduit une fonction **arctangente** $\arctan :]-\infty, +\infty[\to]-\pi/2, \pi/2[$. Voir Figure 4.

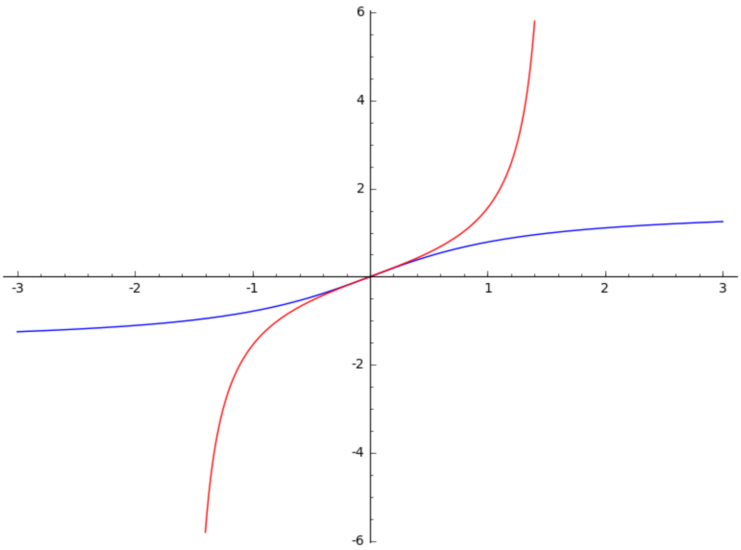


FIGURE 4. arctangente (bleu) et tangente (rouge)

Dans ces 4 exemples, nous voyons que les graphes de f et de sa réciproques f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. Ceci est un fait général que nous pouvons démontrer en exercice.

Exercice I.0.8. — Soit f une fonction bijective et f^{-1} sa fonction réciproque. Montrer que les graphes de f et de f^{-1} sont symétrique l'un de l'autre par rapport à la droite $y = x$.

CHAPITRE II

TOPOLOGIE DES RÉELS

Dans ce chapitre nous ne donnerons pas la construction de nombre réel qui est un point délicat. On s'appuiera sur la notion intuitive que chacun s'est faite.

Définition II.0.1.

1. Un ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit **ouvert**, si pour tout élément x de E, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x+\varepsilon, x-\varepsilon[\subset E$.
2. Un ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit **fermé**, si son complémentaire, c'est-à-dire $\mathbb{R} \setminus E$ est ouvert.
3. Un ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit **borné**, s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $E \subset [a, b]$.

Remarque II.0.2.

- Les intervalles $]a, b[$, $]-\infty, a[$ ou $]b, +\infty[$ sont ouverts.
- Les intervalles $[a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$ sont fermés et leur réunion *finie* est aussi fermé. Les singletons $\{x\}$ sont aussi fermés.
- Remarquez que $\mathbb{R}$ est à la fois ouvert et fermé et donc son complémentaire, l'ensemble vide, noté $\emptyset$, est aussi à la fois ouvert et fermé. Les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouverts et fermés sont $\mathbb{R}$ et $\emptyset$. On dit que $\mathbb{R}$ est "connexe". Une théorie entière des maths qui s'appelle la topologie part de là mais ce n'est pas l'objet de ce cours.
- Les ensembles fermés et bornés sont très importants, on les appelle les compacts. Nous les étudierons plus en détails dans un autre cours (cf cours de topologie).

Les ensembles fermés ont une caractérisation séquentielle c'est-à-dire qu'on peut déterminer si un ensemble est fermé par des suites. Voici l'énoncé précis.

Proposition II.0.3.

Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$ est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de F qui converge a une limite dans F.

Démonstration. — $\boxed{\Rightarrow}$ Hypothèse: F est fermé càd $\mathbb{R} - F$ est ouvert

Soit (x_n) une suite d'élément de F qui converge vers x. Montrer que $x \in F$.

Par l'absurde, supposons que $x \notin F$, càd x est dans l'ouvert $\mathbb{R} - F$. Ainsi par définition, il existe ε tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \mathbb{R} - F$. Or comme la suite (x_n) converge vers x, pour cet ε, il existe N tel que pour tout $n > N$, $u_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \mathbb{R} - F$. Ceci contredit que tous les éléments de la suite sont dans F.

$\boxed{\Leftarrow}$Hypothèse: $(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\forall n, x_n \in F)$ et $x_n \to x) \Rightarrow x \in F$

Montrer que $\mathbb{R} - F$ est ouvert.

Par l'absurde supposons que $\mathbb{R} - F$ ne soit pas ouvert càd qu'il existe $y \in \mathbb{R} - F$ tel que pour tout ε, $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\not\subset \mathbb{R} - F$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prenons $\varepsilon = 1/n$. On a $]y - 1/n, y + 1/n[\not\subset \mathbb{R} - F$. Ainsi, on peut trouver $x_n \in]y - 1/n, y + 1/n[\cap F$. On construit alors une suite (x_n) qui converge clairement vers y et donc par hypothèse ceci implique $y \in F$ ce qui contredit $y \notin F$. □

Définition II.0.4.

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. Un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est **adhérent** à E si pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap E \neq \emptyset$.
2. Un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est un **point d'accumulation** à E si pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap E$ contient un autre point que x_0.
3. Un point $x_0 \in E$ est **intérieur** à E s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ soit contenu dans E.

Remarquez qu'on peut écrire ces 3 définitions avec "plus" de quantificateur. Par exemple, pour x_0 adhérent à E peut s'écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, |x - x_0| < \varepsilon$$

Exercice II.0.5. — Ecrire les autres définitions avec "plus" de quantificateur.

Remarque II.0.6.

- Un point d'accumulation est aussi un point adhérent mais le contraire est faux.
- Le nombre 1 est adhérent et aussi un point d'accumulation de $E =]0, 1[$.
- Le nombre 1 est adhérent à $E = \{1\}$ mais ce n'est pas un point d'accumulation.

Exercice II.0.7. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que ℓ est un point adhérent de $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
2. Quelle condition rajouter à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que ℓ soit un point d'accumulation ? *Indication : Que ce passe -t-il si (u_n) est une suite constante.*

Proposition II.0.8.

Pour que $a \in \mathbb{R}$ soit un point d'accumulation de E il faut et il suffit que pour tout ouvert I contenant a, l'ensemble $I \cap E$ soit infini.

Démonstration. — On procède par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ hypothèse :$\forall \varepsilon > 0, \exists b \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap E$ et $b \neq a$.

Montrons que pour tout intervalle I contenant a, $I \cap E$ contient une infinité de points.

Soit I un intervalle contenant a. Comme a un point d'accumulation, nous appliquons la définition du point d'accumulation avec $\varepsilon = 1/n$. Ainsi, nous construisons des intervalles $]a - 1/n, a + 1/n[$, qu'on note I_n, qui contiennent chacun un autre point, noté x_n, dans I_n que x_0. Nous pouvons même supposer que $x_n \neq x_m$. Comme les intervalles I_n sont de plus en plus petits, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, $I_n \subset I$.

$\boxed{\Leftarrow}$ hypothèse: pour tout intervalle I contenant a, $\#I \cap E = +\infty$

Montrons que $\forall \varepsilon > 0, \exists b \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap E$ et $b \neq a$

Soit $\varepsilon > 0$. L'intervalle $J =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ est ouvert et contient a. Par hypothèse $J \cap E$ est infini donc il contient un autre point que a. □

Remarque II.0.9.

Le lecteur attentif aura remarqué que la phrase "Nous pouvons même supposer que $x_n \neq x_m$" dans la démonstration ci-dessus mérite des explications. Voici l'argument plus précis mais un peu plus lourd. On construit par récurrence la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments tous différents dans I. Supposons qu'on ait construit $x_0, \ldots, x_n$ dans I tous différents. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - a| > 1/N$. En prenant $\varepsilon = 1/N$, on obtient I_N qui par hypothèse contient un point, noté x_{n+1}, qui est différent de $x_0, \dots, x_n$.

Définition II.0.10.

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On note $\overline{A}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de A.

Remarque II.0.11.

1. Soit A un ensemble de $\mathbb{R}$. Peut-on construire un fermé qui le contient et qui est le plus petit. C'est l'objet de l'exercice II.0.15 qu'on verra en TD.
2. Dans la même idée, on pourrait vouloir définir un ouvert associé à A qui est le plus grand contenu dans A. Cet ouvert s'appelle l'intérieur de A, on le note $\mathring{A}$, et il est défini par l'ensemble des points intérieurs à A. Nous ne développerons pas cette notion dans ce cours.

Exercice II.0.12. — Montrer que $A \subset \overline{A}$.

Proposition II.0.13.

Un point $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Démonstration. — A faire en exercice.

□

Exemple II.0.14.

On va montrer que $\overline{[0,1[} = [0,1]$. Montrons que $1 \in \overline{[0,1[}$. Il suffit de considérer la suite $x_n = 1 - 1/n$. On a $x_n \in [0,1[$ et $x_n \to 1$.

Exercice II.0.15. —

1. Montrer que $\overline{A}$ est le plus petit fermé qui contient A, c'est à dire
$$\overline{A} = \cap_{F|A\subset F} F, \quad \text{où } F \text{est fermé}$$
2. En déduire que A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

CHAPITRE III

BORNE SUPÉRIEURE ET INFÉRIEURE

Définition III.0.1.

1. Soit E un ensemble majoré de $\mathbb{R}$. La **borne supérieure** de E est un réel noté $\sup E$, telle que
   (a) tout élément de E est plus petit que $\sup E$
   (b) si M est un autre majorant alors $\sup E \leq M$
2. Soit E un ensemble minoré de $\mathbb{R}$. La **borne inférieure** de E est un réel, noté $\inf E$, telle que
   (a) tout élément de E est plus grand que $\inf E$
   (b) si m est un autre minorant alors $\inf E \geq m$

Remarque III.0.2.

On dit que la borne supérieure est le plus petit des majorants et que la borne inférieure est le plus grand des minorants.

Théorème III.0.3 (Admis)**.**

Soit E un ensemble majoré (resp. minoré) de $\mathbb{R}$ alors la borne supérieure (resp. inférieure) existe.

Remarque III.0.4.

La démonstration utilise la construction des nombres réels ce qui n'est pas l'objet de ce cours.

Proposition III.0.5.

1. *Soit E un ensemble majoré de $\mathbb{R}$. Un réel M est la borne supérieure si et seulement si M est un majorant et*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x > M - \varepsilon$$
2. *Soit E un ensemble minoré de $\mathbb{R}$. Un réel m est la borne inférieure si et seulement si M est un minorant et*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x < m + \varepsilon$$

Démonstration. — Nous allons démontrer le premier énoncé, le second est du même style.
$\boxed{\Rightarrow}$. hypothèse : M est la borne supérieure càd

$$\forall x \in E, x < M \tag{III.1}$$
$$\forall M', (\forall x \in E, x < M') \Rightarrow (M' > M) \tag{III.2}$$

Remarquer que (III.2) peut aussi s'écrire en utilisant la contraposé de l'implication càd

$$\forall M', (M' < M) \Rightarrow (\exists x \in E, x > M') \tag{III.3}$$

Montrer que M est un majorant et que $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x > M - \varepsilon$.
L'hypothèse (III.1) signifie exactement que M est un majorant. Soit $\varepsilon > 0$. En prenant $M' = M - \varepsilon$ dans (III.3), on a $M' = M - \varepsilon < M$ et donc il existe x dans E tel que $x > M' = M - \varepsilon$.
$\boxed{\Leftarrow}$. Les hypothèses sont:

$$\forall x \in E, x < M \tag{III.4}$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x > M - \varepsilon \tag{III.5}$$

Montrer que M est un majorant et que $\forall \widetilde{M}, (\widetilde{M} < M) \Rightarrow (\exists x \in E, x > \widetilde{M})$
Soit $\widetilde{M}$ un réel tel que $\widetilde{M} < M$. On pose $\varepsilon = (M - \widetilde{M})/2 > 0$. Par (III.5), il existe $x \in E$ tel que

$$x > M - \varepsilon = \frac{\widetilde{M} + M}{2} > \widetilde{M}$$

□

Remarque III.0.6.

Remarquer que la borne inférieure ou supérieure n'est pas forcément dans l'ensemble. Par exemple $E = \{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$, nous avons $\inf E = 0$ mais $0 \notin E$.

Voici une proposition que vous connaissez mais peut-être sans démonstration.

Proposition III.0.7.

1. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissante est majorée converge vers* $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
2. *Une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante est minorée converge vers* $\inf\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Démonstration. — Nous n'allons démontrer que le premier point car le second est exactement le même.
Hypothèse: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée càd

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \geq n_2 \Rightarrow u_{n_1} \geq u_{n_2} \tag{III.6}$$

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n < M \tag{III.7}$$

Comme la suite est majorée, alors l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré et donc il admet une borne supérieure (cf Théorème III.0.3). Notons $\ell = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
Montrer que u_n converge ℓ, càd $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la Proposition III.0.5, il existe une élément de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plus grand que $\ell - \varepsilon$ càd il existe N tel que $\ell \geq u_N \geq \ell - \varepsilon$. Comme la suite est croissante, nous avons que pour tout $n > N$, $u_n \geq u_N$ et donc nous en déduisons l'encadrement

$$\forall n > N, \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell.$$

Remarquez que la majoration de droite vient du fait que ℓ est la borne supérieure et donc un majorant de la suite. Ce qui implique que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. □

CHAPITRE IV

THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Théorème IV.0.1 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.**

De toute suite bornée, on peut extraire un suite convergente.

Démonstration. — Hypothèse: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\exists A > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < A$.
Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, elle est contenu dans un intervalle $[a, b]$. On va construire une sous-suite (v_n) de façon récursive.

Étape 1. On coupe l'intervalle $I = [a, b]$ en deux moitiés $I_- = [a, \frac{b-a}{2}]$ et $I_+ = [\frac{b-a}{2}, b]$. Un de ces deux intervalles I_+ ou I_- contient une infinité d'éléments de la suite, disons I_-. On prend v_1 le premier élément de la suite (u_n) qui est dans I_-.
Étape 2. On applique l'idée précédente à I_-.

De cette façon, nous avons construit une suite (v_n) où les termes (v_n) sont tous dans un intervalle de longueur $\frac{b-a}{2^n}$, noté $[a_n, b_n]$. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et converge vers la même limite, notée ℓ. Nous avons $a_n \leq v_n \leq b_n$. En passant à la limite nous avons que v_n converge ℓ. □

Corollaire IV.0.2.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide. Pour que A soit fermée et bornée, c'est-à-dire A est une réunion finie d'intervalle du type $[a, b]$, il faut et il suffit que toute suite d'éléments de A admette une sous-suite convergente dans A.

Démonstration. — $\boxed{\Rightarrow}$ Soit (u_n) une suite de A. Cette suite est bornée car A est bornée. Le Théorème précédent implique qu'il existe une sous-suite convergente.
$\boxed{\Leftarrow}$ On le démontre par l'absurde.
Hyp 1: toute suite d'éléments de A admette une sous-suite convergente dans A.
Hyp 2: A n'est pas fermé ou A n'est pas bornée.

- Si A n'est pas bornée, on peut construire une suite et qui est arbitrairement grande qui n'a aucune sous-suite convergente. Ce qui contredit l'hypothèse 1.

- Supposons que A ne soit pas fermé. Montrons qu'on obtient une contradiction avec l'hypothèse 1. C'est-à-dire qu'il faut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle qu'aucune sous-suite ne soit convergente dans A.

  On considère l'adhérence de A, noté $\overline{A}$:
  $$\overline{A} := \{a \mid a \quad \text{soit valeur d'adhérence de } A\}.$$
  On vérifie que A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$ (cf Exercice II.0.15). Si A n'est pas fermé alors il existe $x \in \overline{A} \setminus A$. Rappelons la définition de x adhérent à A (cf Définition II.0.4).
  Hyp 3: $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ tel que $|x - a| < \varepsilon$
  Nous utilisons l'hypothèse 3 avec $\varepsilon = 1/n$ et on a qu'il existe un élément, noté $x_n \in A$ tel que $|x_n - x| < 1/n$. Comme $x \notin A$, on a même que $x_n \neq x$. Ainsi, on a construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de A.

  Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x c'est-à-dire montrons que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |x_n - x| < \varepsilon$
  Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $1/N < \varepsilon$. On obtient alors que pour tout $n > N$, $|x_n - x| < 1/n$ par construction de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on a $1/n < 1/N < \varepsilon$. On en déduit que (x_n) converge vers x. Remarquez que je viens de démontrer la Proposition II.0.13.

  Au final, on a construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de A qui converge vers x qui n'est pas dans A.

  Ce qui contredit l'hypothèse 1 car la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'élément de A qui converge vers x qui n'est pas dans A et toute sous-suite d'une suite convergente est convergente vers la même limite.

□

CHAPITRE V

LIMITE

Voici des exemples de définitions des limites.

Définition V.0.1.

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in]a, b[$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \quad (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \quad (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \quad (x > \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Évidemment, on peut écrire d'autres limites avec les quantificateurs. En voici 6 autres.

Exercice V.0.2. — En TD et sur l'espace moodle, on a l'exercice suivant. Écrire avec des quantificateurs les limites suivantes

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = x_0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Proposition V.0.3.

1. *Quand les limites sont finies, elles sont compatibles aux sommes, différences, aux produits, aux quotients et aux composées.*

2. *Par passage à la limite les inégalités strictes deviennent larges.*
3. *Les formes suivantes sont indéterminées*

$$\frac{0}{0}, \quad 0.\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty$$

4. *Dans les cas suivants, nous avons*

$$\frac{0}{\infty} = 0, \quad \infty.\infty = \infty$$

Démonstration. — 1. – **La somme** Par hypothèse nous avons

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x, \quad (|x - x_0| < \delta_1) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon_1 \tag{V.1}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall x, \quad (|x - x_0| < \delta_2) \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \epsilon_2 \tag{V.2}$$

Remarquez que je mets des indices aux lettres identiques pour ne pas les mélanger.
Montrons que

$$\forall \varepsilon_3 > 0, \exists \delta_3 > 0, \forall x, \quad (|x - x_0| < \delta_3) \Rightarrow |f(x) + g(x) - \ell - \ell'| < \epsilon_3$$

Soit $\varepsilon_3 > 0$. On utilise (V.1) avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_3/2$ et (V.2) avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_3/2$. On obtient δ_1 et δ_2. On pose $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$. Ainsi pour tout x tel que $|x - x_0| < \delta_3$, nous avons $|f(x) - \ell| < \varepsilon_1$ et $|f(x) - \ell'| < \varepsilon_2$. L'inégalité triangulaire nous montre que

$$|f(x) + g(x) - \ell - \ell'| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| < \varepsilon_3/2 + \varepsilon_3/2 = \varepsilon_3.$$

– **Le produit** Pour le produit, on utilise la même technique que pour la somme avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_3/\ell'$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon_3/\ell$.

$$f(x)g(x) - \ell\ell' = (f(x) - \ell)(g(x) - \ell') + \ell(g(x) - \ell') + \ell'(f(x) - \ell)$$

puis l'inégalité triangulaire. On obtient alors la majoration suivante

$$|f(x)g(x) - \ell\ell'| < \varepsilon_3^2/\ell.\ell' + 2.\varepsilon_3$$

Ce qui finit la démonstration.

– **Le quotient** Le cas délicat est celui du quotient. Supposons que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell' \neq 0$. Montrons que $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = \ell/\ell'$. Evidemment, un quotient est une multiplication par l'inverse et on est donc tenter d'utiliser le cas du produit. Cependant, il faut faire attention car il faut se placer sur un intervalle où $g(x) \neq 0$ puis utiliser le cas du produit. Pour cela, on utilise le lemme suivant.

Lemme V.0.4.

Soit g une fonction telle que $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell' > 0$ alors il existe δ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$, on ait $g(x) > 0$.

Preuve du lemme V.0.4. — Hypothèse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \quad (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \epsilon$$

Montrer que $\exists \delta, \forall x \in]a-\delta, a+\delta[,\ g(x) > 0$ Par définition de la limite sur g, si on prend $\varepsilon = \ell'/2$, il existe $\delta > 0$ tel que pour x tel que $|x - x_0| < \delta$, on a $g(x) \in]\ell'/2, 3\ell'/2[$ et donc $g(x) \neq 0$ sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. □

Après, on utilise la majoration sur le produit pour conclure.

- **La composée.** Supposons que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to \ell} g(x) = \ell'$. Montrer que $\lim_{x\to x_0} g \circ f(x) = \ell'$. Ceci se fait simplement, en appliquant les définitions des limites.

2. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$. Il faut démontrer que si pour tout x, on a $h(x) > 0$ alors $\lim_{x\to x_0} h(x) \geq 0$. Par l'absurde, supposons que $\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell < 0$. Alors par le lemme V.0.4, nous avons qu'il existe un intervalle autour de x_0 tel que $h(x) < 0$. Ce qui contredit que pour tout x, $h(x) \geq 0$.
3. Les cas d'indétermination viennent de contre exemple. Pour $0/0$, il suffit de voir que $\lim_{x\to 0} x/x^2 \neq \lim_{x\to 0} x/x$.
4. Hypothèse

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x, \quad (|x - x_0| < \delta_1) \Rightarrow |f(x)| < \epsilon_1 \tag{V.3}$$

$$\forall A > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall x, \quad (|x - x_0| < \delta_2) \Rightarrow g(x) > A \tag{V.4}$$

Montrons que

$$\forall \varepsilon_3 > 0, \exists \delta_3 > 0, \forall x, \quad (|x - x_0| < \delta_3) \Rightarrow |f(x)/g(x)| < \epsilon_3$$

Soit $\varepsilon_3 > 0$. On applique (V.3) avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_3^3$, on en déduit qu'il existe δ_1 tel que si $|x - x_0| < \delta_1$ alors $|f(x)| < \varepsilon_3^2$. Pour g, on prend $A = 1/\varepsilon_3$ dans (V.4) et nous obtenons l'existence de δ_2 tel que si $|x - x_0| < \delta_2$ alors $g(x) > 1/\varepsilon_3$ càd $1/g(x) < 1/\varepsilon_3$. On pose $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$, nous obtenons que pour tout x tel que $|x - x_0| < \delta_3$, nous avons

$$f(x)/g(x) < \varepsilon_3^2/\varepsilon_3 = \varepsilon_3.$$

□

La proposition suivante est parfois utile pour démontrer qu'une fonction n'a pas de limite. La preuve sera faite en exercice car elle est très formatrice

Proposition V.0.5.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *telle que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. *Pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $x_n \to x_0$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

Remarque V.0.6.

On peut avoir la même proposition sur toute les formes de limite possible c'est-à-dire $x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Exemple V.0.7.

Montrer que le sinus n'a pas de limite en $+\infty$.
On le montre par l'absurde. Supposons que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Si on considère la suite $x_n = 2\pi n$ alors on obtient que $\lim \sin(x_n) = 0$ donc $\ell = 0$. Pour la suite $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, on obtient $\lim \sin(y_n) = 1$ donc $\ell = 1$. Ceci est une contradiction.

Remarque V.0.8.

Dans la suite, nous aurons besoin d'une petite variante

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \quad (|x - x_0| < \delta, x \neq x_0) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Théorème V.0.9 (Théorème de la limite monotone)**.**

Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante. Alors soit sa limite en $+\infty$ est $+\infty$ soit elle est finie et c'est sa borne supérieure.

Remarque V.0.10.

Remarquer que dans l'énoncé ci-dessus, on ne suppose pas que la fonction soit continue. Cette énoncé est à mettre en parallèle avec le théorème suivant sur les suites. Toute suite croissante et majorée est converge vers sa borne supérieure.

Démonstration. — Hyp: $\forall x, y \quad (x > y \Rightarrow f(x) > f(y))$
On considère l'ensemble image de f c'est-à-dire l'ensemble $E = \{f(x) \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}$. On a deux possibilités

1. Soit E est borné et il faut montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup E$.
2. Soit E n'est pas borné et il faut montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Cas 1. Montrons que si E est borné alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup E$.
Comme l'ensemble $E = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ est borné et donc d'après le Théorème de la borne supérieure (cf Théorème III.0.3), l'ensemble E a une borne supérieure, notée ℓ.
Montrons que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$. C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M, \forall x, x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$, par Proposition III.0.5, il existe $y_0 \in E$ tel que $y_0 > \ell - \varepsilon$. Par définition de E, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 = f(x_0)$. On pose $M = x_0$. Maintenant, par croissance de f, nous avons que pour tout $x > M = x_0$, on a $f(x) > f(x_0) = y_0 > \ell - \varepsilon$ et $f(x) \leq \ell$ car ℓ est la borne supérieure. Donc $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, ce qui finit la preuve du cas 1.
Cas 2. Montrons que si E n'est pas borné alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. C'est-à-dire

$$\forall A > 0, \exists M, \forall x, x > M \Rightarrow f(x) > A$$

Soit $A > 0$. Comme E n'est pas borné il existe x_0 tel que $f(x_0) > A$. On pose $M = x_0$. La croissance stricte de f, immplique que pour tout $x > M$, nous avons $f(x) > f(x_0) > A$. Ainsi, nous avons démontré que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. □

CHAPITRE VI

CONTINUITÉ ET UNIFORME CONTINUITÉ

VI.1. Continuité

Définition VI.1.1.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue en** x_0 si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0)$.
On dit que f est **continue sur un intervalle** si f est continue en tout point de cet intervalle.

Exercice VI.1.2 **(Exercice assez difficile à mettre en place techniquement.)**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Montrer que f est continue si et seulement si elle vérifie que pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ est ouvert.
2. Montrer que f est continue si et seulement si elle vérifie que pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(F)$ est fermé.

De la Proposition V.0.3 et de la définition ci-dessus, on en déduit immédiatement la proposition suivante.

Proposition VI.1.3.

La somme, le produit et la composé de fonction continue est encore continue.

Théorème VI.1.4.

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $a \in D$. La fonction f est continue en a si et seulement si pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de D qui converge vers a alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Démonstration. — $\boxed{\Rightarrow}$. Écrivons les hypothèses

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta, \forall x \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon_1 \tag{VI.1}$$

Montrons que si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ càd l'implication suivante :

$$[\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall \varepsilon_2 > 0, \exists N_2, \forall n, (n > N_2) \Rightarrow (|u_n - a| < \varepsilon_2)] \tag{VI.2}$$

$$\Rightarrow [\forall \varepsilon_3 > 0, \exists N_3 \in \mathbb{N}, \forall n, (n > N_3) \Rightarrow |f(u_n) - f(a)| < \varepsilon_3] \tag{VI.3}$$

Au final, on suppose (VI.1) et (VI.2) et on doit démontrer (VI.3). Soit $\varepsilon_3 > 0$. On utilise la continuité de f avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$. Ce qui nous donne l'existence de δ. On utilise (VI.2) avec $\varepsilon_2 = \delta$ pour avoir l'existence d'un N_2 tel que pour tout $n > N_2$, on ait $|u_n - a| < \delta$ et donc $|f(u_n) - f(a)| < \varepsilon_3$ par (VI.1).
$\boxed{\Leftarrow}$. On va démontrer la contraposé.
Supposons que f ne soit pas continue en a, càd

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \quad \exists x, |x-a| < \delta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \varepsilon \tag{VI.4}$$

Montrons qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a et telle que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$.
On construit la suite (u_n) en prenant $\delta = 1/n$. Il existe u_n (qui est le x dans la formule (VI.4)) tel que

$$|u_n - a| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(u_n) - f(a)| > \varepsilon$$

On conclut que la suite (u_n) converge vers a mais que la suite $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

□

Théorème VI.1.5.

Soit I un intervalle fermé et borné (càd un compacte de $\mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}$.
En particulier, f admet un maximum et un minimum sur I.

Démonstration. — Soit (y_n) une suite de $f(I)$. Pour chaque n, on choisit $x_n \in I$ tel que $f(x_n) = y_n$. On en déduit une suite (x_n) de I. Le Corollaire IV.0.2, on peut trouver une sous-suite de (x_n) qui est converge vers a dans I. Par continuité de f en a, on en déduit que l'image de cette sous-suite et une sous-suite de (y_n) qui converge vers $f(a)$. Le corollaire IV.0.2 montre que $f(I)$ est fermé et borné.
En particulier, $f(I)$ a un maximum et un minimum. □

Lemme VI.1.6.

Soit D un intervalle et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration. — On note $E := \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\}$. Cet ensemble est non vide car $a \in E$ et il est contenu dans $[a, b]$, il admet donc une borne supérieure, notée c.
Montrons que $f(c) \leq y$.
Par définition, il existe une suite (u_n) d'éléments de E telle que $u_n \in E$ et $u_n \to c$. On obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(u_n) \leq y$. Donc à la limite par continuité de f, nous avons $f(c) \leq y$.
Montrons que $f(c) \geq y$.
On considère l'ensemble $F = \{x \in [c, b] \mid f(x) > y\}$. On a que $\inf F = \sup E = c$. Ainsi, on peut trouver une suite (v_n) telle que $v_n \in F$ et $v_n \to c$. On a alors $f(v_n) > y$. Ainsi à la limite et par continuité de f, nous avons $f(c) \geq y$ □

Théorème VI.1.7 (Théorème des valeurs intermédiares)**.**

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration. — Soit $y_1, y_2 \in f(I)$ et soit $y \in [y_1, y_2]$.
Montrer qu'il existe x tel que $f(x) = y$.
Par définition, il existe x_1 et x_2 tels que $f(x_i) = y_i$. Ainsi, le lemme précédent implique qu'il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) = y$. □

Remarque VI.1.8.

Ce théorème se généralisera dans un cours de topologie par l'image d'un connexe est un connexe par une application continue. Dans $\mathbb{R}$, les connexes sont les intervalles.

VI.2. Continuité uniforme

Définition VI.2.1.

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite **uniformément continue** si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in D^2, (|x - y| < \alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)}$$

Remarque VI.2.2.

La continuité est une propriété locale par contre l'uniforme continuité est une propriété globale.

Exercice VI.2.3. — 1. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ qui envoie $x \mapsto x^2$ est uniformément continue.
2. Montrer que $g(x) = 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1[$.

En appliquant les définitions, on obtient directement la proposition suivante

Proposition VI.2.4.

Si f est uniformément continue, alors f est continue.

Nous avons une réciproque à la proposition précédente mais avec une hypothèse supplémentaire.

Théorème VI.2.5 (Théorème de Heine)**.**

Une fonction continue sur un intervalle fermé et borné, noté $[a, b]$, est uniformément continue.

Démonstration. — On va le démontrer par l'absurde.
Hypothèse: on suppose que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$. C'est à dire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x, y \in [a, b], (|x - y| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)$$

On va construire deux suites (x_n) et (y_n) de la façon suivante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $\alpha = 1/n$. Comme f n'est pas uniformément continue, il existe x_n et y_n tels que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass IV.0.1, il existe deux sous-suites $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergente dans $[a, b]$ telles que

$$|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$$

On en déduit que les sous-suites, $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergent vers la même limite, notée $\ell \in [a, b]$. Or f est continue en ℓ, donc le Théorème VI.1.4 implique que

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} f(v_{\varphi(n)}) = f(\ell)$$

En passant à la limite dans $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$, nous obtenons $0 \geq \varepsilon$. Ce qui contredit $\varepsilon > 0$. □

On a une très belle application du théorème de Heine qui est le suivant

Théorème VI.2.6 (Théorème de Weierstrass)**.**

Soit f une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Il existe une suite de polynôme $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f.

La démonstration sera faite en devoir.

Remarque VI.2.7.

1. Ce théorème est très intéressant car il permet de dire que les fonctions de classe C^∞ sont denses dans les fonctions continues c'est-à-dire
$$\overline{C^\infty([a, b])} = C^0([a, b]).$$
Qualitativement, ceci signifie qu'on a "beaucoup" de fonctions C^∞.
2. La démonstration que je vous propose en devoir repose sur des polynômes explicites.
3. On pourrait avoir une autre idée pour démontrer ce théorème en passant par les polynômes d'interpolation de Lagrange mais ça ne marche par car nous n'avons pas de convergence uniforme des polynômes d'interpolation...mais ceci est une autre histoire.

CHAPITRE VII

DÉRIVABILITÉ

Définition VII.0.1.

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in]a, b[$. On dit que f est **dérivable en** x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et qu'elle est finie.
On dit que f est **dérivable sur** $]a, b[$ si elle est dérivable en tout point de $]a, b[$.

Proposition VII.0.2.

1. *La somme, différence, produit, quotient et composée de fonctions dérivables est dérivable.*
2. *Si f est dérivable alors elle est continue.*

Démonstration. — 1. Le premier point vient directement de la Proposition V.0.3.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la dérivabilité, il existe δ tel que $|x - x_0| < \delta$, nous avons

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell \right| < \varepsilon$$

On multiplie l'inégalité ci-dessus par $|x - x_0|$ et on utilise la majoration $|a| - |b| \leq |a - b|$. Nous en déduisons que

$$|f(x) - f(x_0)| < (\ell + \varepsilon)|x - x_0| < (\ell + \varepsilon)\delta$$

Quitte à diminuer δ, on peut supposer que $(\ell + \varepsilon)\delta < \varepsilon$, ce qui termine la démonstration.

□

Exercice VII.0.3. — A l'aide de la formule de la dérivée d'une composée, montrer que

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Proposition VII.0.4.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable croissante (resp. décroissante). Alors $f'(x)$ est positive (resp. négative).

Remarquez que c'est surtout l'autre sens qui nous intéresse. Ceci ferra l'objet d'une autre proposition.

Démonstration. — La croissance implique que le quotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est toujours positif. A la limite, c'est encore vrai. □

Proposition VII.0.5.

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable. Si x_0 est un maximum ou minimum local de f alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. — Supposons que f admette un maximum local en x_0. Soit J un intervalle contenant x_0 tel que $f(x) \leq f(x_0)$. Sut cet intervalle,

- Si $x < x_0$ alors le quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est positif. Ainsi à la limite, nous avons $f'(x_0) \leq 0$.
- Si $x > x_0$ alors le quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est négatif. Ainsi à la limite, nous avons $f'(x_0) \geq 0$.

Nous en concluons que $f'(x_0) = 0$. □

CHAPITRE VIII

REVOIR LES THÉORÈMES CLASSIQUES D'ANALYSE AVEC LES QUANTIFICATEURS

VIII.1. Théorème de Rolle

Le théorème de Rolle est un théorème très important car il nous permet de démontrer par exemple les formules de Taylor. Il permet également de trouver des candidats à des extrema locaux.

Théorème VIII.1.1 (Théorème de Rolle)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$ *tel que* $f(a) = f(b)$*. Il existe un réel* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$f'(c) = 0.$$

Démonstration. — Si f est constante, c'est évident. Sinon, d'après le Théorème VI.1.5, on sait que f admet un minimum global et un maximum global qui sont distincts car f est non constante. Au moins l'un des deux est distinct de a et b. D'après la Proposition VII.0.5, en un tel point $c \in]a, b[$, nous avons tel $f'(c) = 0$. □

Exercice VIII.1.2. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x-\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

VIII.2. Théorème des accroissements finis

Théorème VIII.2.1 (Théorème des accroissements finis)**.**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Remarque VIII.2.2.

Dans l'exemple où f représente la vitesse d'une voiture, le membre de gauche représente la vitesse moyenne et celle de droite la vitesse instantanée en c. Du coup, on peut traduire ce théorème de la façon suivante : si une voiture fait du 80 km/h de moyenne alors au moins une fois elle a fait du $80km/h$ en vitesse instantanée.

Preuve du théorème VIII.2.1. — Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$\begin{aligned} g : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \end{aligned}$$

On vérifie que $g(a) = g(b) = f(a)$. Par Rolle, nous en déduisons qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$g'(c) = 0$$

Or $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Nous en déduisons le résultat. □

Corollaire VIII.2.3 (Inégalités des accroissements finis)**.**

Sous les hypothèses du théorème précédent, nous avons les inégalités suivantes

$$\inf_{x\in]a,b[} f'(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \sup_{x\in]a,b[} f'(x)$$
$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq \sup_{x\in]a,b[} |f'(x)|$$

Démonstration. — Du TAF, nous en déduisons que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Or par définition de la borne inférieure et supérieure, nous avons

$$\inf_{x\in]a,b[} f'(x) \leq f('c) \leq \sup_{x\in]a,b[} f'(x)$$

De plus, en passant à la valeur absolue, nous obtenons

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq \sup_{x\in]a,b[} |f'(x)|$$

□

Nous avons la réciproque à la Proposition VII.0.4 qui est un résultat que vous connaissez depuis le lycée et que vous avez utilisé énormément.

Proposition VIII.2.4.

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ dérivable.

1. *Si f' est (resp. strictement) positive alors f est (resp. strictement) croissante*
2. *Si f' est (resp. strictement) négative alors f est (resp. strictement) décroissante*

Démonstration. — Par le Théorème VIII.2.1, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ainsi, si f' est positive alors $f'(c) \geq 0$, ce qui implique que si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$. Les autres énoncés se déduisent de la même façon. □

CHAPITRE IX

THÉORIE DE FOURIER

La théorie des séries de Fourier est à mettre en parallèle avec les développements limités. Pour les développements limités, on approxime une fonction en un point x_0 par un polynôme. Dans les séries de Fourier, on approxime une fonction périodique par des fonctions trigonométriques $\cos(mx)$ et $\sin(mx)$.

IX.1. Le Cadre

Le cadre naturelle des séries de Fourier est les fonctions à valeur complexe càd $f : I \to \mathbb{C}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

IX.1.1. Fonctions périodiques. —

Définition IX.1.1.

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ et des fonctions f_i continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ telles que f et f_i soit égale sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Voici quelques exemples de fonction que nous allons considérer.

Définition IX.1.2.

Soit T un nombre réel strictement positif. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dit T-périodique si pour tout x, nous avons

$$f(x + T) = f(x).$$

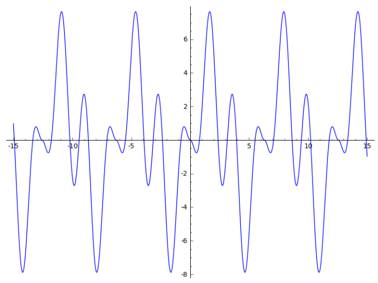


FIGURE 1. Exemple de fonction 2π-périodique continue et dérivable

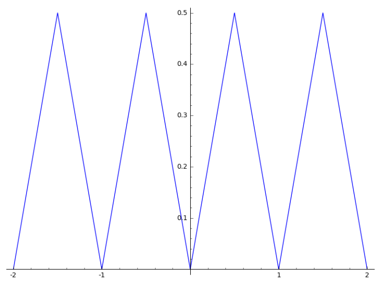


FIGURE 2. Exemple de fonction 2π-périodique continue mais non dérivable en certain points

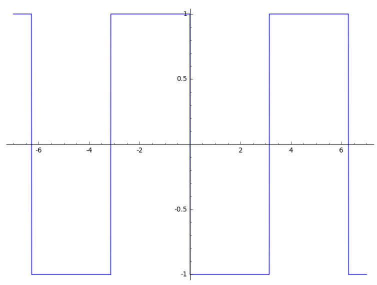


FIGURE 3. Exemple de fonction 2π-périodique non continue en certain points

Notation IX.1.3. — Dans la suite nous noterons

$$C_{m,T} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid T - \text{périodiques et continues par morceaux}\}$$

Cet espace est très important car la théorie des séries de Fourier est valable pour des fonctions dans $C_{m,T}$.

Par définition, l'intégrale d'une fonction à valeur complexe est

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \Re e(f(t))dt + i\int_a^b \Im m(f(t))dt \in \mathbb{C}$$

Proposition IX.1.4.

Soit f une fonction T périodique. Nous avons

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$$
$$\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt$$

Démonstration. — Pour la première formule, nous faisons le changement de variable $u = t + T$. Pour la deuxième formule, il suffit d'utiliser la relation de Chasles

$$\int_a^{a+T} = \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T}$$

et la première formule. □

IX.1.2. Produit scalaire sur $C_{m,T}$. —

Définition IX.1.5.

Soient $f, g \in C_{m,T}$. On pose

$$(f \mid g) := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt \in \mathbb{C}$$

Proposition IX.1.6.

La forme

$$\begin{aligned} C_{m,T} \times C_{m,T} &\to \mathbb{C} \\ (f,g) &\mapsto (f \mid g) \end{aligned}$$

est une forme hermitienne.

Remarque IX.1.7.

Une forme hermitienne est la généralisation d'un produit scalaire dans le cas des nombres complexes. Le soucis est qu'en L2, vous n'avez pas vu la notion de produit scalaire et encore moins de produit hermitien. Intuitivement, il faut imaginer imaginer un produit scalaire comme celui de $\mathbb{R}^2$ que vous avez vu au collège ou au lycée.

Cette proposition est fondamentale car elle donne l'idée de copier les résultats du produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$ au cas de $C_{m,T}$. Par exemple, on peut se poser les questions suivantes :

1. Peut-on trouver une base orthonormée ?
2. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormée, a-t-on $x = \sum_{i\in I}(x \mid e_i)e_i$?

Ces deux questions ont des réponses positives mais la principale difficulté, c'est que $C_{m,T}$ est un espace vectoriel de dimension infinie...et donc la somme ci-dessus est infinie. Il faudra donc parler de convergence de série.

Démonstration de la Proposition IX.1.6. — On vérifie sans peine les égalités ci-dessous

$$\begin{aligned}
\overline{(f \mid g)} &= (g \mid f)\\
(\alpha f + \beta g \mid h) &= \alpha(f \mid h) + \beta(g \mid h)\\
(f \mid \alpha g + \beta h) &= \overline{\alpha}(f \mid g) + \overline{\beta}(f \mid h)\\
(f \mid \overline{f}) &\geq 0\\
(f \mid \overline{f}) &= 0 \Rightarrow f = 0
\end{aligned}$$

□

A partir d'une forme hermitienne, on définit la norme associée.

Définition IX.1.8.

Soit $f \in C_{m,T}$. On pose

$$||f||^2 = (f \mid f) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$$

Proposition IX.1.9.

1. *Les fonctions* $e^{\frac{2i\pi n}{T}t}$ *pour* n *dans* $\mathbb{Z}$ *forment une famille orthonormée pour le produit scalaire ci-dessus.*
2. *Notons*

$$\gamma_n(t) := \cos(2\pi nt/T) \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$
$$\sigma_n(t) := \sin(2\pi nt/T) \text{ pour } n \in \mathbb{N}_{>0}$$

Ces fonctions forment une famille orthogonale. De plus nous avons,

$$(\gamma_0 \mid \gamma_0) = 1$$
$$(\gamma_n \mid \gamma_n) = 1/2 \text{ pour } n \in \mathbb{N}_{>0}$$
$$(\sigma_n \mid \sigma_n) = 1/2$$

Remarque IX.1.10.

Remarquer le cas $n = 0$ qui joue un rôle spécial dans cette proposition. Ceci aura un impact plus tard dans la définition IX.2.1 et la proposition IX.2.3

Démonstration. — On démontrera ceci en TD. C'est un calcul direct. □

IX.2. Coefficients de Fourier et série de Fourier

Définition IX.2.1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T périodique et continue par morceaux.

1. Nous posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{\frac{-2i\pi nt}{T}}dt$$

2. Nous posons $a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{\frac{-2i\pi nt}{T}}dt$ et $b_0(f) = 0$. Et pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$,

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$
$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

Remarque IX.2.2.

1. Faites attention aux formulaires de a_n, le cas $n = 0$ est spécial.
2. Si l'on utilise les notations du produit scalaire, on a pour $n > 0$

$$a_n(f) = 2(f \mid \cos(2\pi nt/T)), \quad b_n(f) = 2(f \mid \sin(2\pi nt/T))$$

   Le (2) vient du fait que $\|\cos(2\pi nt/T)\|^2 = \|\sin(2\pi nt/T)\|^2 = 1/2$.
3. Les coefficients (c_n) sont à priori complexe par contre les (a_n) et (b_n) sont réels.

Ça peut paraître bizarre d'avoir deux séries de coefficients (c_n) et (a_n, b_n). En fait ils sont reliés par la proposition suivante.

Proposition IX.2.3.

Nous avons

$$\forall n > 0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n + i.b_n).$$

Et nous avons aussi pour tout $n > 0$,

$$a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{2}, \quad b_n = \frac{c_n - c_{-n}}{2i}$$

Remarque IX.2.4.

Attention, la proposition précédente n'est pas vrai pour $n = 0$ car $a_0 = c_0$ par Définition IX.2.1.

Démonstration. — Ceci découle de l'égalité $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ et la seconde égalité vient de

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

□

Définition IX.2.5.

La série de Fourier est définie par

$$\begin{aligned} S(f) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{\frac{2in\pi t}{T}} \\ &= a_0(f) + \sum_{n\in\mathbb{N}_{>0}} a_n(f)\cos\left(nt\frac{2\pi}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(nt\frac{2\pi}{T}\right) \end{aligned}$$

Remarque IX.2.6.

1. La Proposition IX.2.3 implique que les deux formules de la définition sont les mêmes. Remarquez que si f est une fonction à valeur réelle alors la deuxième expression est réelle alors que la première est, à priori, à valeur complexe. Dans ce cas, il n'est pas difficile de voir que $S(f)$ est toujours à valeur réelle càd $S(f) = \overline{S(f)}$.
2. Considérons $\mathbb{R}^n$ avec son produit scalaire euclidien, noté $(x \mid y)$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée. Nous avons alors

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i) e_i$$

En dimension infinie la somme de droite doit être considérer comme une série et l'égalité ci-dessus n'est pas aussi facile...c'est justement le but de la théorie de comprendre quand cette égalité se produit. Ainsi la série de Fourier est simplement le membre de droite de l'égalité ci-dessus.

IX.3. Inégalité de Bessel

Le but de cette section est de démontrer l'inégalité de Bessel. Nous allons utiliser le lemme suivant

Lemme IX.3.1.

Soit $S_N(f) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{\frac{2in\pi}{T}t}$. *Nous avons*

$$\|S_N(f)\|^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

$$(f - S_N(f) \mid S_N(f)) = 0$$

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2$$

Remarque IX.3.2.

La troisième égalité correspond au théorème de Pythagore dans le cas euclidien.

Preuve du Lemme IX.3.1. —

1. La première égalité vient de la Proposition IX.1.9, c'est-à-dire que les fonctions $e_n(t) := e^{\frac{2in\pi}{T}t}$ forment une base othonormée.
2. Comme $(f \mid e_n) = c_n$, nous avons

$$\begin{aligned}
(f \mid S_N(f)) &= \sum_{-N}^{N} (f \mid c_n e_n) && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \sum_{-N}^{N} \overline{c_n}(f \mid e_n) && \text{car } (\cdot \mid \cdot) \text{ est hermitienne} \\
&= \sum_{-N}^{N} \overline{c_n} c_n && \text{car } (f \mid e_n) = c_n \\
&= \sum_{-N}^{N} |c_n|^2
\end{aligned}$$

3. Ceci découle de l'égalité précédente. On écrit l'égalité ci-dessous

$$\|f\|^2 = (f - S_N(f) + S_N(f) \mid f - S_N(f) + S_N(f))$$

Puis en développant et en remarquant que $(f - S_N(f) \mid S_N(f)) = 0$, on obtient le résultat.

□

Théorème IX.3.3 (Inégalité de Bessel)**.**

Soit f une fonction T-périodique et continue par morceaux. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ converge et on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt =: ||f||^2$$

Preuve du Théorème IX.3.3. — De la première et la troisième égalité du Lemme IX.3.1, nous en déduisons

$$||S_N(f)||^2 = \sum_{-N}^{N} |c_n|^2 \leq ||f||^2$$

Et en passant à la limite, nous en déduisons le théorème. □

Une conséquence importante de cet énoncé, est le corollaire suivant

Corollaire IX.3.4 (Riemann-Lebesgue)**.**

Les suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0.

Démonstration. — De l'inégalité de Bessel, nous en déduisons que la suite $\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$ converge. Ceci implique que le terme général tend vers 0. La Proposition IX.2.3 implique que (a_n) et (b_n) tendent vers 0. □

IX.4. Les théorèmes de convergence de Dirichlet

Avant de donner les énoncés des théorèmes de convergence, regardons deux exemples.

Exemple IX.4.1. — On considère une fonction 2π-périodique en forme de scie. Son graphe sur une période est sur la Figure 4. Si on calcule les premiers 8 termes de sa série de Fourier, nous obtenons

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(x) - \frac{4}{9\pi}\cos(3x) - \frac{4}{25\pi}\cos(5x) - \frac{4}{49\pi}\cos(7x)$$

De la figure ci-dessus, on voit que la série de Fourier converge vers la fonction de départ, et on peut même penser à une convergence uniforme. Si l'on prend 20 termes dans la série, on ne fait plus la différence entre f et sa série de Fourier. Remarquez que la fonction de départ est C^1 **par morceaux et continue**.

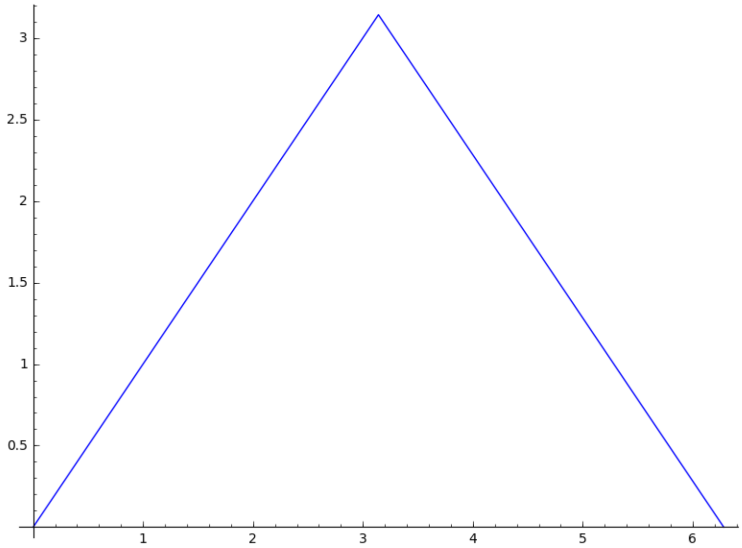


FIGURE 4. Graphe d'une fonction scie sur une période

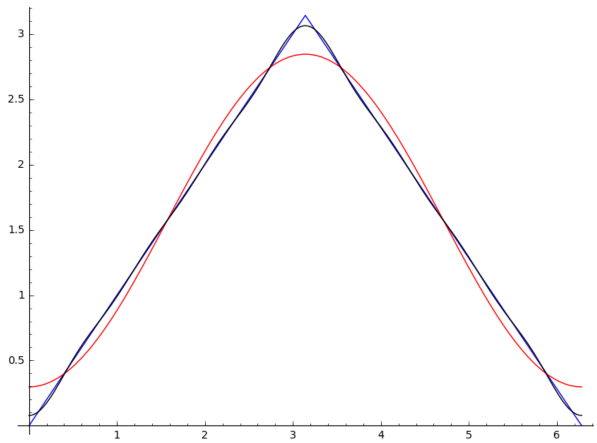


FIGURE 5. En bleu, la fonction de départ, en rouge les 2 premiers termes de la série de Fourier et en noir les 8 premiers termes de la série de Fourier

Exemple IX.4.2. — On considère une fonction 2π-périodique en forme de créneau. Son graphe sur une période est donné par la Figure 6. Si on calcule les premiers 50 termes de sa série de Fourier,

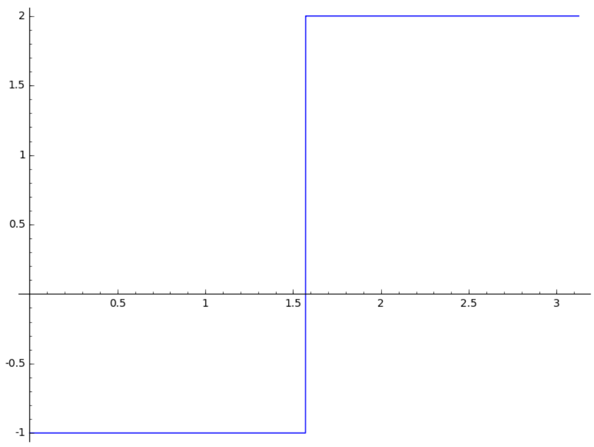


FIGURE 6. Fonction créneau sur une période

nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&-\frac{6}{49\pi}.\sin(98.x)-\frac{6}{47\pi}\sin(94.x)-\frac{2}{15\pi}\sin(90.x)-\frac{6}{43\pi}\sin(86.x)-\frac{6}{41\pi}\sin(82.x)-\frac{2}{13\pi}\sin(78.x)-\frac{6}{37\pi}\sin(74.x)\\
&-\frac{6}{35\pi}\sin(70.x)-\frac{2}{11\pi}\sin(66.x)-\frac{6}{31\pi}\sin(62.x)-\frac{6}{29\pi}\sin(58.x)-\frac{2}{9\pi}\sin(54.x)-\frac{6}{25\pi}\sin(50.x)-\frac{6}{23\pi}\sin(46.x)\\
&-\frac{2}{7\pi}\sin(42.x)-\frac{6}{19\pi}\sin(38.x)-\frac{6}{17\pi}\sin(34.x)-\frac{2}{5\pi}\sin(30.x)-\frac{6}{13\pi}\sin(26.x)-\frac{6}{11\pi}\sin(22.x)-\frac{2}{3\pi}\sin(18.x)\\
&-\frac{6}{7\pi}\sin(14.x)-\frac{6}{5\pi}\sin(10.x)-\frac{2}{\pi}.\sin(6.x)-\frac{6}{\pi}.\sin(2.x)+1/2
\end{aligned}
$$

De la figure ci-dessus, on voit que la série de Fourier converge vers la fonction de départ. Par contre, on voit que quand on augmente le nombre de terme, il y a une oscillation autour des points de non continuité (cf la partie verte au début d'un plateau dans la Figure 7). Ceci nous laisse à penser qu'on n'aura pas une convergence uniforme de la série de Fourier. Ce phénomène s'appelle le phénomène de Gibbs. Remarquez que la fonction créneau est C^1 **par morceaux et pas continue.**

Une fonction f est C^1 par morceaux sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ de $[a, b]$ telle que $f\,|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$ est qu'on peut la prolonger en une fonction de classe C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$, c'est-à-dire que les limites à gauche et à droite de $f\,|_{]a_i,a_{i+1}[}$ et de sa dérivée sont finies.

Théorème IX.4.3 (Théorème de Dirichlet càd convergence ponctuelle de la série de Fourier.**).**

Soit f une fonction T-périodique et de classe C^1 par morceaux. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. La série de Fourier $S(f)(t_0)$ converge vers $\frac{f(t_0^+)+f(t_0^-)}{2}$ où $f(t_0^+)$ (resp. $f(t_0^-)$) est la limite à droite (resp. gauche) de f en t_0.

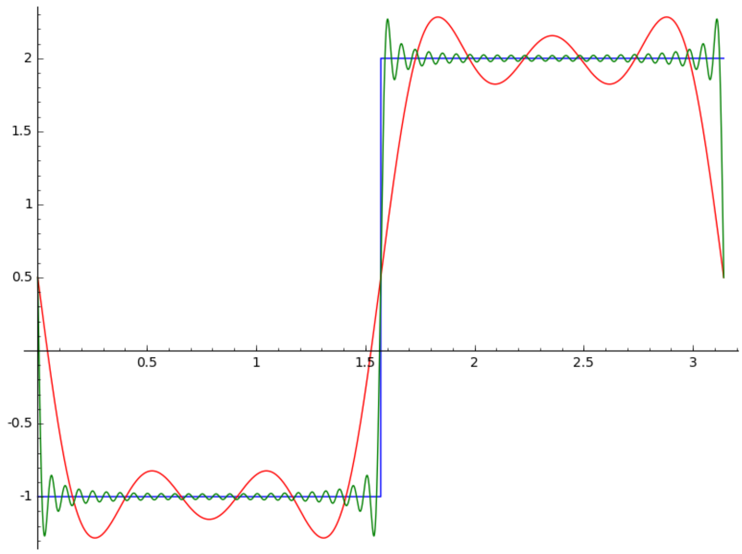


FIGURE 7. En bleu, la fonction de départ, en rouge les 5 premiers termes de la série de Fourier et en vert les 50 premiers termes de la série de Fourier

Remarque IX.4.4.

Dans ce théorème, on peut relacher un peu l'hypothèse C^1 par morceaux mais par contre on ne peut pas simplement mettre continue. Il y a des contre-exemples où des séries de Fourier ne convergent pas vers la fonction en certains points. Ces exemples sont assez sophistiqués, historiquement, c'est Féjer (1880-1959) qui les a trouvés.

Démonstration du théorème IX.4.3. — Attention, cette preuve est très technique et elle peut être sauter dans une première lecture. Je n'ai pas tout détaillé mais j'ai mis les grandes étapes ce qui vous permettra de reconstituer la preuve en détail.

Quitte à poser $g(t) = f(2\pi t/T)$, on peut supposer que f est 2π-périodique. Quitte à translater $t \to t - t_0$, on peut supposer que $t_0 = 0$. Posons $s_N := S_N(f)(0) = \sum_{-N}^{N} c_n(f)$. Il faut montrer que la suite

$$u_N := s_N - \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$$

tende vers 0 quand $N \to +\infty$. Nous avons

$$\begin{aligned}
2\pi s_N &= \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt && \text{car } c_n = (f \mid e^{int}) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_N(t) && \text{où } K_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int}.
\end{aligned}$$

en utilisant les séries géométriques, nous pouvons calculer K_N (cf. feuille de TD9) et montrer que

$$K_N(t) = \frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)}, \int_0^{\pi} K_N(t) = \pi.$$

Comme $K_N(t)$ est une fonction paire, on a

$$2\pi s_N = \int_0^{\pi} (f(t) + f(-t))K_N(t)dt$$

Finalement, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
2\pi u_N &= 2\pi s_N - \pi(f(0^+) + f(0^-)) \\
&= \int_0^{\pi} (f(t) + f(-t))K_N(t)dt - (f(0^+) + f(0^-)) \int_0^{\pi} K_N(t)dt \\
&= \int_0^{\pi} \frac{f(t) + f(-t) - f(0^+) - f(0^-)}{\sin(t/2)} \sin\left((2N+1)t/2\right) dt \\
&= \int_0^{\pi} g(t) \sin\left(\frac{(2N+1)t}{2}\right) dt \qquad \text{(IX.1)}
\end{aligned}$$

où

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t) - f(0^+) - f(0^-)}{\sin(t/2)}$$

L'idée intéressante est de voir que (IX.1) est le coefficient de Fourier de la fonction g. Ainsi si la fonction g est continue par morceaux alors en appliquant le Corollaire IX.3.4 à g, nous en déduisons par (IX.1) que la suite $(u_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Il reste à montrer que g est continue par morceaux partout sauf peut-être en 0. Montrons que g est continue en 0.

$$g(t) = \left(\frac{f(t) - f(0^+)}{t} + \frac{f(-t) - f(0^-)}{t}\right) \frac{t}{\sin(t/2)}$$

Comme f est C^1 par morceaux, le premier terme a une limite finie c'est la dérivée à droite en 0, le second est la dérivée à gauche de $t \mapsto f(-t)$ (c'est-à-dire la dérivée à droite de f) et le dernier terme est équivalent à 2 car $\sin(t/2) \sim_0 t/2$. Ainsi g est continue en 0.

□

Nous rappelons qu'une série de fonction $\sum_n g_n(t)$ converge normalement sur $[a, b]$ s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

1. pour tout n, $|g_n(t)| \leq u_n$ pour tout $t \in [a, b]$.
2. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Remarquons que la convergence normale implique la convergence uniforme.

Théorème IX.4.5 (Théorème de convergence normale de Dirichlet)**.**

Soit f une fonction T-périodique et de classe C^1 par morceaux et continue. La série de Fourier $S(f)$ converge normalement vers f.

Remarque IX.4.6.

1. Remarquons qu'on a rajouté l'hypothèse de continuité pour f. Comme nous l'avions observé dans les exemples IX.4.1 et IX.4.2, l'hypothèse de continuité est très importante pour la convergence de la série de Fourier.
2. La convergence normale implique la convergence uniforme.

Avant de démontrer ce théorème, nous allons démontrer le lemme suivant.

Lemme IX.4.7.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue, T-périodique et de classe C^1 par morceaux. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons $c_n(f') = \frac{2i\pi n}{T} c_n(f)$.

Preuve du Lemme IX.4.7. — On intègre par partie et on obtient

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}dt \\ &= \frac{-1}{2i\pi n}\left[f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\right]_0^T + \frac{1}{2i\pi n}\int_0^T f'(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}dt \end{aligned}$$

Comme f est T-périodique, $\left[f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\right]_0^T = 0$. Nous en déduisons le résultat. □

Preuve du Théorème IX.4.5. — En utilisant le lemme, nous en déduisons

$$|c_n(f)| = \frac{T.|c_n(f')|}{2\pi n}$$

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour deux suites réels (a_n) et (b_n)

$$2a_n b_n \leq a_n^2 + b_n^2$$

Ainsi, nous en déduisons

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f')|^2 + \left(\frac{T}{2\pi n}\right)^2$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge et que la série de terme générale $|c_n(f')|^2$ converge par l'inégalité de Bessel (cf le Théorème IX.3.3) appliqué à f'. Ceci nous donne la convergence normale de la série de Fourier. □

IX.5. Égalité de Parseval

Théorème IX.5.1 (Egalité de Parseval)**.**

Soit f une fonction T-périodique et continue par morceaux. Nous avons

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = ||f||^2$$

Démonstration. — Nous allons démontrer ce théorème que dans le cas particulier où f est C^1 par morceaux et continue. La démonstration générale demande plus d'efforts. Le Lemme IX.3.1 implique que

$$||f||^2 = ||S_N(f) - f||^2 + ||S_N(f)||^2 \tag{IX.2}$$

Or nous avons $||g|| \leq ||g||_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)|$. Or le Théorème IX.4.5 implique que la série de Fourier converge uniformément c'est-à-dire $||S_N(f) - f||_\infty$ tend vers 0. Nous en déduisons que

$$||f||^2 - ||S_N(f)||^2 = ||S_N(f) - f||^2 \leq ||S_N(f) - f||_\infty^2 \to 0$$

Ceci implique le théorème. □

Présentation de l'auteur

Je suis actuellement professeur à l'université d'Angers depuis 2015. J'ai fait mes études à l'université de Strasbourg où j'ai eu l'agrégation de mathématique en 2000 puis j'ai obtenu ma thèse en 2005 sous la direction de Claude Sabbah. Ma thèse est intitulée *Cohomologie quantique des espaces projectifs à poids*. J'ai ensuite fait un post-doctorat à la SISSA à Trieste (Italie). En 2007, j'ai été recruté comme maître de conférence à l'université de Montpellier.
Mon domaine de recherche est la géométrie algébrique, notamment autour des invariants de Gromov-Witten et de la symétrie miroir.