OG Rouge
Année 2008-2009
Ecole Centrale Marseille

TP DE CLÔTURE : MODÉLISATION DE FILES D'ATTENTE.

# 1 Introduction

Les files d'attente apparaissent naturellement dans beaucoup de situations de la vie courante : un guichet desservant des usagers, une piste d'aéroport sur laquelle des avions attérissent, un serveur informatique répondant à des requêtes. Les clients arrvient à des temps aléatoires et attendent leur tour devant le(s) guichet(s). Le serveur met un temps aléatoire pour servir chaque client. Enfin la file a une certaine capacité d'accueil éventuellement limitée. Une file d'attente est donc déterminée par les quatres paramètres suivants : A/B/s/K où

- A indique la loi des temps inter-arrivées des clients,
- B indique la loi des temps de services,
- s indique le nombre de serveurs,
- K indique la capacité de la salle d'attente ($+\infty$ si il n'y a pas de précisions).

L'objet de ce TP est d'étudier les files sans M/M/1 et M/M/s, où M représente la loi exponentielle (ou sans mémoire, Memoryless en anglais).

# 2 File M/M/1 : Définition et premières propriétés

Une file d'attente M/M/1 est défnie par le processus stochastique suivant. On suppose que les instants d'arrivées des clients sont distribués selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda$ et que les temps de service sont indépendants (et indépendants du processus d'arrivée) et suivent la loi exponentielle de paramètre $\mu$. On note $\{X_t, t \geq 0\}$ le processus qui compte le nombre de personnes dans la file. On peut montrer que $(X_t)$ est un processus markovien de sauts à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pourra calculer par la suite son générateur infinitésimal.

On note $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $T_0 = 0$) la suite des sauts et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov incluse par le processus $(X_t)$.

1. On se donne $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$. Montrer que $V = \min(X,Y) \sim \mathcal{E}(\lambda+\mu)$, $W = \mathbb{1}(V = X) \sim B(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})$. On peut montrer aussi que $W$ et $V$ sont indépendantes.
2. En déduire les affirmations suivantes :
   - $Z_n = 0 \Rightarrow S_n = T_{n+1} - T_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
   - Si $Z_n > 0$, $S_n \sim \mathcal{E}(\lambda+\mu)$ et $Z_{n+1} = Z_n + Y_n$, où $Y_n$ est à valeurs dans $\{-1, +1\}$ telle que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

   De plus, il est clair que $(Z_n)$ et $(S_n)$ sont indépendantes.
3. En déduire une façon de représenter $(X_t)$ à partir de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a. indépendantes de lois respectives uniforme sur [0,1] et exponentielle de paramètre 1.
4. Ecrire une fonction *mm1* qui permet de simuler une trajectoire de la file d'attente M/M/1 prenant comme paramètre $\lambda$, $\mu$ et $t$ l'instant final, et qui donne la matrice des temps de saut et des positions.
   *NB : Une v.a. exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ est générée à l'aide de la fonction grand(1,1,"exp",1/$\lambda$).*
5. Remarquez que $(X_t)$ semble avoir trois comportement différents selon que $\lambda < \mu$, $\lambda = \mu$ ou $\lambda > \mu$.

## 3 Cas transient

On suppose ici que $\lambda > \mu$.

1. Déterminer grâce aux simulations l'expression de la limite $a(\lambda,\mu)$ de $\frac{X_t}{t}$ quand $t \to +\infty$. Ecrire une fonction *limit* qui prend en paramètres $\lambda$, $\mu$ et $t$ et trace la trajectoire de $t \mapsto \frac{X_t}{t}$.
2. Ecrire une fonction *quasigauss* qui illustre le fait que, pour $t$ grand, la loi de $Y_t = \sqrt{t}(\frac{X_t}{t} - a(\lambda,\mu))$ est quasiment gaussienne.
   *NB : Pour cela il faudra simuler un grand nombre de variables $Y_t$ et comparer l'histogramme de l'échantillon à celui d'une loi Normale.*
3. Peut-on grâce aux simulations se faire une idée de l'expression de la variance asymptotique $\sigma^2(\lambda,\mu)$ en fonction de $\lambda$ et $\mu$ ?

## 4 Cas récurrent positif

On se place à présent dans le cas où $\lambda < \mu$. On sait que dans ce cas le processus $(X_t)$ admet pour mesure invariante la probabilité $\pi$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

De plus, d'après le cours, la loi de $(X_t)$ converge vers $\pi$. On veut illustrer cette convergence grâce aux simulations.
Ecrire une fonction *repart* qui prend en paramètres $\lambda$, $\mu$, $t$ et un entier $p$, qui génère $p$ réalisations indépendantes de $X_t$ puis compare la fonction de répartition empirique de cet échantillon à celle de la mesure $\pi$.
*Rappel : la fonction de répartition empirique de l'échantillon $(X_1, \dots X_n)$ est définie par :*

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_i \leq x).$$

## 5 Files M/M/s

On considère à présent la file d'attente M/M/s où les instants d'arrivée sont toujours poissoniens, les temps de services exponentiels mais il y a $s$ guichets ou "serveurs" disponibles. Les temps de services aux guichets sont bien sûr mutuellement indépendants. On note $\{X_t, t \geq 0\}$ le processus qui compte le nombre de personnes dans le système. On peut montrer que $(X_t)$ est un processus markovien de sauts à valeurs dans $\mathbb{N}$ de générateur infinitésimal donnée par les relations suivantes :
pour la première ligne :

$$Q_{01} = \lambda, Q_{0x} = 0, x > 1,$$

pour $1 \leq x \leq s$ :

$$Q_{x,x+1} = \lambda, Q_{x,x-1} = x\mu, Q_{x,y} = 0, |x - y| > 1,$$

et enfin :

$$Q_{x,x+1} = -\lambda, Q_{x,x-1} = s\mu, Q_{x,y} = 0, |x - y| > 1.$$

Comme précédemment, on note $S_n = T_{n+1} - T_n$.

1. En remarquant que $\min(S_1, \dots, S_x) \sim \mathcal{E}(\mu x)$, en déduire comme dans le cas $s = 1$ la loi de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de $Z_n$, ainsi que l'expression de $Z_{n+1}$ en fonction de $Z_n$.
2. En déduire une façon de représenter $(X_t)$ à partir de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a. indépendantes de lois respectives uniforme sur $[0,1]$ et exponentielle de paramètre 1.

3. Ecrire une fonction *mm1s* qui permet de simuler une trajectoire de la file d'attente M/M/1/s prenant comme paramètre $\lambda$, $\mu$, $s$ et $t$ l'instant final, et qui donne la matrice des temps de saut et des positions.
4. Remarquez que $(X_t)$ semble avoir trois comportements différents selon que $\lambda < \mu s$, $\lambda = \mu s$ ou $\lambda > \mu s$.
5. Dans le cas récurrent positif, on peut calculer la probabilité invariante $\pi$ donnée par :

$$\frac{\pi_k}{\pi_0} = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \text{ si } 0 \leq k \leq s$$

et

$$\frac{\pi_k}{\pi_0} = \frac{(\lambda/\mu)^k}{s^{k-s}s!} \text{ si } k > s.$$

Les deux cas qui conduisent à une formule simple sont les cas $s = 1$ (déjà traité, loi géométrique), et $s = +\infty$, auquel cas $\pi$ est la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{\mu}$. On veut illustrer cela grâce aux simulations.
Ecrire une fonction *poisson* qui prend en paramètres $\lambda$, $\mu$, $t$ et un entier $p$, qui génère $p$ réalisations indépendantes de $X_t$ pout $t$ grand, puis compare la fonction de répartition empirique de cet échantillon à celle de la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{\mu}$.

# 6 Processus de départ des usagers

On s'intéresse au processus qui compte le nombre de personnes qui sont sorties du système.

**Théorème 1 (Burke)** *Si $\lambda < \mu s$, à l'équilibre le processus des départs est un processus de Poisson d'intensité $\lambda$.*

La preuve utilise le fait que la probabilité invariante du processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est solution de l'équation d'équilibre ponctuel :

$$\pi_x Q_{x,x+1} = \pi_{x+1} Q_{x+1,x}.$$

Autrement dit, le générateur infinitésimal $Q$ est réversible par rapport à $\pi$. Ainsi, si on munit $(X_t)$ de la loi initiale $\pi$, la chaîne est réversible et $\{X_{T-t}, 0 \leq t \leq T\}$ a même loi que $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$. Ainsi les départs de $(X_t)$ sont les arrivées de $(X_{T-t})$ : un processus de Poisson d'intensité $\lambda$ !

1. Ecrire une fonction *depart* qui génère une file d'attente M/M/1 et trace la trajectoire du processus des départs. Cela confirme-t'il le Théorème de Burke ?
2. Vérifier le Théorème de Burke dans le cas $s > 1$.