Université de Montpellier 2
Institut de Mathématique et de Modélisation de Montpellier
Ecole Doctorale Information Structures Systèmes

$\mathcal{D}$-modules quantiques et symétrie miroir

Habilitation à diriger des recherches

présentée et soutenue publiquement par

Étienne MANN

le vendredi 21 novembre 2014 devant le jury composé de

Alessio CORTI	Imperial College à Londres	Rapporteur
Bertrand TOËN	Université de Montpellier	Rapporteur
Victor BATYREV	Université de Tuebingen	Examinateur
Damien CALAQUE	Université de Montpellier	Examinateur
Nicolas PERRIN	Université de Duesseldorf	Examinateur
Claude SABBAH	École polytechnique	Examinateur

Le troisième rapporteur est Laurent MANIVEL Université de Grenoble.

Étienne Mann

$\mathcal{D}$-MODULES QUANTIQUES ET SYMÉTRIE MIROIR

Étienne Mann
Université Montpellier 2, Institut de Mathématique et de Modélisation de Montpellier, UMR 5149, Case courier 051 Place Eugène Bataillon F-34 095 Montpellier CEDEX 5.
E-mail : `etienne.mann@univ-montp2.fr`
Url : `http://www.math.univ-montp2.fr/~mann/index.html`

***Classification mathématique par sujets* (2010). —** 14N35, 53D45, 14F10.
***Mots clefs*. —** D-modules quantiques, invariants de Gromov-Witten, symétrie miroir.

$\mathcal{D}$-MODULES QUANTIQUES ET SYMÉTRIE MIROIR

Étienne Mann

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mes rapporteurs Alessio Corti, Laurent Manivel et Bertrand Toën ainsi que les membres de mon jury Victor Batyrev, Damien Calaque et Claude Sabbah.

Depuis ma thèse à Strasbourg sous la direction de Claude, j'ai croisé beaucoup de mathématicien(ne)s que je voudrais remercier ici. En premier lieu, Claude qui m'a toujours conseillé et encouragé, son comportement posé, abordable et ouvert m'impressionne et dans mes moments "tout feu, tout flamme", je repense à lui pour tout remettre dans le bon ordre : la charrue et les boeufs (ou le contraire).

J'ai aussi eu le plaisir de rencontrer Claus, qui a suivi mon parcours depuis Mannheim. Mon post-doc à Trieste avec Barbara reste un moment de bonheur et une grande découverte. L'enthousiasme de Barbara m'a contaminé ainsi que le dynamisme des doctorants de la SISSA que je revois encore avec un grand plaisir : Andrea, Cristina, Fabio, Paolo et Nicola. L'attention bienveillante que Laurent a portée à mes travaux m'a toujours touché. Je me souviens aussi d'Alessio, qui m'a patiemment expliqué ses résultats à venir sur la cohomologie quantique des espaces projectifs à poids lors de la première mi-temps d'une demi-finale Allemagne-Italie (sauf erreur). L'arrivée de Bertrand à Montpellier m'a permis de dériver et je découvre ce nouveau monde qui me plaît bien. Merci aussi à Marco et Benjamin.

Mon arrivée à Montpellier en 2007, avec la découverte de ma vie, s'est déroulé merveilleusement notamment grâce aux invitations répétées de Louise et Gilles ainsi qu'aux parties de bowling avec Ioan. J'ai toujours reçu du laboratoire (Marc, Gilles, Bertrand et Paul-Émile) un très fort soutient dans mes recherches et mes demandes. Merci aussi à Sylvain pour l'ambiance amicale du bureau.

Du point de vue recherche, mes collaborations étaient toujours très enrichissantes aussi bien humainement que mathématiquement. Une mention spéciale à Thierry avec qui faire des mathématiques au quotidien est un savant mélange de math-physique-foot avec une bonne dose d'humour. Les quelques semaines d'Hiroshi à Montpellier m'ont aussi appris plein de choses sur les cônes...japonais. Samuel et Fabio m'ont initié à la conjecture de Ruan. L'ANR Gromov-Witten portée par Alessandro m'a permis de découvrir le côté organisationnel d'un projet. Le nouveau projet SISYPH semble aussi bien lancé.

Plus personnellement, à la question parentale : « Alors, tu as fini tes petits calculs ? » je peux répondre sans détours, « je ne suis pas sûr qu'ils se finissent ». Francesca é « L'amor che move il sole e l'altre stelle ». Lo so che non sono Paolo ma ti amo altretanto. Pour Xavier le chenapan, le Géolliminus est le dinosaure géomètre et non pas celui qui mange les géomètres. Pour Olivier le farceur, une petite blague[1] : Toto va voir son père et lui dit : « Papa, je suis génial j'ai mis une semaine pour faire ce puzzle et pourtant il y avait marqué 5 ans ».

1. Merci à Jérémie

TABLE DES MATIÈRES

PUBLICATIONS PRÉSENTÉES

[BMP09a] Samuel Boissière, Étienne Mann, et Fabio Perroni, *The cohomological crepant resolution conjecture for* $\mathbb{P}(1,3,4,4)$, Internat. J. Math. **20** (2009), no. 6, 791–801.

[BMP09b] Samuel Boissière, Étienne Mann, et Fabio Perroni, *A model for the orbifold Chow ring of weighted projective spaces*, Comm. Algebra **37** (2009), no. 2, 503–514.

[BMP11] Samuel Boissière, Étienne Mann, et Fabio Perroni, *Computing certain Gromov-Witten invariants of the crepant resolution of P(1,3,4,4*, Nagoya Math. J. **201** (2011), 1–22.

[dGM08] Ignacio de Gregorio et Étienne Mann, *Mirror fibrations et root stacks of weighted projective spaces*, Manuscripta Math. **127** (2008), no. 1, 69–80.

[DM13] Antoine Douai et Étienne Mann, *The small quantum cohomology of a weighted projective space, a mirror D-module et their classical limits*, Geom. Dedicata **164** (2013), 187–226.

[FMN10] Barbara Fantechi, Étienne Mann, et Fabio Nironi, *Smooth toric Deligne-Mumford stacks*, J. Reine Angew. Math. **648** (2010), 201–244.

[IMM] Hiroshi Iritani, Étienne Mann et Thierry Mignon, *Quantum Serre in terms of quantum D-modules*, in preparation.

[MM11] Étienne Mann et Thierry Mignon, *Quantum D-modules for toric nef complete intersections*, ArXiv e-prints 1112.1552 (2011).

INTRODUCTION

Ce mémoire est un résumé de mes travaux effectués depuis ma thèse soutenue en 2005 à Strasbourg sous la direction de Claude Sabbah, qui s'intitulait « cohomologie quantique des espaces projectifs à poids » et qui a donné suite à la publication [**Man08**].

Ces travaux se situent dans le domaine de la géométrie algébrique et plus précisément en « symétrie miroir ». Cette dernière est basée sur des idées de physique théorique, notamment la théorie des cordes. Un enjeu pour les mathématiciens est de donner des énoncés mathématiques à ces théories. En mathématique la symétrie miroir se formule de façon différente selon le cadre où l'on se place : égalité des nombres de Hodge, isomorphismes entre variétés de Frobenius, isomorphismes entre D-modules, appartenance à un certain cône lagrangien, équivalence de catégories *etc*.

Un article référence est celui de Kontsevich [**Kon95b**] où il présente plusieurs théories mathématiques pouvant refléter des symétries présentes en théorie des cordes. Un premier résultat important est démontré dans [**KM94**] où Kontsevich-Manin montrent la formule récursive suivante qui calcule le nombre de courbes de degré d, noté N_d, qui passent par $3d-1$ points en position générale dans le plan projectif complexe

$$N_d = \sum_{d_1+d_2=d} N_{d_1}N_{d_2}\left(d_1^2d_2^2\binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3d_2\binom{3d-4}{3d_1-1}\right).$$

Ce résultat était inattendu car on ne connaissaient pas les valeurs pour les grands degrés et on ne s'attendait pas à avoir une relation récursive. Les mathématiciens ont cherché à donner une définition rigoureuse à ces nombres N_d qui sont appelés invariants de Gromov-Witten. Pour cela, il faut d'abord compactifier l'espace de module des applications stables d'une famille de courbes de genre g avec n points marqués vers une variété projective lisse. Dans les bons cas (par exemple si la variété est homogène), l'intersection avec sa classe fondamentale permet de définir les invariants de Gromov-Witten. Pour que tout cela ait un sens, il faut utiliser la théorie de l'intersection à la Fulton sur les champs de Deligne-Mumford (*cf.* Vistoli [**Vis89**]). En général, cet espace de module peut avoir différentes composantes irréductibles de dimensions différentes et on voit que sa classe fondamentale ne convient pas pour définir ses invariants. Dans [**BF97**] Fantechi-Behrend définissent un « cycle virtuel » qui fournit une définition dans tous les cas de ces invariants et donne une approche pour les calculer avec des outils de géométrie algébrique.

Pour dégager une structure reliée à ces invariants, on les considère tous ensemble par exemple sous forme d'une série génératrice. Ils peuvent s'organiser de façon algébrique ou géométrique et donnent lieu à des structures très intéressantes comme un produit commutatif et associatif [2] appelé produit quantique, une connexion méromorphe intégrable appelé D module quantique, une variété de Frobenius (Dubrovin [**Dub96**]), un cône lagrangien (Givental [**Giv04**]), *etc*.

A. Symétrie miroir A/B en termes de structures de Hodge non-commutatives

Dans ce mémoire, nous nous intéressons plus particulièrement à la symétrie miroir du type A/B (la terminologie en théorie des cordes est IIA /IIB) dans un langage proche de celui des structures de Hodge non-commutatives. Le nom est dû à Kontsevich-Katzarkov-Pantev dans [**KKP08**] mais les idées étaient déjà présentes chez les auteurs suivants (par ordre alphabétique) : Ceccoti-Vafa [**CV93b**] [**CV93a**], Bershadsky-Cecotti-Ooguri-Vafa [**BCOV94**], Hertling [**Her06**] [**Her03**], Hertling-Sevenheck [**HS07**] [**HS08**], Iritani [**Iri09b**], Mochizuki [**Moc06a**] [**Moc06b**] [**Moc07a**] [**Moc07b**], Sabbah [**Sab05**] [**Sab10**], K.Saito [**Sai83**] [**Sai98b**] [**Sai98a**] et Simpson [**Sim97**]. Signalons aussi l'article de synthèse de Sabbah [**Sab11**] sur ce sujet.

Soit M une variété lisse sur $\mathbb{C}$. *Une structure de Hodge non-commutative* est un triplet $(H, \nabla, \mathcal{L}_{\mathbb{R}})$ où H est un fibré holomorphe sur $M \times \mathbb{C}$, ∇ est une connexion méromorphe intégrable avec un pôle d'ordre 2 en $M \times \{0\}$ dont une base de sections plates est donnée par le système local $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$. Ce triplet doit vérifier certaines conditions de compatibilités. En pratique, vérifier ces compatibilités est très délicat et dans ce mémoire nous nous intéresserons essentiellement au fibré à connexion (H, ∇).

Remarque A.1. — Á une structure de Hodge au sens classique, on peut construire une structure de Hodge non-commutative qui a un pôle d'ordre 1.

A.1. Structure de Hodge non-commutative du coté ***A*** **ou** ***D*****-modules quantiques. —** Le coté A de la symétrie miroir est celui qui correspond aux invariants de Gromov-Witten d'une variété (ou orbifold) projective lisse X. Nous allons définir un *D-module quantique* qui est une version simplifiée d'une structure de Hodge non-commutative. Soit $\bullet$, le (petit) produit quantique qu'on suppose convergent dans un ouvert U de $H^2(X)$. Notons H le fibré vectoriel trivial de fibre $H^*(X)$ au dessus de $U \times \mathbb{C}$. Soit $T_1, \ldots, T_r$ une base de $H^*(X)$ et $t_1, \ldots, t_r$ les coordonnées associées sur U. Nous définissons la connexion méromorphe suivante

$$\nabla_{\partial_{t_a}} = \partial_{t_a} + \frac{1}{z} T_a \bullet \quad \text{où } a \in \{1, \ldots, r\} \tag{A.2}$$

$$\nabla_{\partial_z} = \partial_z - \frac{1}{z^2} c_1(TX) \bullet \quad + \frac{1}{z} \frac{\deg}{2} \tag{A.3}$$

La connexion est intégrable et le couple (H, ∇) est appelé *(petit) D-module quantique* et nous le notons $\mathrm{SQDM}(X)$. Remarquons qu'Iritani définit dans [**Iri09b**], un système local $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ et démontre dans [**Iri09a**] que le triplet $(H, \nabla, \mathcal{L}_{\mathbb{R}})$ vérifie certaines propriétés des structures de Hodge non-commutatives.

Remarque A.4. — Si X est Calabi-Yau, alors la connexion ci-dessus a un pôle d'ordre 1 et donc $\mathrm{SQDM}(X)$ à la forme d'une structure de Hodge classique (*cf.* remarque A.1). D'ailleurs dans [**CK99**], Cox-Katz l'appellent une A-structure de Hodge.

2. Cette associativité donne la formule récursive des N_d ci-dessus.

A.2. Structure de Hodge non-commutative du coté B ou réseau de Brieskorn. — Le coté B sera pour nous un polynôme de Laurent (commode et non dégénéré) f. Soit M l'espace des déformations d'un déploiement universel de f. Le réseau de Brieskorn de f, noté $G_0(f)$ est un fibré vectoriel holomorphe trivial sur $M \times \mathbb{C}$ muni d'une connexion méromorphe intégrable avec un pôle d'ordre 2 en $M \times \{0\}$. Sabbah démontre dans [**Sab08**] qu'à un tel f, on peut construire une structure de Hodge non-commutative. Iritani [**Iri09b**] et Reichelt-Sevenheck [**RS10**] démontrent que le réseau de Brieskorn de f est isomorphe à un système GKZ (Gelfand-Kapranov-Zelinski [**GKZ88**] [**GKZ89**].

A.3. Symétrie miroir de type A/B. — La question naturelle est donc de chercher quand a-t-on SQDM(X) isomorphe à $G_0(f)$? Givental (*cf.* Iritani [**Iri09b**]) propose des polynômes de Laurent qui seraient candidats à être miroirs pour les variétés Fano (ou orbifolds) toriques lisses. Un théorème de Givental dans [**Giv98a**] pour les variétés toriques Fano et de Coates-Corti-Iritani-Tseng [**CCIT14**] pour les orbifolds toriques Fano permet de trouver une application miroir Mir : $M \to U$ telle que $\mathrm{Mir}^* \,\mathrm{SQDM}(X) \simeq G_0(f)$. Cet isomorphisme se montre d'abord en montrant que Mir^* SQDM(X) est isomorphe au système GKZ associé à f.

Dans ce mémoire, nous présentons trois articles de symétrie miroir.

1. Dans [**DM13**], nous démontrons que le D-module quantique des espaces projectifs à poids est isomorphe au réseau de Brieskorn de son polynôme de Laurent miroir.
2. Dans [**MM11**], nous montrons que le D-modules quantiques « ambiant (3) » d'une intersection complète nef dans une variété torique est isomorphe au D-module « résiduel (4) d'un système GKZ. »
3. Dans [**dGM08**], nous démontrons sur une famille d'exemples que l'anneau de cohomologie orbifold d'un champ torique est isomorphe à « l'algèbre de Jacobi singulière » de son miroir.

B. Conjecture de la résolution crépante

La conjecture de la résolution crépante proposée par Yongbin Ruan dans [**Rua06a**] n'est pas un énoncé de type miroir car elle ne concerne que le coté A. Cependant, elle s'énonce également en termes de structures de Hodge non-commutatives. Le contexte est le suivant. Soit $\mathcal{X}$ une orbifold Gorenstein c'est-à-dire un champ de Deligne-Mumford où pour tout point x dans $\mathcal{X}$ le groupe d'automorphisme de x agit sur l'espace tangent avec une action de déterminant 1. Soit X son espace grossier et $\rho : Z \to X$ une résolution crépante *i.e.*, le fibré anticanonique de Z est le tiré en arrière de celui de X. La conjecture prédit un lien entre les invariants de Gromov-Witten de l'orbifold $\mathcal{X}$ et ceux de Z. Pour que cette conjecture ait un sens, Yongbin Ruan et Weimin Chen ont défini au préalable dans [**CR02**] et [**CR04**] l'anneau de cohomologie orbifold et les invariants de Gromov-Witten orbifolds (*cf.* Abramovich-Graber-Vistoli pour une définition en géométrie algébrique [**AGV08**]).

Historiquement, cette conjecture s'est énoncée de différentes manières : en termes d'anneaux quantiques, de D-modules quantiques, de variétés de Frobenius, de cônes lagrangiens. Le paragraphe IV.B est consacré aux différents énoncés possibles. Le cadre le plus récent est donné par Iritani [**Iri10**] en termes des structures de Hodge non-commutatives ou plutôt les D-modules

3. *cf.* section C
4. Le D-module $\mathbb{M}^{\mathrm{res}}$ dans le théorème C.4

quantiques. Elle prédit que les D-modules quantiques SQDM(X) et SQDM(Z) sont reliés par un prolongement analytique.

Avec Samuel Boissière et Fabio Perroni, nous avons démontré cette conjecture pour certains exemples en termes d'un isomorphisme d'anneaux quantiques dans [**BMP09b**], [**BMP09a**], [**BMP11**].

C. Organisation du mémoire et résumé des travaux

Les orbifolds toriques lisses et projectives ont un partenaire miroir qui est un polynôme de Laurent. Donc le premier objectif est de bien comprendre ces orbifolds toriques. Dans le chapitre I, nous définissons *un champ de Deligne-Mumford torique* comme un champ de Deligne-Mumford lisse séparé avec une immersion ouverte d'un tore $\mathcal{T} = (\mathbb{C}^*)^{\dim \mathcal{X}} \times BG$ où G est un groupe abélien fini dont l'action du tore sur lui-même s'étend à $\mathcal{X}$.

Notons $\sqrt[b]{D/\mathcal{X}}$ (resp. $\sqrt[b]{L/\mathcal{X}}$) le champ des racines b-ème du diviseur de Cartier D (resp. du fibré en droite L). Nous démontrons le résultat suivant.

Théorème C.1. — *(Voir les théorèmes I.C.4 et I.D.5) Soit $\mathcal{X}$ un champ de Deligne-Mumford torique de tore $(\mathbb{C}^*)^{\dim \mathcal{X}} \times BG$. Notons $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}} := \mathcal{X} /\!\!/ G$ son rigidifié et $\mathcal{X}^{\mathrm{can}}$ son champ canonique.*

1. *Soit $G = \prod_{j=1}^{\ell} \mu_{b_j}$. Il existe $L_1, \dots, L_\ell$ dans le groupe de Picard de $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ tel que $\mathcal{X}$ soit isomorphe à*
$$\sqrt[b_1]{L_1/\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}} \times_{\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}} \cdots \times_{\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}} \sqrt[b_\ell]{L_\ell/\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}}.$$
2. *Il existe un unique n-uplet $(a_1, , \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ soit isomorphe à*
$$\sqrt[a_1]{D_1/\mathcal{X}^{\mathrm{can}}} \times_{\mathcal{X}^{\mathrm{can}}} \cdots \times_{\mathcal{X}^{\mathrm{can}}} \sqrt[a_n]{D_n/\mathcal{X}^{\mathrm{can}}}.$$
où les D_i sont les diviseurs toriques de $\mathcal{X}^{\mathrm{can}}$.

De plus nous relions notre définition à celle plus combinatoire de Borisov-Chen-Smith [**BCS05**]. Ce travail a été publié avec Barbara Fantechi et Fabio Nironi [**FMN10**]. Notre construction donne une interprétation géométrique à ces données combinatoires et nous a permis avec Ignacio de Gregorio de donner un énoncé de symétrie miroir en termes d'un isomorphisme d'anneaux sur une famille d'exemples dans [**dGM08**] (voir Théorème I.F.5).

Le deuxième chapitre est un rappel rapide sur les invariants de Gromov-Witten, les D-modules quantiques et les cônes lagrangiens. La définition du (grand) D-module quantique est similaire à celle écrite en (A.2) et (A.3) mais il faut remplacer le petit produit quantique par le grand et U par un ouvert de $H^*(X)$. Soit X une variété projective lisse avec $L_1, \dots, L_k$ fibrés en droite amples. Soit Z est le lieu d'annulation d'une section générique du fibré vectoriel $\oplus L_i$ et $\iota : Z \to X$ l'immersion fermée. Le théorème de Lefchetz implique que $H^*(Z) = \ker \iota_* \oplus \operatorname{Im} \iota^*$. Notons $H^*_{\mathrm{amb}}(Z) = \operatorname{Im} \iota^*$. Comme le produit quantique de Z laisse stable $H^*_{\mathrm{amb}}(Z)$, nous en déduisons que la connexion ∇ laisse stable $\operatorname{Im} \iota^*$. Nous obtenons alors un sous D-module, noté $\mathrm{QDM}_{\mathrm{amb}}(Z)$ de QDM(Z). Nous avons aussi un petit D-module quantique, noté SQDM, qui utilise le petit produit quantique.

Le troisième chapitre est coupé en 3 sections. Dans §.III.A, nous exposons les résultat de [**DM13**] qui démontre un résultat de symétrie miroir en termes de D-modules quantiques pour les espaces projectifs à poids. Plus précisément, nous considérons l'espace projectif à poids

$\mathbb{P}(w_0, \ldots, w_n)$ où $w_0, \ldots, w_n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sa famille de polynômes de Laurent miroir est donnée par

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^{n+1} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \mathbb{C}^* & & \end{array}$$

où $F = u_0 + \cdots + u_n$ et $\pi = u_0^{w_0} \cdots u_n^{w_n}$. Nous démontrons que

Théorème C.2. — *(Voir théorème III.A.12) Le petit D-module quantique de $\mathbb{P}(w_0, \ldots, w_n)$ est isomorphe au réseau de Brieskorn de (F, π).*

Dans §.III.B, nous donnons un énoncé de la dualité de Serre en termes d'une dualité entre deux D-modules quantiques tordus. Soit $\boldsymbol{c}$ une classe caractéristique inversible et multiplicative. Soit E un fibré vectoriel. On peut associer à $\boldsymbol{c}$ une classe caractéristique $\boldsymbol{c}^*$ telle que $\boldsymbol{c}(E)\boldsymbol{c}^*(E^\vee) = 1$. Le théorème suivant est une version simplifiée (5) des théorèmes III.B.3 et III.B.14 et du corollaire III.B.8.

Théorème C.3. — *Soit X une variété projective lisse et E un fibré vectoriel sur X.*

1. *Soit* $\mathrm{QDM}_{(\mathbf{c},E)}(X)$ *et* $\mathrm{QDM}_{(\mathbf{c}^*,E^\vee)}(X)$ *les D-modules quantiques tordus par respectivement* $(\mathbf{c}, E)$ *et* $(\mathbf{c}^*, E^\vee)$*. Ces deux D-modules sont duaux.*
2. *Notons* e *la classe d'Euler non-équivariante. Si $E = \bigoplus_{i=1}^k L_i$ où les fibrés en droite L_i sont amples alors nous avons :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{QDM}_{(\mathrm{e},E)}(X) \arrow[r, "\mathrm{e}(E)\cup"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \mathrm{QDM}(E^\vee) \\ \mathrm{QDM}_{\mathrm{amb}}(Z) \arrow[ur, hook, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

où φ est injective et $Z \hookrightarrow X$ est le lieu d'annulation d'une section générique de E.

3. *Dans le cas où $E = -K_X$ avec la classe d'Euler équivariante, la limite non équivariante de la dualité du premier point existe et elle est isomorphe à la « seconde métrique », noté $\breve{g}^{\left(\frac{\dim X+1}{2}\right)}$, de Dubrovin* [**Dub96**].

Ces résultats viennent de l'article en préparation [**IMM**].

Dans une dernière section, nous présentons [**MM11**] qui donne une présentation du D-module quantique d'une intersection complète nef dans une variété torique. Plus précisément, soit X une variété projective lisse avec $L_1, \ldots, L_k$ fibrés en droite. Soit $T_1, \ldots, T_r$ une base de $H^2(X)$. Soit $q_1, \ldots, q_r$ des coordonnées de $(\mathbb{C}^*)^r$. Posons $\mathbb{D} = \mathbb{C}[q_i^\pm, z]\langle zq_i\partial_{q_i}, z^2\partial_z\rangle$. Nous définissons un idéal à gauche $\mathbb{G} := \langle \mathfrak{E}, \Box_q, d \in H_2(X, \mathbb{Z})\rangle$ (*cf.* définition III.C.3) qui est un idéal GKZ. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, posons $\widehat{L_i} := \sum_{a=1}^r c_a z q_a \partial_{q_a}$ avec $c_1(L_i) = \sum_{a=1}^r c_a T_a$.

Nous avons le théorème miroir suivant.

Théorème C.4. — *(Voir Théorèmes III.C.4 et III.C.5) Supposons que les fibrés $L_1, \ldots, L_k$ soient globalement engendrés et que $(K_X \otimes L_1 \otimes \cdots L_k)^\vee$ soit nef.*

1. *Le petit D-module quantique tordu par $(e, \oplus L_i)$, noté* $\mathrm{SQDM}_{\mathrm{e}}(X)$*, est isomorphe à* $\mathbb{D}/\mathbb{G}$*.*

5. Nous avons supprimé les applications miroirs des énoncés.

2. *Supposons que les fibrés en droite soient amples. Soit Z le lieu d'annulation d'une section générique de* $E = \oplus L_i$. *Nous avons* $\mathrm{SQDM}_{\mathrm{amb}}(Z)$ *isomorphe à* $\mathbb{M}/(\mathbb{G} : \widehat{c_{\mathrm{top}}})$ *où*

$$(\mathbb{G} : \widehat{c_{\mathrm{top}}}) := \langle P \in \mathbb{D} \mid \widehat{c_{\mathrm{top}}} P \in \mathbb{G} \rangle.$$

De plus, nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathbb{M} := \mathbb{D}/\mathbb{G} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{SQDM}_{\mathrm{e}}(X) \arrow[d, two heads] \\ \mathbb{M}^{\mathrm{res}} := \mathbb{D}/(\mathbb{G} : \widehat{c_{\mathrm{top}}}) \arrow[r] & \mathrm{SQDM}_{\mathrm{amb}}(Z) \end{tikzcd}$$

Dans [**CK99**, p.101] Cox-Katz cherchent un système d'équations différentielles qui donnerait une présentation de $\mathrm{SQDM}_{\mathrm{amb}}(Z)$. On sait que $\mathbb{G}$ fait partie de ces équations différentielles et qu'il manque des équations. Le second point de notre théorème définit toutes les équations cherchées.

Le dernier chapitre est consacré à la conjecture de la résolution crépante dont les résultats sont publiés dans [**BMP11**], [**BMP09a**] et [**BMP09b**].

Soit $|\mathbb{P}(1,3,4,4)|$ l'espace grossier de l'orbifold Gorenstein $\mathbb{P}(1,3,4,4)$. Notons $H^*_{\mathrm{orb}}(X)$ la cohomologie orbifold, $\cup_{\mathrm{orb}}$ son cup produit orbifold et $\langle \cdot,\cdot,\rangle_{\mathrm{orb}}$ la dualité de Poincaré orbifold.

Le théorème suivant est une version simplifiée du théorème IV.C.1.

Théorème C.5. — 1. *La variété* $|\mathbb{P}(1,3,4,4)|$ *admet une unique résolution crépante Z.*

2. *L'algèbre de Frobenius* $(H^*_{\mathrm{orb}}(\mathbb{P}(1,3,4,4)), \cup_{\mathrm{orb}}, \langle\cdot,\cdot,\rangle_{\mathrm{orb}})$ *est isomorphe à l'algèbre de Frobenius* $(H^*(Z), \bullet_\rho, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *où* $\bullet_\rho$ *est le produit quantique restreint aux courbes contractées par* $\rho : Z \to |\mathbb{P}(1,3,4,4)|$.

CHAPITRE I

CHAMPS DE DELIGNE-MUMFORD TORIQUES

Une variété torique normale peut être définie de deux façons : avec des données combinatoires (éventail) ou de façon plus géométrique en disant qu'elle contient un tore dense dont l'action du tore sur lui-même s'étend en une action sur la variété.

Dans [**BCS05**], Borisov-Chen-Smith définissent les champs de Deligne-Mumford toriques à l'aide de données combinatoires appelées *éventails marqués*. Avec Barbara Fantechi et Fabio Nironi, nous avons donné dans [**FMN10**] une définition géométrique des champs de Deligne-Mumford toriques lisses puis nous avons montré que notre définition généralise celle de Borisov-Chen-Smith et surtout, elle donne une interprétation géométrique des données combinatoires. Ceci fait l'objet des 5 premiers paragraphes I.A, I.B, I.C, I.D, I.E. Dans le 6-ème paragraphe I.F, nous exposons les résultat de [**dGM08**] qui est un premier résultat de symétrie miroir pour des orbifolds dont l'espace grossier est un espace projectif à poids. Il s'exprime en termes d'anneaux de cohomologie orbifold et d'espace tangent de déformation.

Notation I..6. — Nous travaillons avec la topologie étale. Un champs de Deligne-Mumford sera supposé séparé et de type fini sur $\mathbb{C}$. Nous supposerons toujours que son espace grossier soit un schéma. Nous emploierons le terme *orbifold* pour un champ de Deligne-Mumford lisse avec un stabilisateur générique trivial. Nous noterons $\mathbb{G}_m$ le faisceau des sections inversibles de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ sur le site étale de $\mathcal{X}$.

I.A. Définition des champs toriques lisses de Deligne-Mumford

Pour imiter la définition géométrique d'une variété torique, nous définissons l'objet qui généralisera le tore pour une variété torique.

Nous renvoyons à [**SGA4**, Exposé XVIII] et à [**LMB00**, Section 14] pour la définition d'un champ de Picard.

Définition I.A.1. — Un *tore de Deligne-Mumford* est un champ de Picard isomorphe à $T \times BG$ où T est un tore et G est un groupe abélien fini.

Nous avons alors une définition naturelle pour un champ de Deligne-Mumford torique.

Définition I.A.2. — *Un champ torique de Deligne-Mumford* est un champ lisse séparé de Deligne-Mumford $\mathcal{X}$ avec une immersion ouverte d'un tore de Deligne-Mumford $\iota : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{X}$ d'image dense telle que l'action de $\mathcal{T}$ sur lui-même s'étend en une action $a : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$.

Exemple I.A.3. — Une variété torique lisse est un champ torique de Deligne-Mumford. Par contre une variété torique avec singularité quotient c'est-à-dire avec un éventail simplicial n'est pas un champ torique de Deligne-Mumford car elle n'est pas lisse. Dans la section suivante, nous verrons que nous pouvons lui associer un champ torique de Deligne-Mumford de façon canonique.

Pour illustrer nos résultats, nous suivrons l'exemple des espaces projectifs à poids.

Exemple I.A.4. — Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $w := (w_0, \dots, w_n) \in (\mathbb{N}^{n+1}_{>0})$. Considérons l'espace projectif à poids défini par $\mathbb{P}(w) = [\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{C}^*]$ où l'action est donnée par

$$\lambda(x_0, \dots, x_n) = (\lambda^{w_0} x_0, \dots, \lambda^{w_n} x_n).$$

Le champ quotient $\mathbb{P}(w)$ est un champ de Deligne-Mumford lisse et il contient un tore $\mathcal{T} := [(\mathbb{C}^*)^{n+1}/\mathbb{C}^*]$. Ce tore est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^n \times B\mu_d$ où $d = \mathrm{pgcd}(w_0, \dots, w_n)$. L'action de $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par multiplication coordonnée par coordonnée nous donne une action de $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{P}(w)$. Ainsi $\mathbb{P}(w)$ est un champ torique lisse de Deligne-Mumford. Tout point x de $\mathbb{P}(w)$ a μ_d comme sous groupe d'automorphisme. Nous noterons par $|\mathbb{P}(w)|$ l'espace grossier de $\mathbb{P}(w)$.

Considérons l'espace projectif $\mathbb{P}(2, 4, 12)$. Sur cet exemple simple, nous allons illustrer nos résultats qui seront généralisés dans les paragraphes suivants. Nous avons les morphismes

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(2,4,12) \arrow[r, "f^{\mathrm{rig}}"] \arrow[dr] & \mathbb{P}(1,2,6) \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \mathbb{P}(1,1,3) \arrow[dl] \\ & {|\mathbb{P}(1,1,3)|} & \end{tikzcd} \tag{I.A.5}$$

1. Le morphisme f^{rig} est induit par l'identité sur $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ et $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ qui envoie $\lambda \mapsto \lambda^2$. Nous avons $\mathrm{id}(\lambda.x) = \varphi(\lambda)\,\mathrm{id}(x)$. Ce morphisme est appelé « rigidification » (*cf.* § I.D). Heuristiquement, ce morphisme tue le stabilisateur générique μ_2 de $\mathbb{P}(2, 4, 12)$.
2. Le morphisme p est induit par $q : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ qui envoie $(x, y, z) \mapsto (x^2, y, z)$ et $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ qui envoie $\lambda \mapsto \lambda^2$. Nous avons $q(\lambda.x) = \varphi(\lambda)q(x)$. Ce morphisme tue le stabilisateur sur le diviseur $x = 0$ dans $\mathbb{P}(1, 2, 6)$. Ceci sera généralisé dans la section I.C.
3. Les applications verticales sont les morphismes canoniques vers l'espace grossier. En particulier, la différence entre $\mathbb{P}(1, 1, 3)$ et $|\mathbb{P}(1, 1, 3)|$ est un « changement de point de vue ». En effet, $|\mathbb{P}(1, 1, 3)|$ est le quotient géométrique dans la catégorie des variétés alors que $\mathbb{P}(1, 1, 3)$ est le quotient dans la catégorie des champs algébriques. On peut voir que $\mathbb{P}(1, 1, 3)$ est le plus petit champ qui a $|\mathbb{P}(1, 1, 3)|$ comme espace grossier. Il sera appelé champ « canonique » dans le paragraphe I.B.

I.B. Champ canonique associé à une variété torique simpliciale

Nous allons définir en toute généralité la notion de champ canonique.

Définition I.B.1. — Soit $\mathcal{X}$ un champ lisse irréductible de Deligne-Mumford. Soit $\varepsilon : \mathcal{X} \to X$ son morphisme vers son espace grossier. Le champ $\mathcal{X}$ est appelé *canonique* si le lieu où ε n'est pas un isomorphisme est de codimension plus grande ou égale à 2.

Un champ canonique, noté $\mathcal{X}$, possède les propriétés suivantes.

1. Le lieu où ε est un isomorphisme est précisément $\varepsilon^{-1}(X_{\mathrm{sm}})$, où X_{sm} est le lieu lisse de X.

2. Nous avons les isomorphismes suivants.

$$A^1(X) \xrightarrow{\simeq} A^1(X_{\mathrm{sm}}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(X_{\mathrm{sm}}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(\varepsilon^{-1}(X_{\mathrm{sm}})) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \tag{I.B.2}$$

La composition envoie $[D]$ sur $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1}(D))$.

Nous obtenons la propriété universelle du champ canonique.

Théorème I.B.3 **(Corollaire 4.10 dans [FMN10])**. — *Soit X une variété avec des singularités quotients. Alors il existe un unique champ canonique $\mathcal{X}^{\mathrm{can}}$ tel que l'espace grossier de $\mathcal{X}^{\mathrm{can}}$ soit X. De plus, soit $\mathcal{Y} \to X$ un morphisme dominant qui préserve la codimension par image inverse* [1] *où $\mathcal{Y}$ est une orbifold. Alors il existe un unique morphisme, à une 2-flèche près, $g : \mathcal{X}^{\mathrm{can}} \to \mathcal{Y}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}^{\mathrm{can}} \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \mathcal{Y} \arrow[l, "\exists ! g"'] \arrow[d] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Soit X_Σ une variété torique dont l'éventail Σ est simplicial c'est-à-dire qu'elle a des singularités quotients. Notons $\Sigma(1) := \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ les rayons de Σ c'est-à-dire les cônes de dimension 1. Pour chaque cône σ, nous posons

$$Z_\sigma := \{x \in \mathbb{C}^n \mid x_i \neq 0 \text{ si } \rho_i \notin \sigma\}$$

Posons $Z_\Sigma := \cup_{\sigma \in \Sigma} Z_\sigma$. D'après [**Cox95**], nous savons que X est le quotient géométrique Z_Σ / G_A où $G_A = \mathrm{Hom}(A^1(X), \mathbb{C}^*)$.

Théorème I.B.4 **(Théorème 4.11 dans [FMN10])**. — *Soit X_Σ une variété torique simpliciale de tore T. Son champ canonique $\mathcal{X}^{\mathrm{can}}$ est le champ quotient $[Z_\Sigma / G_A]$ et il est naturellement muni d'une structure de champs torique de Deligne Mumford de tore T et son action $a : T \times \mathcal{X}^{\mathrm{can}} \to \mathcal{X}^{\mathrm{can}}$ relève l'action $a : T \times X \to X$.*

Dans la suite (I.F.4), nous verrons que $G_A = \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(\mathcal{X}^{\mathrm{can}}), \mathbb{C}^*)$.

Notons $D_i^{\mathrm{can}} = \varepsilon^{-1} D_i$ où D_i est le diviseur torique lisse associé au rayon ρ_i de l'éventail Σ.

Exemple I.B.5. — En suivant l'exemple (I.A.5), le champ $\mathbb{P}(1,1,3)$ est le champ canonique de $|\mathbb{P}(1,1,3)|$.

I.C. Orbifolds toriques

I.C.1. Champs de racines d'un diviseur de Cartier effectif. — Dans [**Cad03**] et [**AGV08**], les auteurs définissent un champ de racines pour un couple (L, s) où L est un faisceau inversible sur $\mathcal{X}$ et s une section. Dans la suite, nous nous restreignons au cas d'un diviseur de Cartier effectif.

Soit n un entier strictement positif. Considérons le champ quotient $[\mathbb{A}^n / (\mathbb{C}^*)^n]$ où l'action de $(\mathbb{C}^*)^n$ est donnée par la multiplication sur les coordonnées. Un point de ce champ est la donnée de n faisceau inversible munis de n sections globales. Soit $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}_{>0})^n$. Notons $\wedge \mathbf{a} : [\mathbb{A}^n / (\mathbb{C}^*)^n] \to [\mathbb{A}^n / (\mathbb{C}^*)^n]$ donnée par $x_i \mapsto x_i^{a_i}$ et $\lambda_i \mapsto \lambda_i^{a_i}$ où x_i (*resp.* λ_i) sont les coordonnées sur $\mathbb{A}^n$ (*resp.* $(\mathbb{C}^*)^n$). Soit $\mathbf{D} := (D_1, \ldots, D_n)$ un n-uplet de diviseurs de Cartier

1. Par exemple un morphisme plat.

effectifs. Ceci induit un morphisme $\mathcal{X} \to [\mathbb{A}^n/(\mathbb{C}^*)^n]$. Le *champ de racine* **a***-ème de* $(\mathcal{X}, \mathbf{D})$ est le produit cartésien

$$\begin{tikzcd} \sqrt[\mathbf{a}]{\mathbf{D}/\mathcal{X}} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & {[\mathbb{A}^n/(\mathbb{C}^*)^n]} \arrow[d, "\wedge\mathbf{a}"] \\ \mathcal{X} \arrow[r, "\mathbf{D}"] & {[\mathbb{A}^n/(\mathbb{C}^*)^n]} \end{tikzcd} \tag{I.C.1}$$

Le morphisme $\sqrt[\mathbf{a}]{\mathbf{D}/\mathcal{X}} \to [\mathbb{A}^n/(\mathbb{C}^*)^n]$ correspond aux diviseurs de Carier effectifs $\widetilde{\mathbf{D}} := (\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_n)$, où $\widetilde{D}_i$ est le sous champ fermé et réduit de $\pi^{-1}(D_i)_{\mathrm{red}}$. Plus explicitement, un objet de $\sqrt[\mathbf{a}]{\mathbf{D}/\mathcal{X}}$ au dessus d'un schéma S est un couple $(f, (\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_n))$ où $f : S \to \mathcal{X}$ est un morphisme et pour tout i, D_i est un diviseur effectif sur S tel que $a_i\widetilde{D}_i = f^*D_i$.

Nous avons les propriétés suivantes.

1. Le produit fibré $\sqrt[a_i]{D_i/\mathcal{X}}$ au dessus de $\mathcal{X}$ est isomorphe à $\sqrt[\mathbf{a}]{\mathbf{D}/\mathcal{X}}$ (*cf.* Remarque 2.2.5 de [**Cad03**]).
2. Le morphisme canonique $\sqrt[\mathbf{a}]{\mathbf{D}/\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ est un isomorphisme au dessus de $\mathcal{X} \setminus \cup_i D_i$.
3. Si $\mathcal{X}$ est lisse, chaque D_i est lisse et les D_i se coupent en des croisements normaux alors $\sqrt[\mathbf{a}]{\mathbf{D}/\mathcal{X}}$ est lisse (*cf.* Section 2.1 dans [**BC10**]) et les $\widetilde{D}_i$ ont des croisements normaux.
4. Nous avons le morphisme de suites exactes courtes (*cf.* Corollaire 3.1.2 [**Cad03**])

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}\left(\sqrt[\mathbf{a}]{\mathbf{D}/\mathcal{X}}\right) \xrightarrow{q} \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{I.C.2}$$

Chaque faisceau inversible $L \in \mathrm{Pic}\left(\sqrt[\mathbf{a}]{\mathbf{D}/\mathcal{X}}\right)$ peut être écrit d'une façon unique comme $L \cong \pi^*M \otimes \prod_{i=1}^n \mathcal{O}(k_i\widetilde{D}_i)$ où $M \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X})$ et $0 \le k_i < a_i$; le morphisme q envoie L sur $(k_1, \ldots, k_n)$.

Remarque I.C.3. — Soit D_1 et D_2 deux diviseurs de Cartier effectifs sur $\mathcal{X}$ tels que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Les champs $\sqrt[a]{D_1 \cup D_2/\mathcal{X}}$ et $\sqrt[(a,a)]{(D_1, D_2)/\mathcal{X}}$ ne sont pas isomorphes. En effet, le groupe d'automorphisme d'un point dans la préimage de $x \in D_1 \cap D_2$ dans $\sqrt[a]{D_1 \cup D_2/\mathcal{X}}$ (*resp.* $\sqrt[(a,a)]{(D_1, D_2)/\mathcal{X}}$) est μ_a (*resp.* $\mu_a \times \mu_a$).

I.C.2. Caractérisation des orbifolds toriques avec les champs de racines. — Soit $\mathcal{X}$ une orbifold torique et $\varepsilon_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to X$ le morphisme vers son espace grossier X. D'après la propriété universelle du champ canonique (*cf.* théorème I.B.3), il existe un unique morphisme $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\mathrm{can}}$ tel que $\varepsilon_{\mathcal{X}^{\mathrm{can}}} \circ f = \varepsilon_{\mathcal{X}}$.

D'après le corollaire 5.6.1 [**LMB00**], le morphisme de structure $\varepsilon : \mathcal{X} \to X$ induit une bijection entre les sous champs fermés et réduits de $\mathcal{X}$ et ceux de X. Soit $\mathcal{D}$ un diviseur de Cartier réduit de $\mathcal{X}$ de support $\varepsilon^{-1}(D)$. Comme $D \cap X_{\mathrm{sm}}$ est un diviseur de Cartier, il existe un unique $a \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $\varepsilon^{-1}(D \cap X_{\mathrm{sm}}) = a(\mathcal{D} \cap \varepsilon^{-1}(X_{\mathrm{sm}}))$. Nous appelons l'entier a, *la multiplicité de $\mathcal{X}$ le long de $\mathcal{D}$.*

Théorème I.C.4 **(Théorème 5.2 dans [FMN10])**. — 1. *Soit X une variété torique simpliciale d'éventail Σ et de tore T. Pour chaque rayon ρ de Σ, on choisit un entier $a_\rho \in \mathbb{N}_{>0}$. Notons* $\mathbf{a} := (a_\rho)_{\rho\in\Sigma(1)}$. *Le champ $\sqrt[\mathbf{a}]{\mathbf{D}^{\mathrm{can}}/\mathcal{X}^{\mathrm{can}}}$ a une structure de champ torique de Deligne Mumford de tore T tel que le morphisme canonique $\sqrt[\mathbf{a}]{\mathbf{D}^{\mathrm{can}}/\mathcal{X}^{\mathrm{can}}} \to \mathcal{X}^{\mathrm{can}}$ soit un morphisme entre champs toriques de Deligne-Mumford.*

2. *Soit $\mathcal{X}$ une orbifold torique. Soit n le nombre de rayons de l'éventail de l'espace grossier X. Il existe un unique n-uplet $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{N}_{>0})^n$ tel que le champ $\mathcal{X}$ soit isomorphe, comme champ torique, à*

$$\sqrt[a_1]{D_1^{\mathrm{can}}/\mathcal{X}^{\mathrm{can}}} \times_{\mathcal{X}^{\mathrm{can}}} \cdots \times_{\mathcal{X}^{\mathrm{can}}} \sqrt[a_n]{D_n^{\mathrm{can}}/\mathcal{X}^{\mathrm{can}}}.$$

où D_i^{can} est le diviseur correspondant au rayon ρ_i.

Pour démontrer le premier point, l'action de T sur $\sqrt[\mathbf{a}]{\mathbf{D}^{\mathrm{can}}/\mathcal{X}^{\mathrm{can}}}$ se fait en utilisant la propriété universelle du diagramme cartésien (I.C.1). Comme $\mathcal{X} - T$ est une intersection normale de diviseurs dont les composantes irréductibles sont notées $\mathcal{D}_i$ pour i dans $\{1, \dots, n\}$. Notons $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n)$ les multiplicités des diviseurs $\mathcal{D}_i$. Ceci nous permets de définir un morphisme $\mathcal{X} \to \sqrt[\mathbf{a}]{\mathbf{D}^{\mathrm{can}}/\mathcal{X}^{can}}$ à l'aide du diagramme cartésien (I.C.1). Puis le théorème principal de Zariski (« Zariski's main theorem ») nous montre que ce morphisme est un isomorphisme. Le diagramme (I.C.2) implique la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{X}^{\mathrm{can}}) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}\,(\mathcal{X}) \xrightarrow{q} \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{I.C.5}$$

Exemple I.C.6. — En suivant l'exemple (I.A.5), nous avons $\mathbb{P}(1,2,6) = \sqrt[2]{D_0/\mathbb{P}(1,1,3)}$ où D_0 est le diviseur $\{x = 0\}$ dans $\mathbb{P}(1,1,3)$.

I.D. Gerbes liées sur les orbifolds toriques

I.D.1. Champs de racines d'un faisceau inversible. — Notons $B\mathbb{C}^*$ le champ quotient $[\mathrm{pt}/\mathbb{C}^*]$. Rappelons qu'un S-point de $B\mathbb{C}^*$ est un faisceau inversible sur S. Soit b un entier strictement positif. Le morphisme de groupe $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ qui envoie $\lambda \mapsto \lambda^b$ induit un morphisme de champs algébriques $\wedge b : B\mathbb{C}^* \to B\mathbb{C}^*$ qui envoie $P \mapsto P^{\otimes b}$. Soit L un faisceau inversible sur un champ de Deligne-Mumford $\mathcal{X}$. Ceci induit un morphisme de $\mathcal{X} \to B\mathbb{C}^*$.

Le champ de racine b-ème de $(\mathcal{X}, L)$ est le champ défini par le produit cartésien

(I.D.1)
$$\begin{tikzcd} \sqrt[b]{L/\mathcal{X}} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & B\mathbb{C}^* \arrow[d, "\wedge b"] \\ \mathcal{X} \arrow[r, "L"] & B\mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\sqrt[b]{L/\mathcal{X}} \to B\mathbb{C}^*$ correspond à un faisceau inversible, noté $L^{1/b}$dans [**Cad03**], sur $\sqrt[b]{L/\mathcal{X}}$ tel que sa puissance b-ème soit isomorphe à π^*L. Plus explicitement, un objet de $\sqrt[b]{L/\mathcal{X}}$ au dessus de $f : S \to \mathcal{X}$ est un couple (M, φ) où M est un faisceau inversible sur S et $\varphi : M^{\otimes b} \xrightarrow{\sim} f^*M$. Le champ $\sqrt[b]{L/\mathcal{X}}$ est un μ_b-gerbe liée au-dessus de $\mathcal{X}$. La suite exacte de Kummer

$$1 \longrightarrow \mu_b \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{\wedge b} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1$$

induit un morphisme de liaison

$$\partial : H^1_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m) \to H^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mu_b) \tag{I.D.2}$$

La classe de $\sqrt[b]{L/\mathcal{X}}$ dans $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mu_b)$ est $\partial(L)$. Soit L, L' deux faisceaux inversibles sur $\mathcal{X}$. La gerbe $\sqrt[b]{L/\mathcal{X}}$ est isomorphe à $\sqrt[b]{L'/\mathcal{X}}$ si et seulement si $[L] = [L']$ dans $\mathrm{Pic}(\mathcal{X})/b\,\mathrm{Pic}(\mathcal{X})$.

I.D.2. Caractérisation des gerbes liées avec les champs de racines. — Tout d'abord, nous faisons quelques rappels sur la rigidification d'un champ de Deligne-Mumford.

Nous considérons l'union $I^{\mathrm{gen}}\mathcal{X} \subset I\mathcal{X}$ des composantes de dimension $\dim \mathcal{X}$. C'est un sous faisceau en groupes de $I\mathcal{X}$ qui est appelé *stabilisateur générique*. Dans la suite, nous noterons $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ pour la rigidification par $\mathcal{X} /\!\!/ I^{\mathrm{gen}}\mathcal{X}$ et nous l'appelons **la** rigidification.

En général, on peut rigidifier par un sous groupe central du stabilisateur générique mais nous n'avons pas besoin de cette construction ici. Nous renvoyons à [**AOV08**, Appendice A] (voir aussi [**ACV03**, Section 5.1], [**Rom05**] et [**AGV08**, Appentice C]).

La rigidification $r : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ satisfait les propriétés suivantes.

1. L'espace grossier de $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ est l'espace grossier de $\mathcal{X}$.
2. Le champ $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ est une orbifold.
3. Si $\mathcal{X}$ est une orbifold alors $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}} = \mathcal{X}$.
4. Le champ $\mathcal{X}$ est une gerbe liée sur $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$.

Nous renvoyons au théorème 5.1.5.(2) de [**ACV03**] pour la preuve de la proposition suivante

***Proposition I.D.3* (Propriété universelle du rigidifié)**. — *Soit $\mathcal{X}$ un champ lisse de Deligne-Mumford. Soit $\mathcal{Y}$ une orbifold. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme dominant. Alors il existe $g : \mathcal{X}^{\mathrm{rig}} \to \mathcal{Y}$ et un 2-morphisme $\alpha : g \circ r \Rightarrow f$ tel que le diagramme suivant soit 2-commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{X}^{\mathrm{rig}} \arrow[d, "\exists g"] \\ & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

Revenons aux cas des champs torique de Deligne-Mumford. Soit $\mathcal{X}$ un champ torique de tore $\mathcal{T}$ isomorphe $T \times BG$ où G est un groupe fini. Son rigidifier $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ est encore un champ torique de tore isomorphe à T et le morphisme canonique $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ est une G-gerbe liée. D'après le chapitre IV.3.4 dans [**Gir71**], le groupe $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}, G)$ classifie les G-gerbes liées.

***Définition I.D.4*.** — Une μ_b-gerbe liée dans $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}, \mu_b)$ est *essentiellement triviale* si elle est dans l'image de $\partial : H^1_{\text{ét}}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}, \mathbb{G}_m) \to H^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}, \mu_d)$.

En particulier d'après (I.D.2), tout champ de racine $\sqrt[b]{L/\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}}$ est une μ_b gerbe essentiellement triviale. Comme $\sqrt[b]{L/\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}}$ est isomorphe à $\sqrt[b]{L \otimes M^{\otimes b}/\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}}$, nous en déduisons une bijection entre les μ_b gerbes essentiellement triviales et le groupe $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}})/b\,\mathrm{Pic}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}})$.

Soit G un groupe abélien fini. Fixons une décomposition $G = \prod_{i=1}^{\ell} \mu_{b_i}$. Comme $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}, G)$ est isomorphe à $\oplus_{i=1}^{\ell} H^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}, \mu_{b_i})$, nous en déduisons les bijections suivantes.

$$\begin{aligned}
&\oplus_{i=1}^{\ell} H^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}, \mu_{b_i}) \\
&\xleftrightarrow{1:1} \left\{\text{produit fibré sur } \mathcal{X}^{\mathrm{rig}} \text{ de champs de racine } b_j\text{-ème de faisceaux inversibles}\right\} \\
&\xleftrightarrow{1:1} \prod_{j=1}^{\ell} \mathrm{Pic}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}})/b_j\,\mathrm{Pic}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}) \xleftrightarrow{1:1} \prod_{j=1}^{\ell} \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/b_j\mathbb{Z}, \mathrm{Pic}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}))
\end{aligned}$$

***Théorème I.D.5* (Voir Corollaire 6.26 dans [FMN10])**. — *Soit $\mathcal{X}$ un champ de Deligne-Mumford torique avec un tore isomorphe à $T \times BG$. Soit $G = \prod_{j=1}^{\ell} \mu_{b_j}$. Il existe $L_1, \ldots, L_\ell$ dans* $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}})$ *tel que $\mathcal{X}$ soit isomorphe, comme champ torique, à*

$$\sqrt[b_1]{L_1/\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}} \times_{\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}} \cdots \times_{\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}} \sqrt[b_\ell]{L_\ell/\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}}.$$

De plus, pour chaque $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, la classe $[L_j]$ dans $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}})/b_j \,\mathrm{Pic}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}})$ est unique.

Remarque I.D.6. — Remarquons que la présentation du champ torique $\mathcal{X}$ dépend de la décomposition du groupe G.

La partie difficile de la preuve consiste à montrer que la G-gerbe liée $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ est une gerbe essentiellement triviale. Pour cela nous démontrons le résultat technique suivant.

***Lemme I.D.7* (Théorème 6.11 [FMN10])**. — *Soit $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ une orbifold torique de tore T. Notons $\iota : T \hookrightarrow \mathcal{X}$ l'inclusion du tore. Alors le morphisme*

$$\iota^* : H^2_{\acute{e}t}(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m) \to H^2_{\acute{e}t}(T, \mathbb{G}_m)$$

est injectif.

Finalement le théorème découle du diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
H^1_{\text{ét}}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\sqrt[b_j]{\cdot/\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}}"] \arrow[d] & H^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}, \mu_{b_j}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}, \mathbb{G}_m) \arrow[d, hook, "\iota^*"] \\
1 \arrow[r] & H^2_{\text{ét}}(T, \mu_{b_j}) \arrow[r] & H^2_{\text{ét}}(T, \mathbb{G}_m)
\end{tikzcd}$$

Exemple I.D.8. — En suivant l'exemple (I.A.5), nous avons $\mathbb{P}(2, 4, 12) = \sqrt[2]{\mathcal{O}(1)/\mathbb{P}(1, 2, 6)}$

I.E. Comparaisons avec la définition de Borisov-Chen-Smith

Nous rappelons d'abord la définition d'un champ torique de Borisov-Chen-Smith dans [**BCS05**].

Définition I.E.1. — Un *éventail marqué* est un triplet $\mathbf{\Sigma} := (N, \Sigma, \beta)$ où N est un groupe abélien de type fini, Σ un éventail simplicial dans $N_{\mathbb{Q}} := N \otimes \mathbb{Q}$ avec n rayons et $\beta : \mathbb{Z}^n \to N$ tel que

1. les rayons de Σ engendrent $\mathbb{N}_{\mathbb{Q}}$,
2. pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, les éléments $\overline{\beta(e_i)}$ dans $N_{\mathbb{Q}}$ sont sur le rayon ρ_i où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ et le morphisme $N \to N \otimes \mathbb{Q}$ envoie $m \mapsto \overline{m}$.

Á un éventail marqué $\mathbf{\Sigma} = (N, \Sigma, \beta)$, nous pouvons associer deux éventails $\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{rig}} := (N/N_{\mathrm{tor}}, \Sigma, \beta^{\mathrm{rig}})$ et $\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{can}} = (N/N_{\mathrm{tor}}, \Sigma, \beta^{\mathrm{can}})$ où N_{tor} est la partie de torsion de N et β^{rig} est la composition de β et de la projection $N \to N/N_{\mathrm{tor}}$. Pour définir β^{can}, nous remarquons que pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, nous avons $\beta(e_i) = a_i v_i$ où $a_i \in \mathbb{N}_{>0}$ et v_i est le générateur du semi groupe $\rho_i \cap N/N_{\mathrm{tor}}$. Posons $\beta^{\mathrm{can}}(e_i) = v_i$. Pour résumer nous avons le diagramme suivant.

(I.E.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^n \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)"'] \arrow[dr, "\beta^{\mathrm{rig}}"] & N \arrow[d] \\
\mathbb{Z}^n \arrow[r, "\beta^{\mathrm{can}}"] & N/N_{\mathrm{tor}}
\end{tikzcd}$$

D'après [**BCS05**], nous en déduisons un morphisme d'éventail marqué

$$\mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}^{\mathrm{rig}} \to \mathbf{\Sigma}^{\mathrm{can}}$$

***Construction I.E.3* (Construction du champ $\mathcal{X}(\mathbf{\Sigma})$ associé à $\mathbf{\Sigma}$).** — Notons d le rang de N. Choisissons une résolution projective de N à deux termes

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{\ell} \xrightarrow{Q} \mathbb{Z}^{d+\ell} \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Choisissons un morphisme $B : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^{d+\ell}$ qui relève $\beta : \mathbb{Z}^n \to N$. Considérons le morphisme $[BQ] : \mathbb{Z}^{n+\ell} \to \mathbb{Z}^{d+\ell}$. Notons $DG(\beta) := \operatorname{coker}([BQ]^*)$. Notons $\beta^\vee : (\mathbb{Z}^n)^* \to DG(\beta)$ le morphisme de groupe qui rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}^n)^* \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\beta^\vee"'] & (\mathbb{Z}^{n+\ell})^* \arrow[d] \\
& DG(\beta) := \operatorname{coker}[BQ]^*
\end{tikzcd}$$

Définissons l'action de $G_{\mathbf{\Sigma}} := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(DG(\beta), \mathbb{C}^*)$ sur Z_Σ comme suit. Appliquons le foncteur $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{C}^*)$ au morphisme $\beta^\vee : (\mathbb{Z}^n)^* \to DG(\beta)$, nous trouvons un morphisme de groupe $G_{\mathbf{\Sigma}} \to (\mathbb{C}^*)^n$. Via l'action naturelle de $(\mathbb{C}^*)^n$ sur $\mathbb{C}^n$, nous définissons l'action de $G_{\mathbf{\Sigma}}$ sur Z_Σ. Finalement le champ associé à $\mathbf{\Sigma} := (N, \Sigma, \beta)$ est le champ quotient $\mathcal{X}(\mathbf{\Sigma}) := [Z_\Sigma / G_{\mathbf{\Sigma}}]$.

Soit $\mathbf{\Sigma}$ un éventail marqué et $\mathcal{X}(\mathbf{\Sigma})$ son champ de Deligne-Mumford associé. Il est facile de voir les propriétés suivantes

1. Le champ $\mathcal{X}(\mathbf{\Sigma})$ est un champ torique au sens de la Définition I.A.2.
2. Le champ $\mathcal{X}(\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{rig}})$ est le rigidifié de $\mathcal{X}(\mathbf{\Sigma})$.
3. Le champ $\mathcal{X}(\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{can}})$ est le champ canonique de la variété torique simpliciale qui est l'espace grossier de $\mathcal{X}(\mathbf{\Sigma})$.

Le résultat suivant nous donne la correspondance entre la définition combinatoire de Borisov-Chen-Smith et notre définition géométrique I.A.2.

Théorème I.E.4. — *Soit $\mathcal{X}$ un champ de Deligne-Mumford torique d'espace grossier la variété torique X. Soit Σ l'éventail de X dans $N_{\mathbb{Q}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Supposons que les rayons de Σ engendrent $N_{\mathbb{Q}}$. Il existe un éventail marqué tel que $\mathcal{X}$ soit isomorphe, comme champ torique, au champ torique associé à l'éventail marqué. De plus, si $\mathcal{X}$ n'a pas de stabilisateur générique trivial alors cet éventail marqué est unique.*

Pour démontrer ce résultat, il suffit de montrer qu'un champ torique de Deligne-Mumford est un quotient global $\mathcal{X}^{\mathrm{can}} = [Z_\Sigma / G_{\mathcal{X}}]$ où $G_{\mathcal{X}} = \operatorname{Hom}(\operatorname{Pic}(\mathcal{X}), \mathbb{C}^*)$. Ceci se fait facilement car nous avons $\mathcal{X}^{\mathrm{can}} = [Z_\Sigma / G_{\mathcal{X}^{\mathrm{can}}}]$ et nous savons comment calculer un champ de racines sur un quotient global.

I.F. Champs toriques et symétrie miroir en termes d'isomorphismes d'anneaux

D'après Givental [**Giv98b**] et Barannikov [**Bar00**], le partenaire miroir de l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ est la fonction $f_1 = x_0 + \cdots + x_n$ définie sur le tore d'équation $x_0 \cdots x_n = 1$. Ce théorème miroir s'énonce en termes d'un isomorphisme entre variétés de Frobenius qui sont obtenues d'un part par un déploiement universel de f_1 et sur la cohomologie quantique de $\mathbb{P}^n$. Pour expliquer notre motivation, regardons la fonction $f = x_0 + \cdots + x_n$ définie sur la fibration $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \to \mathbb{A}^1$ définie par $\pi(x_0, \ldots, x_n) = x_0 \cdots x_n$. De ce point de vue, il est naturel de considérer les déformations de

f comme déploiements $F(x,t) : \mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^k \to \mathbb{C}$ qui satisfont $F(x,0) = f(x)$, avec la relation d'équivalence induite par les diagrammes commutatifs suivants.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^k \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "F"] \arrow[dd, "\pi\times\mathrm{id}_{\mathbb{A}^k}"'] & & \mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{k'} \arrow[dl, "F'"'] \arrow[dd, "\pi\times\mathrm{id}_{\mathbb{A}^{k'}}"] \\ & \mathbb{C} & \\ \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^k \arrow[rr, "\psi"'] & & \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{k'} \end{tikzcd} \tag{I.F.1}$$

Avec des techniques de De Gregorio ([**dG06**]), nous pouvons montrer que, au moins au niveau des germes, l'espace tangent de ce foncteur de déformation,noté $T^1_{f/\pi}$, est donnée par l'algèbre

$$T^1_{f/\pi} = \frac{\mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]}{(\pi) + \Theta_\pi(f)} \tag{I.F.2}$$

où Θ_π sont les champs de vecteurs sur $\mathbb{A}^{n+1}$ tangent à toutes les fibres de π. Nous l'appelons *l'algèbre de Jacobi de f au dessus de $\pi^{-1}(0)$*. Dans le cas du partenaire miroir de $\mathbb{P}^n$, nous pouvons voir facilement que Θ_π est librement engendré par les champs de vecteurs

$$x_i\partial_{x_i} - x_{i+1}\partial_{x_{i+1}}, i \in \{0,\ldots,n-1\}. \tag{I.F.3}$$

Nous en déduisons un isomorphisme d'anneaux

$$T^1_{f/\pi} = \frac{\mathbb{C}[x]}{(x^{n+1})} \simeq H^*(\mathbb{P}^n;\mathbb{C}) \tag{I.F.4}$$

Nous dirons que la fibration (f,π) est miroir de $\mathbb{P}^n$. Nous allons généraliser cet isomorphisme à des orbifolds toriques dont l'espace grossier est un espace projectif à poids.

Soit $\mathbf{p} = (p_0,\ldots,p_n)$ dans $(\mathbb{N}_{>0})^{n+1}$ tel que $\mathrm{pgcd}(p_0,\ldots,p_i,\ldots,p_n) = 1$ c'est-à-dire que l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(\mathbf{p})$ n'a pas de stabilisateur générique.

D'après le théorème I.C.4, une orbifold torique dont l'espace grossier est un espace projectif à poids $\mathbb{P}(\mathbf{p})$ est codée par un $(n+1)$–uplet $\mathbf{w} := (w_0,\ldots,w_n) \in (\mathbb{N}_{>0})^{n+1}$ qui sont les multiplicités des diviseurs toriques. Une telle orbifold est notée $\mathcal{X}(\mathbf{w},\mathbf{p})$.

***Théorème I.F.5* (Théorème 2 dans [dGM08])**. — *Soit* $\mathbf{p} := (p_0,\ldots,p_n) \in (\mathbb{N}_{>0})^{n+1}$ *tel que* $\mathrm{pgcd}(p_0,\ldots,p_n) = 1$. *Soit* $\mathbf{w} := (w_0,\ldots,w_n) \in (\mathbb{N}_{>0})^{n+1}$. *Il existe une fibration* $\pi_{\mathbf{p}} : \mathcal{Y}(\mathbf{p}) \to C(\mathbf{p})$ *au dessus d'un courbe rationnelle avec une fonction* $f_{\mathbf{w}} : \mathcal{Y}(\mathbf{p}) \to \mathbb{C}$ *telle que*

1. *la fibre générique* $\pi_{\mathbf{p}}^{-1}(t), t \neq 0$ *soit isomorphe au tore* $x_0^{p_0}\ldots x_n^{p_n} = 1$ *et* $f_{\mathbf{w}}$ *soit donnée par* $x_0^{w_0} + \cdots + x_n^{w_n}$ *via cet isomorphisme ;*
2. *un isomorphisme d'anneaux*

$$T^1_{f_{\mathbf{w}}/\pi_{\mathbf{p}}} \simeq A^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}(\mathbf{w},\mathbf{p});\mathbb{C}) \tag{I.F.6}$$

où le membre de droite est l'anneau de Chow de $\mathcal{X}(\mathbf{w},\mathbf{p})$.

La démonstration se fait de façon complètement explicite en utilisant la présentation de l'anneau de Chow des orbifolds toriques de Borisov-Chen-Smith dans [**BCS05**].

CHAPITRE II

INVARIANTS DE GROMOV-WITTEN EN GENRE 0, QUANTUM D-MODULES ET CÔNES LAGRANGIENS TORDUS

II.A. Invariants de Gromov-Witten tordus en genre 0

Dans ce paragraphe nous rappelons la définition des invariants de Gromov-Witten pour les variétés.

Notation II.A.1. —
- Notons $H_2(X,\mathbb{Z})$ le deuxième groupe d'homologie entier modulo torsion.
- Notons $\mathrm{NE}(X) \subset H_2(X,\mathbb{Z})$ le cône de Mori, engendré comme semi-groupe par les classes d'équivalence des courbes irréductibles dans X.

Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$. Soit d une classe dans $H_2(X,\mathbb{Z})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)$ l'espace de module des applications stables de genre 0 et de degré d. Un point géométrique de cet espace de module sera noté $(C, \underline{x}, f)$ où $f : C \to X$ est le morphisme de degré d et $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ sont les points marqués sur la courbe C. Pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$, nous avons une application d'évaluation au i-ème point marqué notée $\mathrm{e}_i : \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d) \to X$. D'après [**Kon95a**] et [**BM96**], cet espace de module est un champs de Deligne-Mumford propre. En général cet espace de module n'a pas la dimension « attendue ». Dans [**BF97**], Behrend et Fantechi construisent un cycle appelé *cycle virtuel* dont la classe dans l'anneau de Chow est notée $[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)]^{\mathrm{vir}}$. Le degré de cette classe est

$$\deg[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)]^{\mathrm{vir}} = \int_d c_1(TX) + \dim_{\mathbb{C}} X + n - 3$$

Heuristiquement, pour chaque point $(C, \underline{x}, f) \in \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)$, la théorie de la déformation montre que l'espace tangent est $H^0(C, f^*TX)$ et une obstruction est $H^1(C, f^*TX)$. Le théorème de Riemann-Roch sur C montre que $\dim H^0(C, f^*TX) - \dim H^1(C, f^*TX) = \int_d c_1(TX) + \dim_{\mathbb{C}} X + n - 3$ et donc ne dépend pas du point $(C, \underline{x}, f)$.

Pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$, nous posons $\psi_i := c_1(L_i)$ où L_i est un fibré en droite sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)$ dont la fibre au dessus du point géométrique $(C, \underline{x}, f) \in \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)$ est le cotangent à C au point x_i. *Les invariants de Gromov-Witten avec descendants* sont définis par la formule suivante : soit $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in H^{2*}(X)$ et $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$

$$\left\langle \gamma_1\psi_1^{m_1}, \ldots, \gamma_n\psi_n^{m_n} \right\rangle_{0,n,d} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)]^{\mathrm{vir}}} \prod_{i=1}^{n} \psi_i^{m_i}\, \mathrm{e}_i^*\, \gamma_i \in \mathbb{Q} \tag{II.A.2}$$

Dans la suite, nous nous intéresserons aussi aux invariants de Gromov-Witten « tordus ». Une *torsion* [1] est un couple $(\mathbf{c}, E)$ où $\mathbf{c}$ est une classe caractéristique multiplicative et inversible et E un fibré vectoriel sur X. L'oubli du $(n+1)$-ème point marqué nous donne un morphisme $\pi : \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}(X,d) \to \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)$ qui est la courbe universelle.

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}(X,d) \arrow[r, "\mathrm{e}_{n+1}"] \arrow[d, "\pi"] & X \\ \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d) & \end{tikzcd}$$

Ainsi $E_{0,n,d} := R\pi_* \mathrm{e}_{n+1}^* E$ est un élément dans $K(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d))$. Pour chaque point géométrique $(C, \underline{x}, f)$, nous avons $\mathrm{rg}(E_{0,n,d} \mid_{(C,\underline{x},f)}) = H^0(C, f^*E) - H^1(C, f^*E)$. Un fibré E est dit *convexe* (*resp. concave*) si $H^1(C, f^*E) = 0$ (*resp.* $H^0(C, f^*E) = 0$) pour toute application stable $(C, \underline{x}, f)$. Si $E^\vee$ est concave alors E est convexe mais la réciproque est fausse (*cf.* l'exemple ci-dessous).

Exemple II.A.3. — Pour $C = \mathbb{P}^1$, un fibré $E = \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$ est convexe si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on a $a_i \geq -1$. Par dualité de Serre, on en déduit qu'un fibré $E = \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$ est concave si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on a $a_i \leq -1$.

***Lemme II.A.4* (Lemma 10 in [FP97])**. — *Soit E un fibré globalement engendré sur X. Alors E est convexe et $E_{0,n,d}$ un fibré vectoriel de rang $\int_d c_1(E) + \mathrm{rg}(E)$.* □

Toute classe $\mathbf{c}$ peut s'écrire

$$\mathbf{c}(\cdot) := \exp\left(\sum_{k\geq 0} s_k \,\mathrm{Ch}_k(\cdot)\right) \tag{II.A.5}$$

où Ch_k est la composante de degré k du caractère de Chern. Les invariants de Gromov-Witten tordus par $(\mathbf{c}, E)$ sont définis par

$$\left\langle \gamma_1\psi_1^{m_1}, \ldots, \gamma_n\psi_m^{m_n} \right\rangle_{0,n,d}^{(\mathbf{c},E)} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)]^{\mathrm{vir}}} \prod_{i=1}^n \psi_i^{m_i}\, \mathrm{e}_i^* \gamma_i \cup \mathbf{c}(E_{0,n,d}) \in \mathbb{Q}[\![s_0, s_1 \ldots,]\!] \tag{II.A.6}$$

Si nous prenons $\mathbf{c} = 1$, nous retrouvons les invariants définis (II.A.2). Pour cette raison, le cas $\mathbf{c} = 1$ sera appelé le cas des invariants *non tordus*. A toute torsion $(\mathbf{c}, E)$, nous lui associons *une torsion duale* $(\mathbf{c}^*, E^\vee)$ défini par $s_k^* = (-1)^{k+1} s_k$.

Dans la littérature, on utilise deux torsions spécifiques :

1. $(\mathbf{e}_\lambda, E)$ où $\mathbf{e}_\lambda$ est la classe d'Euler équivariante avec paramètre λ, noté $\mathbf{e}_\lambda$, et $\mathbb{C}^*$ agit sur le fibré E par multiplication sur les fibres. Cette torsion sera très étudiée dans la suite de ce mémoire. Une des motivations pour étudier cette torsion avec des fibrés convexes vient du résultat suivant

   ***Théorème II.A.7* ([KKP03])**. — *Soit E un fibré convexe sur X. Soit Y le zéro d'une section régulière de E et $\iota : Y \to X$ cette inclusion. Pour $\gamma \in H_2(Y, \mathbb{Z})$, notons j_γ l'inclusion naturelle de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(Y,\gamma) \to \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \iota_*\gamma)$. Alors, pour tout $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$, on a*

   $$\sum_{\iota_*\gamma = d} (j_\gamma)_* [\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(Y,\gamma)]^{\mathrm{vir}} = c_{\mathrm{top}}(E_{0,n,d}) \cap [\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)]^{\mathrm{vir}}$$

1. En anglais, un « twist »

Ainsi, la limite non équivariante des invariants tordus par $(\mathbf{e}_\lambda, E)$ donne les invariants d'une intersection complète Y dans X.

2. (Td, TX). Cette torsion est apparue dans la thèse de Coates et dans les travaux de Givental-Tonita [**GT11**] pour étudier les invariants de Gromov-Witten en K-théorie. Plus précisément, les invariants en K-théorie sont définis par : soit $a_1, \ldots, a_n \in K(X)$

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle^K_{0,n,d} := \chi\left(\mathrm{e}_1^*(a_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{e}_n^*(a_n) \otimes [\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)}]\right)$$

où $\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)}$ est le faisceau structural virtuel défini par Lee [**Lee04**]. Dans [**GT11**], Givental-Tonita définissent les « faux » invariants de Gromov-Witten en K-théorie via les invariants tordus par (Td, TX).

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle^{K,faux}_{0,n,d} := \langle \mathrm{Ch}(a_1), \ldots, \mathrm{Ch}(a_n) \rangle^{(\mathrm{Td},TX)}_{0,n,d}$$

Moralement, le fibré tangent virtuel de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)$ serait $TX_{0,n,d}$ et si l'on applique le théorème de Riemann-Roch sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)$, on aurait égalité entre les vrais et les faux invariants en K-théorie. Ceci n'est pas aussi simple et l'article de Givental-Tonita donne un lien entre ces deux invariants.

II.B. Produit quantique tordu par $(\mathbf{c}, E)$

Notation II.B.1. — — Fixons une fois pour toute une base $(T_0, \ldots, T_s)$ de $H^{2*}(X)$ où $T_0 = \mathbf{1}$ est le neutre pour le cup produit et $T_1, \ldots, T_r$ est une base du $H^2(X)$. Notons $(T^0, \ldots, T^s)$ la base duale pour la dualité de Poincaré. Notons $t_0, \ldots, t_s$ les coordonnés associées à la base $(T_a)_{a\in\{0,\ldots,s\}}$ et $\tau = \sum_{a=0}^s t_a T_a$. Notons $\tau_2 = \sum_1^r t_a T_a$.

— Notons $\mathbb{C}[Q] := \mathbb{C}[\mathrm{NE}(X)]$ et $\mathbb{C}[\![Q]\!]$ pour la complétion naturelle de $\mathbb{C}[Q]$.

— Soit R un anneau commutatif. Considérons la valuation $v : R[s_0, s_1 \ldots,] \to \mathbb{N}$ par $v(s_k) = k + 1$. Notons $R[\![\mathbf{s}]\!]$ la complétion de $R[s_0, s_1 \ldots,]$ par rapport à cette valuation. Notons

$$\mathbb{C}[\![Q, \mathbf{s}]\!],\ \mathbb{C}[\![Q, \tau, \mathbf{s}]\!] \text{ et } \mathbb{C}[z^\pm][\![Q, \tau, \mathbf{s}]\!]$$

les complétions respectives de $\mathbb{C}[\![Q]\!][s_0, s_1, \ldots]$, $\mathbb{C}[\![Q]\!][t_0, \ldots, t_s, s_0, s_1, \ldots]$ et $\mathbb{C}[z^\pm][\![Q]\!][t_0, \ldots, t_s, s_0, s_1, \ldots]$

— Soit $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in H^{2*}(X)$ et $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$. Posons

$$\left\langle\!\!\left\langle \psi_1^{m_1}\gamma_1, \ldots, \psi_k^{m_k}\gamma_k \right\rangle\!\!\right\rangle^{(\mathbf{c},E)}_\tau := \sum_{n\geq 0} \sum_{d\in\mathrm{NE}(X)} \frac{Q^d}{n!} \left\langle \psi_1^{m_1}\gamma_1, \ldots, \psi_k^{m_k}\gamma_k, \tau, \ldots, \tau \right\rangle^{(\mathbf{c},E)}_{0,n+k,d} \in \mathbb{C}[\![Q, \tau, \mathbf{s}]\!]$$

Le potentiel de Gromov-Witten est défini par

$$\mathcal{F}_{(\mathbf{c},E)}(\tau) := \langle\!\langle \rangle\!\rangle^{(\mathbf{c},E)}_\tau \in \mathbb{C}[\![Q, \tau, \mathbf{s}]\!] \tag{II.B.2}$$

Définition II.B.3. — Soit $\gamma_1, \gamma_2 \in H^{2*}(X)$.

$$\gamma_1 \bullet^{(\mathbf{c},E)}_\tau \gamma_2 := \sum_{a=0}^s \langle\!\langle \gamma_1, \gamma_2, T_a \rangle\!\rangle^{(\mathbf{c},E)}_\tau \frac{T^a}{\mathbf{c}(E)} \in H^{2*}(X) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![Q, \tau, \mathbf{s}]\!]$$

Remarquons que

$$T_i \bullet_\tau^{(\mathbf{c},E)} T_j = \sum_{a=0}^{s} \frac{\partial^3 \mathcal{F}_{(\mathbf{c},E)}}{\partial t_i \partial t_j \partial t_a} T^a \tag{II.B.4}$$

$$(\gamma_1 \bullet_\tau^{(\mathbf{c},E)} \gamma_2, \gamma_3)_{(\mathbf{c},E)} = \sum_{a=0}^{s} \langle\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle\rangle_\tau^{(\mathbf{c},E)} \tag{II.B.5}$$

où $(\cdot,\cdot)_{(\mathbf{c},E)}$ est la dualité de Poincaré tordue *i.e.*,

$$(\gamma_1, \gamma_2)_{(\mathbf{c},E)} = \int_X \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \mathbf{c}(E)$$

Nous avons $(T_a, T_b/\mathbf{c}(E))_{(\mathbf{c},E)} = \delta_{ab}$.

Les propriétés des invariants tordus impliquent le résultat suivant.

Proposition II.B.6. — *Le produit* $\bullet_\tau^{(\mathbf{c},E)}$ *est commutatif, associatif, de neutre* $\mathbf{1}$ *et satisfait la relation de Frobenius par rapport à* $(\cdot,\cdot)_{(\mathbf{c},E)}$. □

Le petit produit quantique tordu est défini par la restriction de $\bullet_\tau^{(\mathbf{c},E)}$ à $H^2(X)$ et à l'aide de l'axiome du diviseur, nous obtenons

$$\gamma_1 \bullet_{\tau_2}^{(\mathbf{c},E)} \gamma_2 = \sum_{a=0}^{s} \sum_{d \in \mathrm{NE}(X)} Q^d e^{\int_d \tau_2} \langle \gamma_1, \gamma_2, T_a \rangle_{0,3,d}^{(\mathbf{c},E)} \frac{T^a}{\mathbf{c}(E)}$$

II.C. D-module quantique tordu par $(\mathbf{c}, E)$

Définition II.C.1. — Le *D-module quantique tordu par* $(\mathbf{c}, E)$ est le triplet

$$\mathrm{QDM}_{(\mathbf{c},E)}(X) := \left(H^{2*}(X) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z][\![Q, \mathbf{s}, \tau]\!], \nabla^{(\mathbf{c},E)}, S_{(\mathbf{c},E)}\right)$$

où $\nabla^{(\mathbf{c},E)}$ est une connexion définie par

$$\nabla_a^{(\mathbf{c},E)} : H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[z][\![Q, \mathbf{s}, \tau]\!] \to z^{-1} H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[z][\![Q, \mathbf{s}, \tau]\!]$$

$$\nabla_a^{(\mathbf{c},E)} = \partial_a + \frac{1}{z}\left(T_a \bullet_\tau^{(\mathbf{c},E)}\right), \qquad a \in \{0, \ldots, s\},$$

et $S_{(\mathbf{c},E)}$ est un accouplement 'z-sesquilinéaire' sur $H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[z][\![Q, \mathbf{s}, \tau]\!]$ défini par

$$S_{(\mathbf{c},E)}(u, v) = (u(-z), v(z))_{(\mathbf{c},E)}$$

pour tout $u, v \in H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[z][\![Q, \mathbf{s}, \tau]\!]$. Quand nous restreignons au paramètre τ_2, nous l'appelons *petit D-module quantique tordu par* $(\mathbf{c}, E)$

$$\mathrm{SQDM}_{(\mathbf{c},E)}(X) = (H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[z][\![Q, \mathbf{s}, \tau_2]\!], \nabla = \nabla^{(\mathbf{c},E)}, S = S_{(\mathbf{c},E)})$$

Quand $\mathbf{c} = 1$ et $E = 0$, le triplet

$$\mathrm{QDM}(X) = (H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[z][\![Q, \tau]\!], \nabla = \nabla^{(\mathbf{c}=1,E=0)}, S = S_{(\mathbf{c}=1,E=0)})$$

est appelé le *D-module quantique* de X.

Remarque II.C.2. — Le module $H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[z][\![Q, \mathbf{s}, \tau]\!]$ peut être vu comme le module des sections globales du fibré vectoriel trivial de fibre $H^{2*}(X)$ au dessus du voisinage formel du point $Q = \mathbf{s} = \tau = z = 0$. Comme nous avons un $\frac{1}{z}$ dans la définition de $\nabla^{(\mathbf{c},E)}$, la connexion $\nabla^{(\mathbf{c},E)}$ ne préserve pas $H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[z][\![Q, \mathbf{s}, \tau]\!]$. Parfois, on regarde $H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[z][\![Q, \mathbf{s}, \tau]\!]$ comme un réseau dans un module plus grand $H^{2*}(X)\otimes\mathbb{C}[z^{\pm}][\![Q,\mathbf{s},\tau]\!]$ qui est préservé par $\nabla^{(\mathbf{c},E)}$ (voir, e.g. [**Sab02**, p.18]).

Posons $(z-\psi)^{-1} := \sum_{k\geq 0} z^{-k-1}\psi^k$. Givental [**Giv96**, Corollaire 6.2] a défini $L_{(\mathbf{c},E)}(\tau,z)\in \mathrm{End}(H^{2*}(X))\otimes\mathbb{C}[z^{\pm}][\![Q,\mathbf{s},\tau]\!]$ par la formule suivante : pour tout $\gamma\in H^{2*}(X)$

$$L_{(\mathbf{c},E)}(\tau,z)\gamma = \gamma - \sum_{a=0}^{s}\left\langle\!\!\left\langle \frac{\gamma}{z+\psi}, T_a\right\rangle\!\!\right\rangle_{\tau}^{(\mathbf{c},E)} \frac{T^a}{\mathbf{c}(E)} \in H^{2*}(X)\otimes\mathbb{C}[z^{\pm}][\![Q,\mathbf{s},\tau]\!]^{(2)}$$

Proposition II.C.3 **(Voir, e.g. [Pan98**, §2]**,** [**Iri11**, Proposition 2.1]**)**

1. *La connexion $\nabla^{(\mathbf{c},E)}$ est plate et $L_{(\mathbf{c},E)}(\tau,z)$ est une solution fondamentale de $\nabla^{(\mathbf{c},E)}$ i.e., nous avons pour tout $a\in\{0,\dots,s\}$ et pour tout $\gamma\in H^{2*}(X)$*

$$\nabla_a^{(\mathbf{c},E)}\left(L_{(\mathbf{c},E)}(\tau,z)\gamma\right) = 0.$$

2. *L'accouplement $S_{(\mathbf{c},E)}$ est $\nabla^{(\mathbf{c},E)}$-plat et $L_{(\mathbf{c},E)}(\tau,z)$ est une isométrie pour $S_{(\mathbf{c},E)}$ i.e., pour tout $u,v\in H^{2*}(X)\otimes\mathbb{C}[z][\![Q,\mathbf{s},\tau]\!]$, nous avons*

$$\begin{aligned} dS_{(\mathbf{c},E)}(u,v) &= S_{(\mathbf{c},E)}\left(\nabla^{(\mathbf{c},E)}u,v\right) + S_{(\mathbf{c},E)}\left(u,\nabla^{(\mathbf{c},E)}v\right)\\ S_{(\mathbf{c},E)}(u,v) &= S_{(\mathbf{c},E)}\left(L_{(\mathbf{c},E)}u, L_{(\mathbf{c},E)}v\right)\end{aligned}$$

□

La dernière égalité de la proposition II.C.3, nous permet de calculer l'inverse de $L_{(\mathbf{c},E)}$ qui est donné par :

$$L_{(\mathbf{c},E)}(\tau,z)^{-1}\gamma = \gamma + \sum_{a=0}^{s}\left\langle\!\!\left\langle \frac{T_a}{z-\psi},\gamma\right\rangle\!\!\right\rangle_{\tau}^{(\mathbf{c},E)} \frac{T^a}{\mathbf{c}(E)}.$$

Définition II.C.4. — La *fonction J tordue par* $(\mathbf{c},E)$ est définie par

$$\begin{aligned} J_{(\mathbf{c},E)}(\tau,z) &:= zL_{(\mathbf{c},E)}(\tau,z)^{-1}\mathbf{1}\\ &= z+\tau+\sum_{a=0}^{s}\left\langle\!\!\left\langle \frac{T_a}{z-\psi}\right\rangle\!\!\right\rangle_{\tau}^{(\mathbf{c},E)} \frac{T^a}{\mathbf{c}(E)}\end{aligned}$$

Nous en déduisons que pour $a\in\{0,\dots,s\}$:

$$L_{(\mathbf{c},E)}(\tau,z)^{-1}T_a = L_{(\mathbf{c},E)}(\tau,z)^{-1}z\nabla_a^{(\mathbf{c},E)}\mathbf{1} = \partial_a J_{(\mathbf{c},E)}(\tau,z). \tag{II.C.5}$$

II.D. Cône tordu par $(\mathbf{c},E)$ de Givental

Ce paragraphe est plutôt une version heuristique de l'appendice B dans [**CCIT09**] où les auteurs emploient la géométrie algébrique formelle pour décrire « correctement » le cône lagrangien. Dans ce mémoire, nous resterons à une description plus heuristique.

Posons $\mathcal{H}_{(\mathbf{c},E)} := H^{2*}(X)\otimes\mathbf{C}[z^{\pm}][\![Q,\mathbf{s}]\!]$ et la 2-forme non dégénérée sur $\mathcal{H}_{(\mathbf{c},E)}$ définie par : pour tout $u,v\in\mathcal{H}_{(\mathbf{c},E)}$

$$\Omega_{(\mathbf{c},E)}(u,v) := \mathrm{Res}_{z=0}\left(u(-z),v(z)\right)_{(\mathbf{c},E)}dz.$$

Il n'est pas difficile de voir que $(\mathcal{H}_{(\mathbf{c},E)},\Omega_{(\mathbf{c},E)})$ est une variété symplectique. Notons $\mathcal{H}^+_{(\mathbf{c},E)} := H^{2*}(X)\otimes\mathbf{C}[z][\![Q,\mathbf{s}]\!]$. Nous pouvons identifier $(\mathcal{H}_{(\mathbf{c},E)},\Omega_{(\mathbf{c},E)})$ avec la structure canonique sur le cotangent à $\mathcal{H}^+_{(\mathbf{c},E)}$. De plus si nous avons une fonction sur $\mathcal{H}^+_{(\mathbf{c},E)}$ alors le graphe de sa différentielle nous donne un sous-espace lagrangien de $T^*\mathcal{H}^+_{(\mathbf{c},E)}$.

Notons $\mathbf{t}(z)$ la coordonnée sur $\mathcal{H}^+_{(\mathbf{c},E)}$ c'est-à-dire

$$\mathbf{t}(z) := \sum_{k\geq 0} t_k z^k \in H^{2*}(X)_{\mathbf{C}} \otimes \mathbb{C}[z] \text{ où } t_k := \sum_{a=0}^{s} t_k^a T_a \tag{II.D.1}$$

Notons par $\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)} \subset \mathcal{H}_{(\mathbf{c},E)}$ l'ensemble des points de $\mathcal{H}_{(\mathbf{c},E)}$ qui s'écrivent

$$-z + \mathbf{t}(z) + \sum_{a=0}^{s} \left\langle\!\!\left\langle \frac{T_a}{-z-\psi} \right\rangle\!\!\right\rangle_{\mathbf{t}(z)}^{(\mathbf{c},E)} \frac{T^a}{\mathbf{c}(E)}.$$

Nous avons déjà rencontré une élément de $\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)}$ dans la définition II.C.4 :

$$J_{(\mathbf{c},E)}(\tau,-z) = -z + \tau + \sum_{a=0}^{s} \left\langle\!\!\left\langle \frac{T_a}{-z-\psi} \right\rangle\!\!\right\rangle_{\tau}^{(\mathbf{c},E)} \frac{T^a}{\mathbf{c}(E)}.$$

Cherchons à décrire l'espace tangent à $\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)}$. Les points de $T_f\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)}$ sont de la forme

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{a=0}^{s} \dot{t}_k^a T_a z^k + \sum_{k\geq 0}\sum_{a=0}^{s} \dot{t}_k^a \left\langle\!\!\left\langle T_a\psi^k, \frac{T_a}{-z-\psi} \right\rangle\!\!\right\rangle_{\mathbf{t}(z)}^{(\mathbf{c},E)} \frac{T^a}{\mathbf{c}(E)} \tag{II.D.2}$$

Exemple II.D.3. — Un exemple important de vecteur tangent dans $T_f\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)}$. Considérons le cas $\dot{t}_k^a = \delta_{k0}\delta_{ab}$. Nous obtenons

$$T_\beta + \sum_{a=0}^{s} \left\langle\!\!\left\langle T_\beta, \frac{T_a}{-z-\psi} \right\rangle\!\!\right\rangle_{\mathbf{t}(z)}^{(\mathbf{c},E)} \frac{T^a}{\mathbf{c}(E)} \in T_f\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)} \tag{II.D.4}$$

En particulier, d'après (II.C.5)

$$L^{-1}_{(\mathbf{c},E)}(\tau,-z)T_b = \partial_{t_0^b} J(\tau,-z) \in T_{J_{(\mathbf{c},E)}(\tau,-z)}\mathcal{L}^{(\mathbf{c},E)}.$$

Considérons le sous cas $b=0$ et développons (II.D.4) en puissance négative de z, nous obtenons

$$\mathbf{1} - \frac{\widetilde{\tau}(\mathbf{t}(z))}{z} + O(z^{-2}) \tag{II.D.5}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau} : H^{2*}(X)\otimes\mathbb{C}[z] &\to H^{2*}(X)\otimes\mathbf{C}[\![Q,\mathbf{s}]\!] \\ \mathbf{t}(z) &\mapsto \sum_{a=0}^{s} \langle\!\langle \mathbf{1}, T_a\rangle\!\rangle_{\mathbf{t}(z)}^{(\mathbf{c},E)} \frac{T^a}{\mathbf{c}(E)} \end{aligned} \tag{II.D.6}$$

***Proposition II.D.7* (Proposition B.4 of [CCIT09])**. — *Soit $f \in \mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)}$. L'espace tangent $T_f\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)}$ est un $\mathbb{C}[z][\![Q,\mathbf{s},\tau]\!]\langle z\partial_0,\ldots,z\partial_s\rangle$-module libre qui est engendré comme module par*

$$\forall a\in\{0,\ldots,s\},\qquad \partial_a J_{(\mathbf{c},E)}(\tau,-z)\mid_{\tau=\widetilde{\tau}(\mathbf{t}(z))}.$$

Pour démontrer cette proposition, nous utilisons le lemme suivant qui nous donne une interprétation géométrique de la fonction $\widetilde{\tau}$ en (II.D.6).

***Lemme II.D.8* ([Lemma B.6 of [CCIT09])**. — *L'espace tangent $T_f\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)}$ au point $f=-z+\mathbf{t}(z)+\cdots\in\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)}$ est le même que $T_{J_{(\mathbf{c},E)}(\widetilde{\tau}(\mathbf{t}(z)),-z)}\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)}$ au point $J_{(\mathbf{c},E)}(\widetilde{\tau}(\mathbf{t}(z)),-z)$ où $\widetilde{\tau}(\mathbf{t}(z))$ est donné par* (II.D.6).

Remarque II.D.9. — Nous pouvons donner une interprétation géométrique de ce résultat de la façon suivante. Comme $\mathcal{H}^{-}_{(\mathbf{c},E)} := z^{-1}.H^{2*}(X)_{\mathbb{C}} \otimes \mathbf{C}[z^{-1}][\![Q,\mathbf{s},\tau]\!]$ est en somme directe avec n'importe quel espace tangent du cône $\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)}$, nous en déduisons que $T_f\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)} \cap \{\mathbf{1} + \mathcal{H}^{-}_{(\mathbf{c},E)}\}$ est un unique point de $\mathcal{H}_{(\mathbf{c},E)}$. Le développement de ce point en puissance de z (*cf.* (II.D.2)), nous donne

$$\mathbf{1} - \frac{\widetilde{\tau}(\mathbf{t}(z))}{z} + O(z^{-2}).$$

La proposition II.D.7 implique le corollaire suivant.

Corollaire II.D.10. — *L'application*

$$\begin{aligned}\mathbb{J}_{(\mathbf{c},E)} : \mathrm{QDM}_{(\mathbf{c},E)}(X) &\to T_{J_{(\mathbf{c},E)}(\tau,-z)}\mathcal{L}^{(\mathbf{c},E)} \\ T_a &\mapsto \partial_a J_{(\mathbf{c},E)}(\tau,-z) = L^{-1}_{(\mathbf{c},E)}(\tau,-z)T_a\end{aligned} \tag{II.D.11}$$

est un isomorphisme de $\mathbf{C}[z][\![Q,\mathbf{s},\tau]\!]$*-modules. De plus, il satisfait* $\mathbb{J}_{(\mathbf{c},E)}(z\nabla^{(\mathbf{c},E)}_a T_b) = z\partial_a \mathbb{J}_{(\mathbf{c},E)} T_b$ *i.e., c'est un isomorphisme de* $\mathbf{C}[z][\![Q,\mathbf{s},\tau]\!]\langle z\partial_0,\ldots,z\partial_s\rangle$*-modules.*

CHAPITRE III

D-MODULES QUANTIQUES, SYMÉTRIE MIROIR ET DUALITÉ DE SERRE

III.A. D-modules quantiques des espaces projectifs à poids et symétrie miroir

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de [**DM13**] à propos de la symétrie miroir des espaces projectifs à poids. Soit $w_0, w_1, \cdots, w_n$ des entiers strictement positifs.

III.A.1. Coté A : D-modules quantiques des espaces projectifs à poids. —

III.A.1.a. Cohomologie orbifolde. —

Convention III.A.1. — Nous travaillons avec la topologie étale. Un champs de Deligne-Mumford sera supposé séparé et de type fini sur $\mathbb{C}$. Nous supposerons toujours que son espace grossier est un schéma. Nous emploierons le terme *orbifold* pour un champ de Deligne-Mumford lisse avec un stabilisiteur générique trivial.

Soit $\mathcal{X}$ un champs de Deligne-Mumford lisse. Le *champs d'inertie de* $\mathcal{X}$ noté $I\mathcal{X}$ est défini par le produit cartésien suivant où Δ est la diagonale

$$\begin{tikzcd} I\mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d, "\Delta"] \\ \mathcal{X} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{X}\times\mathcal{X} \end{tikzcd}$$

Nous pouvons toujours écrire $\mathcal{X}$ comme un quotient global $[X/G]$. Notons T l'ensemble des classes de conjugaison dans G. Pour $(g) \in T$, notons $\mathcal{X}^{(g)} = \{x \in \mathcal{X} \mid g \in \mathrm{Aut}(x)\}$ et $C(g)$ le centralisateur de g dans G. Dans ce cas

$$I\mathcal{X} = \coprod_{(g)\in T} I\mathcal{X}_{(g)} \text{ où } I\mathcal{X}_{(g)} = [X^{(g)}/C(g))]$$

La cohomologie orbifold est défini ([**CR04**]) comme l'espace vectoriel

$$H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}) = H^*(I\mathcal{X}).$$

Un point de $I\mathcal{X}$ est un couple (x, g) où $g \in \mathrm{Aut}(x)$. L'inversion $g \mapsto g^{-1}$ nous donne une involution $\mathrm{Inv} : I\mathcal{X} \to I\mathcal{X}$.

Soit $(x, g) \in I\mathcal{X}$. L'élément g agit sur l'espace tangent $T_x\mathcal{X}$. Les valeurs propres de cette action sont des racines de l'unité car $\mathrm{Aut}(x)$ est un groupe fini, nous les notons $e^{2\pi\sqrt{-1}r_1}, \ldots, e^{2\pi\sqrt{-1}r_n}$ avec $r_i \in [0, 1[\cap\mathbb{Q}$. Le champ $\mathcal{X}$ est *Gorenstein* si pour tout point x et pour tout $g \in \mathrm{Aut}(x)$, cette action est de déterminant 1. Remarquons que si $\mathcal{X}$ est Gorenstein alors son espace grossier est Gorenstein. Définissons

$$\mathrm{age}(x,g) = \sum_{i=1}^{n} r_i \in \mathbb{Q}$$

Cette âge ne dépend que de la composante connexe de $I\mathcal{X}$ et il est entier si $\mathcal{X}$ est Gorenstein. Pour toute classe γ dans $H^*(I\mathcal{X}_{(g)})$.

$$\deg_{\mathrm{orb}} \gamma := \deg \gamma + 2\,\mathrm{age}(g) \in \mathbb{Q}$$

Ainsi, l'espace vectoriel $H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})$ est gradué par des rationnels. Nous avons également une dualité de Poincaré qui est la somme directe des $(\cdot,\cdot)_{(g)}$.

$$\begin{aligned}(\cdot,\cdot)_{(g)} : H^*(I\mathcal{X}_{(g)}) \times H^*(I\mathcal{X}_{(g^{-1})}) &\to \mathbb{C}\\ (\gamma_1,\gamma_2) &\mapsto \int_{I\mathcal{X}_{(g)}} \gamma_1 \cup \mathrm{Inv}^* \gamma_2\end{aligned}$$

Remarque III.A.2. — Nous voudrions définir un cup produit sur cette cohomologie. Pour cela, nous pouvons se rappeler que dans le cas des variétés, le cup produit est le produit quantique où l'on ne considère que les applications constantes c'est-à-dire les termes de degré $d = 0$ dans la formule II.B.3 avec $c = 1$ et $E = 0$. L'idée naturelle de Chen-Ruan dans [**CR04**] et [**CR02**] est de définir un produit quantique orbifold puis de prendre seulement les termes de degré 0.

La théorie de Gromov-Witten pour les champs de Deligne-Mumford lisses ressemble à celle pour les variétés avec les différences suivantes. Une très bonne référence pour cette définition est l'article d'Abramovich-Graber-Vistoli [**AGV08**].

1. Les courbes sont des orbifolds $\mathcal{C}$ c'est-à-dire qu'elles peuvent avoir des groupes d'automorphismes aux points marqués et aux noeuds.
2. Les applications stables $f : \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ sont représentables c'est-à-dire qu'au niveau des groupes d'automorphismes, on a une injection $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(f(x))$.

Ainsi la formule explicite du cup produit orbifold est un peu technique. Nous renvoyons à Fantechi-Goettsche [**FG03**] pour une traitement plus complet. Soit $\gamma_1 \in H^*(I\mathcal{X}_{(g)})$ et $\gamma_2 \in H^*(I\mathcal{X}_{(h)})$, nous posons

$$\gamma_1 \cup_{\mathrm{orb}} \gamma_2 = \iota_*(\gamma_1 \,|_{\mathcal{X}^H} .\gamma_2 \,|_{\mathcal{X}^H} .e(g,h)) \in H^*(I\mathcal{X}_{(gh)})$$

où $H := \langle g,h\rangle$, $\iota : \mathcal{X}^H \hookrightarrow \mathcal{X}^{(gh)}$, $e(g,h)$ est la classe d'Euler d'un fibré $F(g,h)$ sur $\mathcal{X}^H$ construit ainsi. Soient a,b,c les ordres de $g,h,(gh)^{-1}$. Soit $\Sigma \to \mathbb{P}^1$ une revêtement ramifié de $\mathbb{P}^1$ ayant une ramification a en 0, b en 1 et c en ∞. On pose $F(g,h) := \left(T\mathcal{X}\,|_{\mathcal{X}^H} \otimes \mathbb{R}^1 p_*(\mathcal{O}_{\Sigma\times\mathcal{X}^H})\right)^H$ où p est la projection $\Sigma \times \mathcal{X}^H \to \mathcal{X}$.

Nous avons la proposition suivante.

Proposition III.A.3. — *Le cup produit orbifold est gradué, associatif, commutatif d'unité* **1**. *De plus* $(H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}), \cup_{\mathrm{orb}}, (\cdot,\cdot)_{\mathcal{X}})$ *est une algèbre de Frobenius.*

Calculer l'anneau de cohomologie n'est pas une trivialité car il faut identifier ce fibré $F(g,h)$. Cet anneau a été calculé par Borisov-Chen-Smith [**BCS05**] pour les champs de Deligne-Mumford toriques. Dans le paragraphe suivant nous explicitons l'anneau de cohomologie quantique orbifolde pour les espaces projectifs à poids.

III.A.1.b. Combinatoire. — Pour décrire le petit D-module quantique de l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(w)$, nous avons besoin de la combinatoire suivante.

Soit $w_0, w_1, \cdots, w_n$ des entiers strictement positifs. Posons $\mu := w_1 + \cdots + w_n$ Notons

$$F := \left\{\frac{\ell}{w_i} | \, 0 \leq \ell \leq w_i - 1, \; 0 \leq i \leq n\right\} = \{0 = f_1 < f_2 < \cdots < f_k < f_{k+1} := 1\}.$$

Pour $f \in \mathbb{Q}$, nous définissons

$$S_f := \{j | \, w_j f \in \mathbb{Z}\} \subset \{0, \cdots, n\} \text{ et } m_i := \prod_{j \in S_{f_i}} w_j. \tag{III.A.4}$$

La *multiplicité*, notée d_i, de f_i est l'entier défini par $d_i := \# S_{f_i}$. Remarquons $d_1 + \cdots + d_k = \mu$. Soit $c_0, c_1, \cdots, c_{\mu-1}$ une suite croissante

$$\underbrace{f_1, \cdots, f_1}_{d_1}, \underbrace{f_2, \cdots, f_2}_{d_2}, \cdots, \underbrace{f_k, \cdots, f_k}_{d_k}$$

Par récurrence, nous définissons la suite $(a(k), i(k)) \in \mathbb{N}^{n+1} \times \{0, \cdots, n\}$ par $a(0) = (0, \cdots, 0)$, $i(0) = 0$ et

$$a(k+1) = a(k) + \mathbf{1}_{i(k)} \text{ où } i(k) := \min\{i | a(k)_i / w_i = \min_j a(k)_j / w_j\}.$$

En particulier, $a(1) = (1, 0, \cdots, 0)$, $a(n+1) = (1, \cdots, 1)$, $a(\mu) = (w_0, w_1, \cdots, w_n)$ and $\sum_{i=0}^n a(k)_i = k$. Posons

$$c_k = a(k)_{i(k)} / w_{i(k)}$$

III.A.1.c. D-module quantique des espaces projectifs à poids. — Notons $P := c_1(\mathcal{O}(1))$. Notons t_1 la coordonnée sur $H^2(\mathbb{P}(w), \mathbb{C})$, $q := \exp(t_1)$ et $C^{\mathrm{orb}}(q)$ la matrice de l'endomorphisme $P \bullet_q$ de $H^*_{\mathrm{orb}}(\mathbb{P}(w), \mathbb{C})$ dans la base $(\mathbf{1}_{f_i} P^j)$. Dans [**CCLT06**] (ou aussi [**GS08**]), nous avons la matrice

$$C^{\mathrm{orb}}(q) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_\mu q^{1-c_{\mu-1}} \\ a_1 q^{c_1 - c_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 q^{c_2 - c_1} & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{\mu-1} q^{c_{\mu-1} - c_{\mu-2}} & 0 \end{pmatrix}$$

où

$$a_i := \begin{cases} 1/m_j & \text{if } i = d_1 + \cdots + d_j \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{III.A.5}$$

Pour tout $i \in \{0, \cdots, \mu - 1\}$, posons

$$(P^{\bullet_q})^i := \underbrace{P \bullet_q \cdots \bullet_q P}_{i \text{ fois}} \text{ où } (P^{\bullet_q})^0 := \mathbf{1}_{f_1}.$$

D'après [**CCLT06**], nous avons

$$(P^{\bullet_q})^i = q^{c_i} s_i \mathbf{1}_{c_i} P^{r(i)} \tag{III.A.6}$$

où $r(i) := \#\{k \mid k < i \text{ and } c_k = c_i\}$ et $s_i = \prod_{k=0}^n w_k^{-\lceil c_i w_k \rceil}$. En particulier, pour chaque $q \neq 0$, les classes de cohomologie $((P^{\bullet_q})^i)_{0 \leq i \leq \mu-1}$ forment une base de $H^*_{\mathrm{orb}}(\mathbb{P}(w), \mathbb{C})$. Posons

$$A_\infty := \frac{1}{2} \operatorname{diag}(\deg^{\mathrm{orb}} 1, \deg^{\mathrm{orb}} P, \ldots, \deg^{\mathrm{orb}} (P^{\bullet_q})^{\mu-1})$$

Rappelons la connexion du D module quantique est donnée par où $\delta_q = q\partial_q$

$$\nabla_{\delta_q} = \delta_q + \frac{1}{z}P\bullet_q$$
$$\nabla_{\delta_z} = \delta_z - \frac{1}{z}\mu P \bullet_q + A_\infty$$

***Proposition III.A.7* (Proposition 3.4.7 dans [DM13])**. — *La matrice de la connexion* ∇ *dans la base* $(\mathbf{1}_{f_i}P^j)$ *est*

$$-\frac{1}{z}C^{\mathrm{orb}}(q)\frac{dq}{q} + \left(\frac{1}{z}\mu C^{\mathrm{orb}}(q) + A_\infty\right)\frac{dz}{z} \tag{III.A.8}$$

La matrice de ∇ *dans la base* $((P^{\bullet_q})^i)$ *est*

$$\left(-\frac{\mu C(q)}{z} - A_\infty + H\right)\frac{dq}{\mu q} + \left(\frac{\mu C(q)}{z} + A_\infty\right)\frac{dz}{z}$$

où $H := \mathrm{diag}(0, \dots, \mu - 1)$ *et*

$$C(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q/w^w \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ .. & ... & . & \cdots & . & . \\ .. & ... & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & . & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque III.A.9. — 1. Les deux bases $(\mathbf{1}_{f_i}P^j)$ et $((P^{\bullet_q})^i)$ ne jouent pas exactement le même rôle. En effet, dans la première, nous voyons des puissances rationnelles de q alors que dans la seconde les puissances sont entières. Pour les variétés et pour les orbifolds, les coordonnées $t_1, \dots, t_r$ dans le $H^2(X)$ associée à la base $T_1, \dots, T_r$, apparaissent toujours dans une exponentielle $e^{t_i \int_d T_i}$ où $d \in \mathrm{NE}(X)$. Ceci est dû à l'axiome du diviseur des invariants de Gromov-Witten. Pour passer à la variable $q_i = e^{t_i}$, nous devons quotienter $H^2(X)$ par une action du groupe de Picard qui est

$$L \cdot T_i \mapsto T_i - 2\pi\sqrt{-1}c_1(L).$$

Dans le cas des variétés comme $c_1(L)$ est une classe entière, nous pouvons remplacer sans trop nous poser de questions $q_i := e^{t_i}$. Par contre, pour une orbifold, la classe est rationnelle et donc il faut vérifier que tout passe au quotient. Ceci est fait en général par Iritani dans [**Iri09b**]. Pour les espaces projectifs à poids, nous obtenons que les sections $(P^{\bullet_q})^i$ sont $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(w))$-équivariante c'est-à-dire qu'elles passent au quotient. Par contre les sections $\mathbf{1}_{f_i}P^j$ ne le sont pas équivariantes donc elles ne passent pas au quotient.

2. Dans la suite, nous nous intéresserons à la limite en $q = 0$ et comment la calculer ? Naïvement, nous pourrions poser $q = 0$ dans les matrices ci-dessus. Pour la première base, comme les puissances sont rationnelles, la limite n'a pas de sens et pour la seconde base, celle-ci dépend elle-même de q. Dans la suite, nous verrons que la « bonne « limite se calcule grâce au gradué par la filtration de Malgrange-Kashiwara.

III.A.2. Coté B : Réseau de Brieskorn du polynôme de Laurent miroir. — La famille de polynôme de Laurent miroir à $\mathbb{P}(w)$ est

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C}^*)^{n+1} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C} \\ \mathcal{M}_B := \mathbb{C}^* & \end{tikzcd}$$

où $F(u_0, \ldots, u_n) = \sum_{i=0}^n u_i$ et $\pi(u_0, \ldots, u_n) = u_0^{w_0} u_1^{w_1} \cdots u_n^{w_n}$. Le morphisme π est une fibration en tore $U = (\mathbb{C}^*)^n$. Nous définissons le système de Gauss-Manin G de F et G_0 son réseau de Brieskorn

$$G = \frac{\Omega^n(U)[x^\pm, \theta^\pm]}{(\theta d_u - d_u F) \wedge \Omega^{n-1}(U)[x^\pm, \theta^\pm]}$$
$$G_0 = \frac{\Omega^n(U)[x^\pm, \theta]}{(\theta d_u - d_u F) \wedge \Omega^{n-1}(U)[x^\pm, \theta]}$$

où d_u est la différentielle sur U. Le $\mathbb{C}[x^\pm, \theta^\pm]$-module G est muni d'une connexion plate ∇^B définie par

(III.A.10) $$\nabla^B_{\delta_\theta} = \delta_\theta + \frac{F}{\theta} \text{ and } \nabla^B_{\partial_x} = \partial_x - \frac{1}{\theta}\partial_x F$$

où $\mathcal{L}$ est la dérivée de Lie. Soit

$$\omega_0 = \frac{\frac{du_0}{u_0} \wedge \cdots \wedge \frac{du_n}{u_n}}{d(\prod_{i=0}^n u_i^{w_i})} \in G$$

Rappelons que les $a(k) \in \mathbb{N}^{n+1}$ sont définis dans III.A.1.c. Pour $k \in \{0, \ldots, \mu - 1\}$, posons

$$\omega_k := \frac{x}{w_0^{a(k)_0} w_1^{a(k)_1} \cdots w_n^{a(k)_n}} u_0^{a(k)_0} u_1^{a(k)_1} \cdots u_n^{a(k)_n} \omega_0$$

Le théorème suivant nous donne un solution au problème de Birkhoff pour le réseau de Brieskorn G_0.

Théorème III.A.11 **(Théorème 4.3.3 dans [DM13])**. — *Les classes $\omega_0, \cdots, \omega_{\mu-1}$ forment une base ω de G_0 comme $\mathbb{C}[x^\pm, \theta]$-module. Dans cette base, la connexion est*

$$\left(-\frac{\mu C(x)}{\theta} - A_\infty + H\right)\frac{dx}{\mu x} + \left(\frac{\mu C(x)}{\theta} + A_\infty\right)\frac{d\theta}{\theta}$$

où $H = \mathrm{diag}(0, 1, \cdots, \mu - 1)$ et $C(x)$ est définie dans la proposition III.A.7.

En comparant la proposition III.A.7 et le théorème III.A.11, nous obtenons le résultat de symétrie miroir en terme de fibré holomorphe à connexion.

Théorème III.A.12 **(Théorème 5.1.1 de [DM13])**. — *Le petit D-module quantique* SQDM($\mathbb{P}(w)$) *et le réseau de Brieskorn G_0 sont isomorphes après identification de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^*_q$ avec $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^*_x$ via le morphisme $(z, q) \mapsto (\theta, x)$ et l'isomorphisme $P^{\bullet j} \mapsto \omega_j$.*

Comme ces fibrés sont triviaux, nous pouvons les restreindre à $z = 0$ et $\theta = 0$. En ce point, la connexion donne un produit (voir [**Sab02**]). Comme attendu, nous obtenons un isomorphisme d'anneaux entre la cohomologie quantique de $\mathbb{P}(w)$ et le quotient jacobien de F *i.e.*,

$$QH^*_{\mathrm{orb}}(\mathbb{P}(w)) \simeq \mathbb{C}[x^\pm, u_0^\pm, \ldots, u_n^\pm]/\langle \partial_{u_0} F, \ldots, \partial_{u_n} F, \prod_{i=0}^n u_i^{w_i} - x\rangle =: \mathrm{Jac}(F)$$

Ces deux fibrés ont comme base $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^*$, et nous nous intéressons à la limite en $\mathbb{P}^1 \times \{0\}$ ($q = 0$ du coté A et $x = 0$ du coté B). Pour calculer cette limite correctement, il ne suffit pas de poser $q = 0$ dans les matrices qui apparaissent dans la proposition III.A.7. Remarquons que nous avons deux bases et ce n'est pas clair quelles matrices considérer. La théorie des D-modules nous donne la solution, il faut calculer la filtration de Malgrange-Kashiwara et prendre le gradué pour calculer cette limite.

***Proposition III.A.13* (Proposition 6.2.1 dans [DM13])**. — *Le gradué par rapport à la filtration de Malgrange-Kashiwara de* $\mathrm{SQDM}(\mathbb{P}(w)) |_{z=0}$ *est l'anneau de cohomologie orbifolde de* $\mathbb{P}(w)$.

Ce résultat était attendue car heuristiquement, la limite en $q = 0$ donne le cup produit.

III.B. Dualités de Serre en termes de D-modules quantiques

III.B.1. Dualités de Serre cas général. — Soit $\mathrm{QDM}_{(\mathbf{c},E)}(X)$ le D module quantique tordu par $(\mathbf{c}, E)$ défini en II.C.1. Nous définissons une autre torsion, $(\mathbf{c}^*, E^\vee)$, définie par $s_k^* = (-1)^{k+1} s_k$. Notons $\mathrm{QDM}_{(\mathbf{c}^*,E^\vee)}(X)$ cet autre D module. *La dualité de Serre quantique* relie ces deux D modules (voir le théorème III.B.3).

Dans un premier temps, nous avons besoin de certaines notations. Définissons le morphisme $f\colon H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[\![Q, \mathbf{s}]\!] \to H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[\![Q, \mathbf{s}]\!]$ par la formule :

$$f(\tau) = \sum_{a=0}^{s} \langle\!\langle T_a, \mathbf{c}^*(E^\vee) \rangle\!\rangle_\tau^{(\mathbf{c},E)} T^a. \tag{III.B.1}$$

Définition III.B.2. — La *dualité de Serre quantique* S^{QS} est un accouplement z sesquilinéaire sur $H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[z][\![Q, \mathbf{s}, \tau]\!]$ donné par : pour tout $u, v \in H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[z][\![Q, \mathbf{s}, \tau]\!]$, on a

$$S^{\mathrm{QS}}(u, v) := \int_X u(-z) \cup v(z)$$

Notre premier théorème dans [**IMM**] est le suivant.

Théorème III.B.3. — *Les D-modules quantiques tordus* $\mathrm{QDM}_{(\mathbf{c},E)}(X)$ *et* $f^*\,\mathrm{QDM}_{(\mathbf{c}^*,E^\vee)}(X)$ *sont duaux par rapport à* S^{QS}. *Plus précisément, nous avons pour tout* $u, v \in H^{2*}(X) \otimes \mathbb{C}[z][\![Q, \mathbf{s}, \tau]\!]$

$$\partial_\alpha S^{\mathrm{QS}}(u, v) = S^{\mathrm{QS}}(\nabla_\alpha^{(\mathbf{c},E)} u, v) + S^{\mathrm{QS}}(u, (f^*\nabla^{(\mathbf{c}^*,E^\vee)})_\alpha v)$$

De plus, le morphisme

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(E) : \mathrm{QDM}_{(\mathbf{c},E)}(X) &\to f^*\,\mathrm{QDM}_{(\mathbf{c}^*,E^\vee)}(X) \\ \alpha &\mapsto \mathbf{c}(E) \cup \alpha \end{aligned}$$

respecte les connexions $\nabla^{(\mathbf{c},E)}$ *et* $\nabla^{(\mathbf{c}^*,E^\vee)}$ *et les dualités* $S_{(\mathbf{c},E)}$ *et* $S_{(\mathbf{c}^*,E^\vee)}$.

Pour démontrer, ce théorème nous utilisons les cônes lagrangiens de Givental $\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)}$ et $\mathcal{L}_{(\mathbf{c}^*,E^\vee)}$ et le Corollaire 9 de [**CG07**], appelé « Quantum Serre », démontre que $\mathbf{c}(E)\mathcal{L}_{(\mathbf{c},E)} = \mathcal{L}_{(\mathbf{c}^*,E^\vee)}$.

Remarque III.B.4. — En voyant l'accouplement non dégénéré $S_{(\mathbf{c},E)}$ (voir Définition II.C.1) comme un isomorphisme entre le D module et son dual, nous avons le diagramme commutatif suivant. Notons $\mathbb{D}M$ pour le dual au sens des D modules

$$\begin{tikzcd} \mathrm{QDM}_{(\mathbf{c},E)}(X) \arrow[rr, "S^{\mathrm{QS}}"] \arrow[dr, "\sim", "S_{(\mathbf{c},E)}"'] & & \mathbb{D} f^* \mathrm{QDM}_{(\mathbf{c}^*,E^\vee)}(X) \arrow[dl, "{}^t\mathbf{c}(E)"] \\ & \mathbb{D}\,\mathrm{QDM}_{(\mathbf{c},E)}(X) & \end{tikzcd}$$

Nous en déduisons que S^{QS} est non dégénérée si et seulement si $\mathbf{c}(E)$ est un isomorphisme.

III.B.2. Dualités de Serre pour la classe d'Euler et un fibré $E^\vee$ concave. — Dans la suite, nous allons spécialiser ce théorème au cas de la torsion par la classe d'Euler équivariante $(\mathbf{e}_\lambda, E)$. Considérons l'action de $\mathbb{C}^*$ sur le fibré E par multiplication sur les fibres. La cohomologie $\mathbb{C}^*$ équivariante du point est noté $\mathbb{C}[\lambda]$. Pour un fibré G de rang k, nous avons $\mathbf{e}_\lambda(G) = \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} c_i(G)$ où $c_i(\cdot)$ est la i-ème classe de Chern non équivariante. Choisir $\mathbf{e}_\lambda$ signifie spécialiser à

$$s_0 := \log\lambda \text{ and } \forall k \geq 1,\ s_k := (-1)^{k-1}(k-1)!\lambda^{-k}.$$

Dans ce cas, nous travaillons sur Λ_λ qui est la complétion de $\mathbb{C}[\mathrm{NE}(X)][\lambda]$ par rapport à la valuation

$$v(Q^d) = \int_d \omega \text{ and } v(\lambda) = 0.$$

Pour la torsion $(\mathbf{e}_\lambda^*, E^\vee)$, nous avons $s_k^* = (-1)^{k+1} s_k$, nous considérons le même anneau de base Λ_λ. Notons Λ la limite non équivariante de Λ_λ *i.e.*, $\Lambda := \Lambda_\lambda/\lambda$.

Hypothèse 1. — Dans la suite, nous supposerons que $E^\vee$ est un fibré concave sur X *i.e.*, pour tout morphisme $g : \mathbb{P}^1 \to X$, nous avons $H^0(\mathbb{P}^1, g^*E) = 0$.

Remarquons que la concavité de $E^\vee$ implique la convexité de E. Cette hypothèse entraîne que $E_{0,n,d}$ (voir Lemme II.A.4) est un fibré vectoriel sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)$.

Supposons que E soit une somme direct de fibrés en droite amples, *i.e.*, $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$. Soit Z le zéro d'une section générique de E. Notons $\iota : Z \hookrightarrow X$. Le théorème de Lefschetz nous dit que

$$H^*(Z) = \mathrm{Im}\,\iota^* \oplus \ker \iota_*.$$

Notons $H^*_{\mathrm{amb}}(X)$ l'espace vectoriel quotient $H^*(X)/\ker \mu_{\mathrm{e}(E)}$ où $\mu_{\mathrm{e}(E)}$ est l'endomorphisme de $H^*(X)$ qui envoie $\gamma \mapsto \mathrm{e}(E) \cup \gamma$ où e est la classe d'Euler non équivariante. Notons $\mathrm{QDM}(Z)$ le quantum D module de Z. Considérons le sous fibré trivial de $\mathrm{QDM}(Z)$ dont la fibre est $\iota^* H^*(X)$. Le corollaire 3 de [**Iri11**] implique que

$$\iota^*(\gamma_1 \bullet_\tau^{(\mathrm{e},E)} \gamma_2) = (\iota^*\gamma_1) \bullet_{\iota^*\tau}^{Z} (\iota^*\gamma_2) \tag{III.B.5}$$

Ainsi, la connexion ∇^Z se restreint à $\iota^* H^*(X)$. Ce D module quantique est appelé *D module quantique ambiant de Z* et nous le notons $\mathrm{QDM}_{\mathrm{amb}}(Z)$.

Proposition III.B.6. — *Soit $E^\vee$ un fibré concave sur X.*

1. *Le D module quantique tordu par $(\mathbf{e}_\lambda, E)$ admet une limite non équivariante noté par* $\mathrm{QDM}_{(\mathrm{e},E)}(X)$.
2. *Le D module quantique tordu par $(\mathbf{e}_\lambda^*, E^\vee)$ admet une limite non équivariante qui est* $\mathrm{QDM}(E^\vee)$.

3. *Nous avons un morphisme surjectif*

$$\pi : \mathrm{QDM}_{(\mathrm{e},E)}(X) \to \mathrm{QDM}_{\mathrm{amb}}(Z) \tag{III.B.7}$$

Le premier point de cette proposition est classique. Le second vient du fait qu'une application application non constante d'une courbe nodale C vers un fibré concave $E^\vee$ est contenue dans la section nulle. Nous en déduisons, via le théorème de localisation virtuelle de Graber-Pandharipande [**GP99**] que

$$\int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,\ell}(X,d)]^{\mathrm{vir}}} \left(\prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{e}_i^* \gamma_i\right) \mathbf{e}_\lambda{}^{-1}(E^\vee_{0,\ell,d}) = \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,\ell}(E^\vee,d)]^{\mathrm{vir}}} \left(\prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{e}_i^* \gamma_i\right)$$

Le corollaire suivant se déduit du théorème III.B.3 et la proposition III.B.6.

Corollaire III.B.8. — *Soit $E^\vee$ un fibré concave sur X.*

1. *La dualité $S^{\mathrm{QS}}_{(\mathrm{e},E)}$ est plate.*
2. *Le morphisme*

$$\begin{aligned} \mathrm{e}(E)\cup : \mathrm{QDM}_{(\mathrm{e},E)}(X) &\to f^* \,\mathrm{QDM}(E^\vee) \\ \alpha &\mapsto \mathrm{e}(E) \cup \alpha \end{aligned}$$

est un morphisme de D-modules quantiques i.e., un morphisme de fibrés à connexion.

3. *Si $E = \bigoplus_{i=1}^k L_i$ où les fibrés en droite L_i sont amples alors le morphisme ci-dessus se factorise via $\mathrm{QDM}_{\mathrm{amb}}(Z)$ c'est-à-dire que nous avons :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{QDM}_{(\mathrm{e},E)}(X) \arrow[r, "\mathrm{e}(E)\cup"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & f^* \,\mathrm{QDM}(E^\vee) \\ \mathrm{QDM}_{\mathrm{amb}}(Z) \arrow[ur, hook, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

où φ est injective.

En symétrie miroir, les chercheurs s'intéressent beaucoup aux invariants de Gromov-Witten des hypersurfaces (ou des intersections complètes). Ainsi, l'injection $\varphi : \mathrm{QDM}_{\mathrm{amb}}(Z) \to f^* \,\mathrm{QDM}(E^\vee)$ nous dit que les informations de l'hypersurface Z font partie de $\mathrm{QDM}(E^\vee)$. Ceci sera expliqué plus en détail dans le paragraphe III.C.

III.B.3. Dualités de Serre pour $E = -K_X$. — Dans ce paragraphe, nous nous restreignons au petit D module quantique avec $E = -K_X$ ample. Nous considérons donc $\mathrm{SQDM}_{(\mathrm{e},-K_X)}(X)$ et $\mathrm{SQDM}(K_X)$. Dans cette partie, nous noterons les torsions par $\mathrm{e} = (\mathrm{e}, -K_X)$ et $(\mathrm{e}^{-1}) = (\mathrm{e}^{-1}, K_X)$ Nous définissons d'abord la *seconde connexion* dûe à Dubrovin dans [**Dub96**, lecture 3] (ou §9.2 [**Her02**]). Considérons le fibré trivial, noté par $\check{F}$, de fibre $H^{2*}(X)$ sur $\check{U} \subset H^{2*}(X) \times \mathbb{C}_x$ où

$$\check{U} := \{(\tau, x) \in H^{2*}(X)_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}_x \mid \bullet_\tau \text{ est convergent et } \mathfrak{E} \bullet_\tau - x \text{ est inversible } \}.$$

Soit $\sigma \in \mathbb{C}$. Nous munissons ce fibré d'une connexion définie par :

$$\check{\nabla}^{(\sigma)}_a = \partial_a + \left(\mu - \frac{1}{2} - \sigma\right)(\mathfrak{E} \bullet_\tau - x)^{-1} T_a \bullet_\tau$$

$$\check{\nabla}^{(\sigma)}_{\partial_x} = \partial_x - \left(\mu - \frac{1}{2} - \sigma\right)(\mathfrak{E} \bullet_\tau - x)^{-1}.$$

où

$$\mathfrak{E} = \sum_{a=0}^{s} \left(a - \frac{\deg(T_a)}{2} \right) t_a T_a + c_1(TX)$$

Définissions un accouplement $\mathcal{O}_{\check{U}\times\mathbb{C}_x}$ bilinéaire

$$\begin{aligned} \check{g}^{(\sigma)} : (\check{F}, \check{\nabla}^{(\sigma)}) \times (\check{F}, \check{\nabla}^{(-\sigma)}) &\longrightarrow \mathcal{O}_{\check{U}\times\mathbb{C}_x} \\ (T_\alpha, T_\beta) &\longmapsto \int_X T_\alpha \cup T_\beta \cup (\mathfrak{E} \bullet_\tau -x)^{-1} \end{aligned}$$

Cet accouplement est symétrique, non dégénéré et plat (voir Théorème 9.4.c dans [**Her02**]) où il est appelé *seconde métrique*. Posons

$$N_d(z) := \begin{cases} \sum_{\beta=0}^{s} \left\langle \frac{T_\beta}{z-\psi} \right\rangle_{0,1,d} T^\beta & \text{si } d \neq 0 \\ \mathbf{1} & \text{si } d = 0 \end{cases}$$

Nous définissons deux fonctions à valeurs cohomologiques.

Définition III.B.9. — Posons $\rho = c_1(TX)$.

$$\begin{aligned} I^{\mathrm{e}}(\tau_2, z) &:= \sum_{d\in \mathrm{NE}(X)} N_d(z) e^{\frac{\tau_2}{z}+\tau_2(d)} \frac{\prod_{k=-\infty}^{\rho(d)} (\rho + kz)}{\prod_{k=-\infty}^{0} (\rho + kz)} \\ I^{(\mathrm{e}^{-1})}(\tau_2, z) &:= \sum_{d\in \mathrm{NE}(X)} N_d(z) e^{\frac{\tau_2}{z}+\tau_2(d)} (-1)^{\rho(d)} \frac{\prod_{k=-\infty}^{\rho(d)-1} (\rho + kz)}{\prod_{k=-\infty}^{-1} (\rho + kz)} \end{aligned}$$

Pour la torsion $(\mathrm{e}, -K_X)$ (*resp.* (e^{-1}, K_X)), développons la fonction $I^{\mathrm{e}}(\tau_2, z)$ (*resp.* . $I^{(\mathrm{e}^{-1})}(\tau_2, z)$) par rapport à z^{-1}, nous obtenons

$$\begin{aligned} I^{\mathrm{e}}(\tau_2, z) &= v_0^{\mathrm{e}}(\tau_2)\mathbf{1} + G_{\mathrm{e}}(\tau_2) z^{-1} + O(z^{-2}) \\ I^{(\mathrm{e}^{-1})}(\tau_2, z) &= \mathbf{1} + G_{(\mathrm{e}^{-1})}(\tau_2) z^{-1} + O(z^{-2}) \end{aligned}$$

où $G_{\mathrm{e}}, G_{(\mathrm{e}^{-1})} : H^2(X) \to H^2(X)$ et v_0^{e} est une fonctions inversible dans un voisinage du « large radius limit ». Notons par $\mathrm{Mir}_{\mathrm{e}} := G_{\mathrm{e}}/v_0^{\mathrm{e}}$ (*resp.* . $\mathrm{Mir}_{(\mathrm{e}^{-1})} := G_{(\mathrm{e}^{-1})}$). Les théorèmes 2 et 2' de Coates-Givental [**CG07**] impliquent que ces applications miroirs satisfont les propriétés suivantes

$$z\frac{I^{\mathrm{e}}(\tau_2, z)}{v_0^{\mathrm{e}}(\tau_2)} = J_{\mathrm{e}}(\mathrm{Mir}_{\mathrm{e}}(\tau_2), z) \tag{III.B.10}$$

$$zI^{(\mathrm{e}^{-1})}(\tau_2, z) = J_{(\mathrm{e}^{-1})}(\mathrm{Mir}_{(\mathrm{e}^{-1})}(\tau_2), z) \tag{III.B.11}$$

Théorème III.B.12. — *Nous avons les isomorphismes de fibrés à connexions.*

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{e}} : \left(\check{F}, \check{\nabla}^{(\frac{n+1}{2})}\right)|_{x=1} &\longrightarrow \mathrm{Mir}_{\mathrm{e}}^{*}\, \mathrm{SQDM}_{(\mathrm{e},-K_X)}(X)\,|_{z=1} \\ \psi_{(\mathrm{e}^{-1})} : \left(\check{F}, \check{\nabla}^{(-\frac{n+1}{2})}\right)|_{x=1} &\longrightarrow \mathrm{Mir}_{(\mathrm{e}^{-1})}^{*}\, \mathrm{SQDM}(K_X)\,|_{z=1} \end{aligned}$$

Remarque III.B.13. — Considérons la connexion, pour tout $a \in \{0, \ldots, s\}$

$$\begin{aligned} \nabla_a^{(\sigma)} &= \partial_a + \frac{1}{z} T_a \\ \nabla_{\delta_z}^{(\sigma)} &= \delta_z - \frac{1}{z}\mathfrak{E} + \mu - \frac{1}{2} - \sigma \end{aligned}$$

où $\mu(T_a) = T_a(\deg T_a - n)/2$. Posons $\mathrm{SQDM}_{(\sigma)}(X)$ ce D module quantique. Pour $\sigma = -1/2$, nous obtenons exactement $\mathrm{SQDM}(X)$ défini dans la Définition II.C.1. Comme la transformée de Laplace de $\mathrm{SQDM}_{(\sigma)}(X)$ est $(\check{F}, \check{\nabla}^{(\sigma+1)})$ (*cf.* [**Sab02**, §.V.2.c]), ce théorème nous dit que $\mathrm{SQDM}(K_X)$ et $\mathrm{SQDM}_{(\mathrm{e},-K_X)}(X)$ peuvent être relier directement à $\mathrm{SQDM}(X)$ via une transformée de Laplace. Avant ce résultat, il fallait utiliser le théorème de Quantum Lefschetz de Coates-Givental [**CG07**] pour avoir ce lien.

Les isomorphismes ψ_{e} et $\psi_{\mathrm{e}^{-1}}$ sont explicites et nous renvoyons à [**IMM**] pour une définition plus précise. Ils se démontrent en voyant que les membres de gauche sont des transformés de Laplace de $\mathrm{SQDM}(X)$ et que les fonctions I sont aussi des transformées de Laplace de solution fondamentales de $\mathrm{SQDM}(X)$.

Via ces isomorphismes, nous pouvons alors comparer ces deux métriques induites $\breve{g}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ et S^{QS}. Notons $\psi_{\mathrm{e}}^{-1\to 1}$ le prolongement plat de ψ_{e} entre $z = 1$ et $z = -1$.

Théorème III.B.14. — *Pour tout $a, b \in \{0, \ldots, s\}$, nous avons*

$$\breve{g}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}(T_a, T_b) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} S^{\mathrm{QS}}(\psi_{\mathrm{e}}^{-1\to 1}(T_a), \psi_{(\mathrm{e}^{-1})}(T_b)).$$

Cette démonstration se fait en utilisant que les deux métriques sont plates et nous les comparons au « large radius limit ».

III.C. D-modules quantiques ambiants d'une intersection complète torique et nef

Replaçons nous dans la situation du début du paragraphe III.B.2. Soit X une variété lisse torique avec k fibrés en droite amples $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$ tels que $(K_X \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_r)^\vee$ soit nef. Soit Z le zéro d'une section générique de $E := \oplus_{i=1}^r \mathcal{L}_i$. Notons $\iota : Z \hookrightarrow X$. Notons $\mathrm{SQDM}_{\mathrm{amb}}(Z)$ le sous D module quantique de $\mathrm{SQDM}(Z)$ de fibre $\iota^* H^{2*}(X)$. Nous avons un morphisme surjectif de

$$\pi : \mathrm{SQDM}_{\mathrm{e}}(X) \to \mathrm{SQDM}_{\mathrm{amb}}(Z)$$

Dans les articles, [**GGZ87**], [**GKZ88**], [**GKZ89**] et [**GKZ90**]), Gelfand-Kapranov-Zelinski ont défini des D modules à la fin des années 80. Cependant, notre approche suit plutôt les articles de Givental ou inspirés par lui [**Giv95**], [**Giv98a**], [**CK99**, §5.5.3 et §11.2] ou [**Iri09b**].

Notons $\Sigma(1)$ les cônes de dimension 1 de Σ. Pour $\theta \in \Sigma(1)$, notons D_θ pour le diviseur torique associé.

Notation III.C.1. — Soit d une classe dans $H_2(X, \mathbb{Z})$. Posons

$$\begin{array}{ll} \forall \theta \in \Sigma(1), & d_\theta := \int_d D_\theta \\ \forall i \in \{1, \ldots, k\} & d_{L_i} := \int_d c_1(\mathcal{L}_i) \end{array}$$

Pour chaque nombre réel a, posons $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = \max(-a, 0)$ et nous avons $a = a^+ - a^-$. Considérons l'anneau non commutatif :

$$\mathbb{D} := \mathbb{C}[q^\pm, z]\langle z\delta_q, z\delta_z\rangle := \mathbb{C}[q_1^{\pm 1}, \ldots, q_r^{\pm 1}, z]\langle z\delta_{q_1}, \ldots, z\delta_{q_p}, z\delta_z\rangle.$$

Remarque III.C.2. — Dans la définition de $\mathbb{D}$, il faut prendre $z\delta_q$ comme un symbole qui vérifie $[z\delta_q, q] = z$ et $[z\delta_z, z] = z$. Ainsi, si l'on se restreint à $z = 0$, on obtient un anneau commutatif ! Ainsi, la restriction d'un quotient $\mathbb{D}/I$ (où I est un idéal à gauche) à $z = 0$ est un anneau commutatif.

Rappelons que $T_1, \ldots, T_r$ est une base fixée de $H^2(X)$. Pour chaque classe $\tau_2 = \sum_{a=1}^r t_a T_a \in H^2(X)$, nous associons un opérateur différentiel

$$\widehat{\tau} := \sum_{a=1}^{r} t_a z \delta_{q_a} \in \mathbb{D}$$

En particulier, nous noterons $\widehat{\mathcal{L}_i} := \widehat{c_1(\mathcal{L}_i)}$ et

$$\widehat{\mathrm{c}}_{\mathrm{top}} := \prod_{i=1}^{k} \widehat{\mathcal{L}_i} \in \mathbb{D}.$$

Définition III.C.3. — 1. L'idéal GKZ associé à $(\Sigma, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_r)$ est l'idéal, noté $\mathbb{G}$ à gauche engendré par les opérateurs $\square_d, d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ et $\mathfrak{E}$:

$$\square_d := \prod_{i=1}^{k} \prod_{\nu=1}^{d_{L_i}^-} \left(\widehat{\mathcal{L}_i} + \nu z\right) \prod_{\theta \in \Sigma(1)} \prod_{\nu=0}^{d_\theta^+ - 1} \left(\widehat{D}_\theta - z\nu\right) - q^d \prod_{i=1}^{k} \prod_{\nu=1}^{d_{L_i}^+} \left(\widehat{\mathcal{L}_i} + \nu z\right) \prod_{\theta \in \Sigma(1)} \prod_{\nu=0}^{d_\theta^- - 1} \left(\widehat{D}_\theta - z\nu\right)$$

$$\mathfrak{E} := z\delta_z + \widehat{c_1(TX)} - \widehat{\mathrm{c}}_{\mathrm{top}}$$

Le GKZ système associé à cet idéal est le quotient à gauche de $\mathbb{D}$ par $\mathbb{G}$ *i.e.*,

$$\mathbb{M} := \mathbb{D}/\mathbb{G}.$$

Nous noterons $\mathcal{M}$ son faisceau associé.

2. *L'idéal quotient* $(\mathbb{G} : \widehat{\mathrm{c}}_{\mathrm{top}})$ est l'idéal à gauche engendré par

$$\{P \in \mathbb{D} \mid \widehat{\mathrm{c}}_{\mathrm{top}} P \in \mathbb{G}\}.$$

Le module résiduel $\mathbb{M}^{\mathrm{res}}$ est défini par

$$\mathbb{M}^{\mathrm{res}} := \mathbb{D}/(\mathbb{G} : \widehat{\mathrm{c}}_{\mathrm{top}})$$

Nous noterons $\mathcal{M}^{\mathrm{res}}$ son faisceau associé.

A l'aide du théorème de Givental pour les intersections complètes nef dans des variétés toriques lisses c'est-à-dire l'égalité (III.B.10).

Théorème III.C.4. — *Supposons que $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$ sont globalement engendrés tels que $(K_X \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_k)^\vee$ soit nef. Le morphisme*

$$\varphi : \mathcal{M} \to \mathrm{Mir}_e^* \,\mathrm{SQDM_e}(X)$$
$$P(q, z, \delta_q, \delta_z) \mapsto P(q, z, \nabla_{\delta_q}, \nabla_{\delta_z})\mathbf{1}$$

est un isomorphisme de D modules.

La preuve de cette proposition se fait en plusieurs étapes :

1. Nous montrons que $\mathcal{M}$ est un $\mathbb{C}[q^\pm, z]$-module libre de rang $\dim H^*(X)$. Pour cela, nous montrons de façon assez standard, en utilisant des arguments de D modules que $\mathcal{M}$ est localement libre. Il reste à calculer son rang. Pour cela, nous nous restreignons à $z = 0$ et nous obtenons un anneau (*cf.* remarque III.C.2) qui est à un anneau de Batyrev « tordu » [**Bat93**]. Nous montrons que le spectre de cet anneau est localement libre de rang $\dim H^*(X)$.

2. Puis l'égalité (III.B.10) nous définit le morphisme φ. En effet, la fonction I^{e} (voir III.B.9) est solution des opérateurs $\Box_d$ et $\mathfrak{E}$.
3. Enfin, nous montrons que le morphisme est surjectif.

Nous en déduisons le théorème suivant.

Théorème III.C.5. — *Soit X une variété lisse torique avec k fibrés en droite amples $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k$ tels que $(K_X \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_k)^\vee$ soit nef. Soit Z le zéro d'une section générique de $E := \oplus_{i=1}^k \mathcal{L}_i$. Supposons que* $\dim_{\mathbb{C}} Z \geq 3$. *Nous avons un isomorphisme de D-module entre* $\mathrm{Mir}_{\mathrm{e}}^* \, \mathrm{SQDM}_{\mathrm{amb}}(Z)$ *est* $\mathcal{M}^{\mathrm{res}}$.

Pour résumer nous avons la situation suivante

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Mir}_{\mathrm{e}}^* \, \mathrm{SQDM}_e(X) \arrow[d, two heads, "\pi"] \\
\mathcal{M}^{\mathrm{res}} \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \mathrm{Mir}_{\mathrm{e}}^* \, \mathrm{SQDM}_{\mathrm{amb}}(Z)
\end{tikzcd}$$

où π est défini en (III.B.7).

Remarque III.C.6. — Ce résultat répond à une question de [**CK99**, p.101 §.2]. En effet, on savait que l'idéal $\mathbb{G}$ faisait partie des solutions mais qu'il était trop petit. Ainsi, notre idéal résiduel $(\mathbb{G} : \widehat{\mathrm{c}}_{\mathrm{top}})$ répond à cette question.

La preuve de ce théorème suit le même chemin que celle de la proposition ci-dessus. Mais toutes les étapes sont plus délicates.

1. Nous montrons que $\mathcal{M}^{\mathrm{res}}$ est un $\mathbb{C}[q^\pm, z]$ module libre de rang plus petit que $\dim H_{\mathrm{amb}}^*(Z)$. Ceci se fait après une étude plus poussée des anneaux de Batyrev.
2. De même, le fait que le morphisme $\pi \circ \varphi$ passe au quotient n'est pas clair à priori.
3. Enfin, la surjectivité de $\overline{\varphi}$ vient de celle de φ.

Remarque III.C.7. — Avec le résultat de [**IMM**] c'est-à-dire le corollaire III.B.8, nous obtenons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Mir}_{\mathrm{e}}^* \, \mathrm{SQDM}_e(X) \arrow[r, "\mathrm{e}(E)\cup"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & \mathrm{Mir}_{(e^{-1})}^* \, \mathrm{SQDM}(E^\vee) \\
\mathcal{M}^{\mathrm{res}} \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \mathrm{Mir}_{\mathrm{e}}^* \, \mathrm{SQDM}_{\mathrm{amb}}(Z) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

CHAPITRE IV

CONJECTURE DE RUAN

Depuis l'article [**Rua06b**] de Ruan, la conjecture de la résolution crépante a donné lieu à une série de travaux soit pour la démontrer sur des familles d'exemples soit pour lui donner un énoncé clair.

Soit $\mathcal{X}$ une orbifold Gorenstein c'est-à-dire qu'un chaque point de $\mathcal{X}$ le stabilisateur agit sur l'espace tangent avec un déterminant 1. Notons X son espace grossier. Supposons qu'on ait une *résolution crépante* $p : Z \to X$ *i.e.*, $p^*K_X = K_Z$. La conjecture prédit une relation entre les invariants de Gromov-Witten orbifolds de genre 0 de $\mathcal{X}$ et ceux de Z. Remarquons que le fait que la dimension de $H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})$ et $H^*(Z)$ soit égale n'est pas trivial. Ceci a été démontré en général par Yasuda dans [**Yas04**] en utilisant des techniques motiviques. Cependant, nous n'avons pas d'isomorphisme naturel entre ces deux espaces de cohomologie.

Dans le paragraphe IV.B, nous donnerons plus de précisions sur l'historique des énoncés de cette conjecture et dans §. IV.C, nous présenterons notre contribution.

IV.A. Cohomologie orbifold des espace projectifs à poids

Soit $n \geq 1$ un entier et $w := (w_0, \ldots, w_n)$ un $(n+1)$-uplet d'entiers strictement positifs. Considérons l'action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par

$$\lambda(x_0, \ldots, x_n) := (\lambda^{w_0} x_0, \ldots, \lambda^{w_n} x_n).$$

L'espace projectif à poids est le champ quotient $\mathbb{P}(w) := [\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{C}^*]$. Il est Gorenstein si et seulement si chaque poids w_i divise $|w| := w_0 + \cdots + w_n$.

Des exemples de poids Gorenstein sont donnés par

(IV.A.1)

Dimension 2	Dimension 3			
$(1,1,1)$	$(1,1,1,1)$	$(1,2,2,5)$	$(2,3,3,4)$	$(2,3,10,15)$
$(1,1,2)$	$(1,1,1,3)$	$(1,1,4,6)$	$(1,2,6,9)$	$(1,6,14,21)$
$(1,2,3)$	$(1,1,2,2)$	$(1,2,3,6)$	$(1,4,5,10)$	
	$(1,3,4,4)$	$(1,1,2,4)$	$(1,3,8,12)$	

Dans ma thèse [**Man08**], je donne une description de l'anneau de cohomologie orbifold de $\mathbb{P}(w)$ qui est très combinatoire. Le résultat suivant en donne une description plus élégante. Considérons l'algèbre sur le groupe des racines $|w|$-ème de l'unité que nous notons $\mathbb{C}[\mu_{|w|}]$. Dans [**BMP09b**], nous définissons une filtration F sur $\mathbb{C}[\mu_{|w|}]$ compatible au produit et un accouplement non dégénéré $(\cdot,\cdot)_{|w|}$ qui satisfait la propriété de Frobenius. Ces données passent au gradué par F.

***Théorème IV.A.2* (Boissière-Mann-Perroni [BMP09b]).** — *L'algèbre de Frobenius* $(H^*_{\mathrm{orb}}(\mathbb{P}(w)), \cup_{\mathrm{orb}}, (\cdot,\cdot)_{\mathbb{P}(w)})$ *est isomorphe à* $(\mathrm{gr}_F\, \mathbb{C}[\mu_{|w|}], \cdot, (\cdot,\cdot)_{|w|})$

***Exemple IV.A.3*.** — Regardons le cas $\mathcal{X} = \mathbb{P}(1,1,2,2)$. Le champ d'inertie est

$$\mathcal{IX} = \mathbb{P}(1,1,2,2) \coprod \mathbb{P}(2,2)$$

Le calcul d'âge nous donne

$$\mathrm{age}(1) = 0, \qquad \mathrm{age}(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Finalement, nous obtenons

$$H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}) = \begin{array}{ll} H^0(\mathbb{P}(1,1,2,2)) & \oplus H^2(\mathbb{P}(1,1,2,2)) \oplus H^4(\mathbb{P}(1,1,2,2)) \oplus H^6(\mathbb{P}(1,1,2,2)) \\ & \oplus H^{0+\underline{2}}(\mathbb{P}(2,2)) \oplus H^{2+\underline{2}}(\mathbb{P}(2,2)) \end{array}$$

Dans l'égalité ci-dessus, nous avons mis en évidence deux fois l'âge par un souligné $\underline{2}$. Comme nous avons $H^{2k}(\mathbb{P}(w)) = \mathbb{C}.c_1(\mathcal{O}(1))^k$ si $k \in \{0,\dots,n\}$ et 0 sinon, nous obtenons la base $\mathbf{1}, P, P^2, P^3, P^4, \mathbf{1}_{1/2}, \mathbf{1}_{1/2}P$ où $P = c_1(\mathcal{O}(1))$ et $\mathbf{1}_{1/2}, \mathbf{1}_{1/2}.P$ est une base de $H^{*+\underline{2}}(\mathbb{P}(2,2))$. La dualité de Poincaré est donnée par les formules suivantes

$$(\mathbf{1}, P^3) = (P, P^2) = \int_{\mathbf{P}(1,1,2,2)} \frac{1}{4}, \qquad (\mathbf{1}_{1/2}, \mathbf{1}_{1/2}.P) = \int_{\mathbf{P}(2,2)} P \,|_{\mathbf{P}(2,2)} = \frac{1}{4}$$

IV.B. Énonce de la conjecture de Ruan

Soit $\mathcal{X}$ une orbifold Gorenstein d'espace grossier X. Soit $\rho : Z \to X$ une résolution crépante. Notons $M_\rho(Z) \subset H_2(Z,\mathbb{Z})$ le cône de Mori des classes de courbes contractées par ρ. Supposons également que ce cône soit engendré par un nombre fini de classes de courbes $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$ linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Ainsi nous écrirons $Q^\Gamma = Q_1^{d_1}\cdots Q_m^{d_m}$ où $\Gamma = \sum_{i=1}^m d_i\Gamma_i$. Nous définissons un *petit produit quantique corrigé par* ρ sur $H^*(Z)$ de la façon suivante. Pour tout $\gamma_1,\gamma_2 \in H^*(Z)$, nous posons

$$\gamma_1 \bullet_Q^\rho \gamma_2 := \sum_{a=0}^{s} \sum_{\Gamma \in M_\rho(Z)} Q^\Gamma \langle \gamma_1, \gamma_2, T_a\rangle_{0,3,\Gamma} T^a.$$

Voici une liste non exhaustive du type d'énoncés de la conjecture :

1. Le premier énoncé que l'anneau de cohomologie $(H^{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}), \cup_{\mathrm{orb}})$ est isomorphe à l'anneau de cohomologie $(H^*_\rho(Z), \bullet_Q^\rho)$ où l'on évalue tous les paramètres Q_i à certaines racines de l'unité. L'heuristique de cette conjecture vient du fait qu'une courbe $C \to \mathcal{X}$ constante est la même donnée qu'une courbe $C \to Z$ contracté par $\rho : Z \to X$. Or les courbes constantes définissent le cup produit orbifold (*cf.* Remarque III.A.2). Ainsi, il est légitime de comparer le cup produit orbifold avec le produit quantique restreint aux courbes contractées par ρ *i.e.*, le petit produit quantique corrigé par ρ. Cet énoncé originel est dû à Ruan dans [**Rua06b**].
2. Dans Bryan-Graber [**BG09**], les auteurs donnent une version de la conjecture où les potentiels en genre 0 (voir (II.B.2)) sont égaux à un changement de variable près sous la condition que l'orbifold soit « Hard Lefschetz » *i.e.*, l'application Inv : $\mathcal{IX} \to \mathcal{IX}$ qui envoie $g \to g^{-1}$ préserve l'âge. Ils démontrent leur conjecture dans le cas de $\mathcal{X} = \mathrm{Sym}^n\, \mathbf{C}^2$ et $Z = \mathrm{Hilb}^n\, \mathbf{C}^2$.

3. Dans [**CIT09**], Coates-Iritani-Tseng énonce une conjecture (conjecture 5.1 dans *loc. cit*) en termes des cônes lagrangiens de $\mathcal{X}$ et de Z. Plus précisément, il existe une transformation symplectique $\mathbb{U} : \mathcal{H}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{H}_Z$ telle qu'après continuation analytique on ait $\mathbb{U}(\mathcal{L}_{\mathcal{X}}) = \mathcal{L}_Z$. Ils la démontrent dans les deux cas suivants $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ et $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$. Leur conjecture est plus générale que celle de Bryan-Graber et leur article a mis en évidence la condition Hard Lefschetz qui était absente de la première version de [**BG09**]. Dans un second papier Coates [**Coa08**] démontrent cette conjecture sur six exemples.
4. Dans [**Iri10**], Iritani utilise la structure entière définie sur les D-modules quantiques dans [**Iri09b**] pour énoncé une conjecture plus précise qui prédit que $\mathrm{QDM}(\mathcal{X})$ et $\mathrm{QDM}(Z)$ sont isomorphes après un changement de variables qu'il donne (voir Conjecture 3.31 *loc. cit*).

IV.C. Résultats de la conjecture de Ruan

Avec Samuel Boissière et Fabio Perroni nous nous sommes intéressés à la version originale (*cf.* IV.B.1) de la conjecture sur certains exemples d'espaces projectifs à poids : $\mathbb{P}(1, 1, 2), \mathbb{P}(1, 2, 3), \mathbb{P}(1, 1, 2, 2), \mathbb{P}(1, 3, 4, 4)$ et $\mathbb{P}(1, \ldots, 1, n)$. Les trois premiers découlent de façon directes de la thèse de Perroni [**Per07**].

Théorème IV.C.1 **(Boissière, Mann et Perroni [BMP11], [BMP09a])**
La variété $|\mathbb{P}(1, 3, 4, 4)|$ *admet une unique résolution crépante Z. Pour* $(Q_1, \ldots, Q_4) \in \{(\sqrt{-1}, \sqrt{-1}, \sqrt{-1}, 1), (-\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, 1)\}$*, on a un isomorphisme d'anneaux gradués avec accouplements de Poincaré*

$$H^*_{\mathrm{orb}}(\mathbb{P}(1, 3, 4, 4)) \simeq H^*_{\rho}(Z)(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$$

La démonstration utilise les trois étapes suivantes :

1. Nous calculons explicitement la cohomologie orbifold.
2. La géométrie torique nous permet de trouver une résolution crépante torique et calculer sa cohomologie.
3. Comme le problème est local, nous avons un argument pour la singularité A_3-transversale en $[0 : 0 : x_2 : x_3]$ et un autre pour la singularité isolée $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$ en $[0 : 1 : 0 : 0]$. Pour la singularité A_3-transversale, comme les invariants de Gromov-Witten sont invariants par déformation, nous trouvons une déformations simultanée et explicite (inspiré par [**Bri66**]) de cette singularité et sa résolution pour nous ramener à un cas connu (*cf.* [**BMP11**] pour les détails). Pour la singularité isolée, nous observons que nous pouvons prendre $Q_4 = 0$ dans [**BMP11**], ce qui est assez troublant au vu de la conjecture. Dans [**BMP09a**], nous montrons qu'on peut aussi prendre $Q_4 = 1$ en utilisant les résultats de [**CIT09**] pour $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$.

BIBLIOGRAPHIE

[ACV03] Dan Abramovich, Alessio Corti, and Angelo Vistoli, *Twisted bundles and admissible covers*, Comm. Algebra **31** (2003), no. 8, 3547–3618, Special issue in honor of Steven L. Kleiman. MR 2007376 (2005b :14049)

[AGV08] Dan Abramovich, Tom Graber, and Angelo Vistoli, *Gromov-Witten theory of Deligne-Mumford stacks*, Amer. J. Math. **130** (2008), no. 5, 1337–1398. MR 2450211 (2009k :14108)

[AOV08] Dan Abramovich, Martin Olsson, and Angelo Vistoli, *Tame stacks in positive characteristic*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58** (2008), no. 4, 1057–1091. MR 2427954 (2009c :14002)

[Bar00] Serguei Barannikov, *Semi-infinite Hodge structures and mirror symmetry for projective spaces*, Math.AG/0010157 (2000), 17.

[Bat93] Victor V. Batyrev, *Quantum cohomology rings of toric manifolds*, Astérisque (1993), no. 218, 9–34, Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay (Orsay, 1992). MR 1265307 (95b :32034)

[BC10] Arend Bayer and Charles Cadman, *Quantum cohomology of* $[\mathbb{C}^N/\mu_r]$, Compos. Math. **146** (2010), no. 5, 1291–1322. MR 2684301 (2012d :14095)

[BCOV94] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri, and C. Vafa, *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), no. 2, 311–427. MR 1301851 (95f :32029)

[BCS05] Lev A. Borisov, Linda Chen, and Gregory G. Smith, *The orbifold Chow ring of toric Deligne-Mumford stacks*, J. Amer. Math. Soc. **(18)** (2005), no. 1, 193–215 (electronic).

[BF97] K. Behrend and B. Fantechi, *The intrinsic normal cone*, Invent. Math. **128** (1997), no. 1, 45–88. MR 1437495 (98e :14022)

[BG09] Jim Bryan and Tom Graber, *The crepant resolution conjecture*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 23–42. MR 2483931 (2009m :14083)

[BM96] K. Behrend and Yu. Manin, *Stacks of stable maps and Gromov-Witten invariants*, Duke Math. J. **85** (1996), no. 1, 1–60. MR 1412436 (98i :14014)

[BMP09a] Samuel Boissière, Étienne Mann, and Fabio Perroni, *The cohomological crepant resolution conjecture for* $\mathbb{P}(1,3,4,4)$, Internat. J. Math. **20** (2009), no. 6, 791–801.

[BMP09b] Samuel Boissière, Étienne Mann, and Fabio Perroni, *A model for the orbifold Chow ring of weighted projective spaces*, Comm. Algebra **37** (2009), no. 2, 503–514.

[BMP11] Samuel Boissière, Étienne Mann, and Fabio Perroni, *Computing certain Gromov-Witten invariants of the crepant resolution of P(1,3,4,4*, Nagoya Math. J. **201** (2011), 1–22.

[Bri66] Egbert Brieskorn, *Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen*, Math. Ann. **166** (1966), 76–102. MR 0206973 (34 #6789)

[Cad03] Charles Cadman, *Using stacks to impose tangency conditions on curves*, math.AG/0312349 (2003).

[CCIT09] Tom Coates, Alessio Corti, Hiroshi Iritani, and Hsian-Hua Tseng, *Computing genus-zero twisted Gromov-Witten invariants*, Duke Math. J. **147** (2009), no. 3, 377–438. MR 2510741 (2010a :14090)

[CCIT14] T. Coates, A. Corti, H. Iritani, and H.-H. Tseng, *Some Applications of the Mirror Theorem for Toric Stacks*, ArXiv e-prints (2014).

[CCLT06] Tom Coates, Alessio Corti, Y.-P. Lee, and Hsian-Hua Tseng, *Small quantum orbifold cohomology of weighted projective spaces*, math.AG/0608481 (2006), 50.

[CG07] Tom Coates and Alexander Givental, *Quantum Riemann-Roch, Lefschetz and Serre*, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 1, 15–53. MR 2276766 (2007k :14113)

[CIT09] Tom Coates, Hiroshi Iritani, and Hsian-Hua Tseng, *Wall-crossings in toric Gromov-Witten theory. I. Crepant examples*, Geom. Topol. **13** (2009), no. 5, 2675–2744. MR 2529944 (2010i :53173)

[CK99] David A. Cox and Sheldon Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Coa08] T. Coates, *Wall-Crossings in Toric Gromov-Witten Theory II : Local Examples*, ArXiv e-prints (2008).

[Cox95] David A. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 1, 17–50. MR 1299003 (95i :14046)

[CR02] Weimin Chen and Yongbin Ruan, *Orbifold Gromov-Witten theory*, Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), Contemp. Math., vol. (310), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 25–85. MR 1 950 941

[CR04] ______, *A new cohomology theory of orbifold*, Comm. Math. Phys. **(248)** (2004), no. 1, 1–31. MR MR2104605

[CV93a] Sergio Cecotti and Cumrun Vafa, *Ising model and $N = 2$ supersymmetric theories*, Comm. Math. Phys. **157** (1993), no. 1, 139–178. MR 1244863 (95e :81197)

[CV93b] ______, *On classification of $N = 2$ supersymmetric theories*, Comm. Math. Phys. **158** (1993), no. 3, 569–644. MR 1255428 (95g :81198)

[dG06] Ignacio de Gregorio, *Deformations of functions and F-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **38** (2006), no. 6, 966–978. MR 2285250 (2007k :32039)

[dGM08] Ignacio de Gregorio and Étienne Mann, *Mirror fibrations and root stacks of weighted projective spaces*, Manuscripta Math. **127** (2008), no. 1, 69–80.

[DM13] Antoine Douai and Étienne Mann, *The small quantum cohomology of a weighted projective space, a mirror D-module and their classical limits*, Geom. Dedicata **164** (2013), 187–226.

[Dub96] Boris Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories*, Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), Lecture Notes in Math., vol. (1620), Springer, Berlin, 1996, pp. 120–348. MR 97d :58038

[FG03] Barbara Fantechi and Lothar Göttsche, *Orbifold cohomology for global quotients*, Duke Math. J. **(117)** (2003), no. 2, 197–227. MR MR1971293 (2004h :14062)

[FMN10] Barbara Fantechi, Étienne Mann, and Fabio Nironi, *Smooth toric Deligne-Mumford stacks*, J. Reine Angew. Math. **648** (2010), 201–244.

[FP97] William Fulton and Rahul Pandharipande, *Notes on stable maps and quantum cohomology*, 45–96. MR MR1492534 (98m :14025)

[GGZ87] I. M. Gelfand, M. I. Graev, and A. V. Zelevinskiĭ, *Holonomic systems of equations and series of hypergeometric type*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **295** (1987), no. 1, 14–19.

[Gir71] Jean Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179. MR 0344253 (49 #8992)

[Giv95] A. B. Givental, *Homological geometry. I. Projective hypersurfaces*, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), no. 2, 325–345.

[Giv96] Alexander B. Givental, *Equivariant Gromov-Witten invariants*, Internat. Math. Res. Notices (1996), no. 13, 613–663, alg-geom/9603021.

[Giv98a] Alexander Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), Progr. Math., vol. 160, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998, pp. 141–175.

[Giv98b] ______, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), Progr. Math., vol. 160, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998, pp. 141–175. MR 1653024 (2000a :14063)

[Giv04] Alexander B. Givental, *Symplectic geometry of Frobenius structures*, Frobenius manifolds, Aspects Math., E36, Friedr. Vieweg, Wiesbaden, 2004, pp. 91–112. MR 2115767 (2005m :53172)

[GKZ88] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinskiĭ, *Equations of hypergeometric type and Newton polyhedra*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **300** (1988), no. 3, 529–534.

[GKZ89] ______, *Hypergeometric functions and toric varieties*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **23** (1989), no. 2, 12–26.

[GKZ90] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky, *Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions*, Adv. Math. **84** (1990), no. 2, 255–271.

[GP99] T. Graber and R. Pandharipande, *Localization of virtual classes*, Invent. Math. **135** (1999), no. 2, 487–518. MR 1666787 (2000h :14005)

[GS08] M. A. Guest and H. Sakai, *Orbifold quantum D-modules associated to weighted projective spaces*, ArXiv e-prints (2008).

[GT11] A. Givental and V. Tonita, *The Hirzebruch–Riemann–Roch theorem in true genus-0 quantum K-theory*, ArXiv e-prints (2011).

[Her02] Claus Hertling, *Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. (151), Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR 1 924 259

[Her03] ______, *tt^* geometry, Frobenius manifolds, their connections, and the construction for singularities*, J. Reine Angew. Math. **555** (2003), 77–161. MR 1956595 (2005f :32049)

[Her06] ______, *tt^* geometry and mixed Hodge structures*, Singularity theory and its applications, Adv. Stud. Pure Math., vol. 43, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006, pp. 73–84. MR 2313409 (2008h :32043)

[HS07] Claus Hertling and Christian Sevenheck, *Nilpotent orbits of a generalization of Hodge structures*, J. Reine Angew. Math. **609** (2007), 23–80. MR 2350780 (2009c :32036)

[HS08] ______, *Twistor structures, tt^*-geometry and singularity theory*, From Hodge theory to integrability and TQFT tt*-geometry, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 49–73. MR 2483748 (2009m :32022)

[IMM] Hiroshi Iritani, Étienne Mann, and Thierry Mignon, *Quantum Serre and Laplace transform*, In preparation.

[Iri09a] H. Iritani, *tt*-geometry in quantum cohomology*, ArXiv e-prints (2009).

[Iri09b] Hiroshi Iritani, *An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds*, Adv. Math. **222** (2009), no. 3, 1016–1079. MR 2553377 (2010j :53182)

[Iri10] ______, *Ruan's conjecture and integral structures in quantum cohomology*, New developments in algebraic geometry, integrable systems and mirror symmetry (RIMS, Kyoto, 2008), Adv. Stud. Pure Math., vol. 59, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, pp. 111–166. MR 2683208 (2011h :14081)

[Iri11] ______, *Quantum cohomology and periods*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **61** (2011), no. 7, 2909–2958. MR 3112512

[KKP03] Bumsig Kim, Andrew Kresch, and Tony Pantev, *Functoriality in intersection theory and a conjecture of Cox, Katz, and Lee*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), no. 1-2, 127–136. MR 1958379 (2003m :14088)

[KKP08] L. Katzarkov, M. Kontsevich, and T. Pantev, *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry*, ArXiv e-prints (2008).

[KM94] Maxim Kontsevich and Yuri Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Comm. Math. Phys. **(164)** (1994), no. 3, 525–562. MR 95i :14049

[Kon95a] Maxim Kontsevich, *Enumeration of rational curves via torus actions*, The moduli space of curves (Texel Island, 1994), Progr. Math., vol. 129, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995, pp. 335–368. MR 1363062 (97d :14077)

[Kon95b] ______, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994) (Basel), Birkhäuser, 1995, pp. 120–139. MR MR1403918 (97f :32040)

[Lee04] Y.-P. Lee, *Quantum K-theory. I. Foundations*, Duke Math. J. **121** (2004), no. 3, 389–424. MR 2040281 (2005f :14107)

[LMB00] Gérard Laumon and Laurent Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 39, Springer-Verlag, Berlin, 2000. MR MR1771927 (2001f :14006)

[Man08] Étienne Mann, *Orbifold quantum cohomology of weighted projective spaces*, J. Algebraic Geom. **17** (2008), no. 1, 137–166.

[MM11] Étienne Mann and Thierry Mignon, *Quantum D-modules for toric nef complete intersections*, ArXiv,1112.1552 (2011).

[Moc06a] Takuro Mochizuki, *Asymptotic behavior of tame harmonic bundles and pure twistor D-modules*, Sūgaku **58** (2006), no. 4, 337–363. MR 2273934 (2008f :32010)

[Moc06b] ______, *Kobayashi-Hitchin correspondence for tame harmonic bundles and an application*, Astérisque (2006), no. 309, viii+117. MR 2310103 (2008f :32029)

[Moc07a] ______, *Asymptotic behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules. I*, Mem. Amer. Math. Soc. **185** (2007), no. 869, xii+324. MR 2281877 (2007j :32028a)

[Moc07b] ______, *Asymptotic behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules. II*, Mem. Amer. Math. Soc. **185** (2007), no. 870, xii+565. MR 2283665 (2007j :32028b)

[Pan98] Rahul Pandharipande, *Rational curves on hypersurfaces (after A. Givental)*, Astérisque (1998), no. 252, Exp. No. 848, 5, 307–340, Séminaire Bourbaki. Vol. 1997/98, math/9806133.

[Per07] Fabio Perroni, *Chen-Ruan cohomology of ADE singularities*, Internat. J. Math. **18** (2007), no. 9, 1009–1059. MR 2360646 (2008h :14016)

[Rom05] Matthieu Romagny, *Group actions on stacks and applications*, Michigan Math. J. **53** (2005), no. 1, 209–236. MR 2125542 (2005m :14005)

[RS10] T. Reichelt and C. Sevenheck, *Logarithmic Frobenius manifolds, hypergeometric systems and quantum D-modules*, ArXiv e-prints (2010).

[Rua06a] Yongbin Ruan, *The cohomology ring of crepant resolutions of orbifolds*, Gromov-Witten theory of spin curves and orbifolds, Contemp. Math., vol. 403, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 117–126. MR 2234886 (2007e :14093)

[Rua06b] ______, *The cohomology ring of crepant resolutions of orbifolds*, Gromov-Witten theory of spin curves and orbifolds, Contemp. Math., vol. 403, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 117–126. MR 2234886 (2007e :14093)

[Sab02] Claude Sabbah, *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)], EDP Sciences, Les Ulis, 2002, Mathématiques (Les Ulis). [Mathematics (Les Ulis)]. MR 2003m :32013

[Sab05] ______, *Polarizable twistor D-modules*, Asterisque (2005), no. 300, vi+208. MR 2156523 (2006d :32009)

[Sab08] ______, *Fourier-Laplace transform of a variation of polarized complex Hodge structure*, J. Reine Angew. Math. **621** (2008), 123–158. MR 2431252 (2010b :32017)

[Sab10] ______, *Fourier-Laplace transform of a variation of polarized complex Hodge structure, II*, New developments in algebraic geometry, integrable systems and mirror symmetry (RIMS, Kyoto, 2008), Adv. Stud. Pure Math., vol. 59, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, pp. 289–347. MR 2683213 (2011i :32014)

[Sab11] ______, *Non-commutative Hodge structures*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **61** (2011), no. 7, 2681–2717. MR 3112504

[Sai83] Kyoji Saito, *Period mapping associated to a primitive form*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **(19)** (1983), no. 3, 1231–1264. MR MR723468 (85h :32034)

[Sai98a] ______, *Around the theory of the generalized weight system : relations with singularity theory, the generalized Weyl group and its invariant theory, etc. [MR0855023 (88c :32015a) ; MR0876442 (88c :32015b)]*, Selected papers on harmonic analysis, groups, and invariants, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 183, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 101–143. MR 1615139

[Sai98b] ______, *Duality for regular systems of weights : a précis*, Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), Progr. Math., vol. 160, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998, pp. 379–426. MR 1653033 (99i :32043)

[SGA4] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1971.

[Sim97] Carlos Simpson, *The Hodge filtration on nonabelian cohomology*, Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 217–281. MR 1492538 (99g :14028)

[Vis89] Angelo Vistoli, *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces*, Invent. Math. **97** (1989), no. 3, 613–670. MR 1005008 (90k :14004)

[Yas04] Takehiko Yasuda, *Twisted jets, motivic measures and orbifold cohomology*, Compos. Math. **140** (2004), no. 2, 396–422. MR 2027195 (2004m :14037)