Master 1 Mathématique
Université d'Angers

Année 2010-2011

TP 2 : Estimation, méthode de Monte-Carlo

Etude de trois estimateurs

On s'intéresse à l'estimation de $\theta = e^{-\lambda} = \mathbb{P}_\theta(X = 0)$ basée sur un échantillon $X_1, ..., X_n$ de variables aléatoires i.i.d. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On considère les trois estimateurs suivants :

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_1 &= e^{-\overline{X}} \\ \widehat{\theta}_2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_i = 0) \\ \widehat{\theta}_3 &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} \end{aligned}$$

1. Montrer que ces trois estimateurs sont convergents.
2. A l'aide de la commande `rpois`, simuler 10 000 échantillons de taille $n = 10$ avec $\lambda = 1$.
3. Calculer pour chacun des échantillons $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ et $\widehat{\theta}_3$. Tracer l'histogramme des trois estimateurs.
4. Proposer, à partir des 10 000 simulations, une approximation du biais et du risque quadratique pour chacun des trois estimateurs.
5. Tracer les fonctions de biais et de risque quadratique des trois estimateurs pour $\lambda \in [0.1; 6]$. Commenter.
6. Montrer que
$$\mathbb{E}\left(\widehat{\theta}_2 \middle| \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \widehat{\theta}_3.$$
En quoi ceci explique-t-il les résultats précédents ?

La méthode de Monte-Carlo

Soit X une variable aléatoire de densité f, et h une fonction définie sur le support de X, telle que $\int |h(x)|f(x)dx < \infty$. Nous cherchons à évaluer

$$\mathfrak{I} = \int h(x)f(x)dx = \mathbb{E}_f[h(X)]$$

Dans de nombreuses situations, ce calcul ne peut être fait de façon explicite. L'intégration par méthode de Monte Carlo en fournit une approximation.

D'après la loi des grands nombres, si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi de densité f alors,

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mathfrak{I}}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i) = \mathfrak{I}, \quad \text{p.s.},$$

donc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)$ fournit une approximation de $\mathfrak{I}$.

Nous considérons une variable aléatoire X de loi $\Gamma(a, b)$ de densité de probabilité :

$$f_{a,b}(x) = \frac{b^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} \exp(-bx)\mathbb{I}_{x>0}$$

Dans la suite, on utilisera $a = 4$ et $b = 1$.

1. Simuler un échantillon de 1000 réalisations de X.
2. Déterminer par la méthode de Monte-Carlo des approximations de l'espérance et de la variance de X, puis donner la variance de l'estimateur de l'espérance.
3. Calculer par une méthode de simulation des approximations de la fonction de répartition de X aux points 2 et 5.
4. Donner des approximations des quantiles à 85, 90 et 95% de la loi de X.

Applications

1. *Approximation de π par Monte-Carlo*
   Idée : on simule n observations selon une loi uniforme sur le pavé $[0,1] \times [0,1]$ et on compte la proportion d'observations qui sont à l'intérieur du disque unité. On pourra proposer d'autres méthodes.
2. *Ruine d'un joueur*
   On s'intéresse à la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et par la relation, $\forall n \geq 1$:

$$S_n = S_{n-1} + X_n,$$

   où $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - q$. On notera par la suite $\rho = \frac{q}{p}$. (S_n) est le cas le prototype d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

   (a) Ecrire une fonction qui prend en entrée $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$, et qui génère et trace une réalisation de longueur n de la marche (S_n).

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère maintenant la marche issue de $k \leq n$ arrêtée quand elle atteint 0 ou n. On note T le temps d'atteinte de l'ensemble $\{0, n\}$. retrouver par la méthode de Monte-Carlo les résultats théoriques suivants :

   (i) temps moyen d'absorption :

$$\mathbb{E}T = k(n-k) \text{ si } p = \frac{1}{2}; \mathbb{E}T = \frac{n(1-\rho^k)}{(p-q)(1-\rho^n)} - \frac{k}{p-q} \text{ si } p \neq q.$$

   (ii) lieu de sortie :

$$\mathbb{P}(S_T = 0) = \frac{n-k}{n} \text{ si } p = \frac{1}{2}; \mathbb{P}(S_T = 0) = \frac{\rho^k - \rho^n}{1-\rho^n} \text{ si } p \neq q.$$