OG Rouge
Année 2008-2009

Ecole Centrale Marseille

Processus markoviens de sauts
TD

Exercice 1 Soit $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ un processus ponctuel de Poisson d'intensité λ, et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov indépendante de $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans E, de matrice de transition P. On pose

$$X_t = \sum_{n\geq 0} Z_n \ \mathbb{1}_{[T_n;T_{n+1}[}(t), t \geq 0.$$

1. Montrer que $\{X_t, t \geq 0\}$ est un processus markovien de sauts.
2. Déterminer ses matrices de transition et le générateur infinitésimal associé.
3. Déterminer la loi de l'instant du premier saut.

Exercice 2 Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de sauts à valeurs dans E de semi-groupe de transition $\{P(t), t \geq 0\}$ et de générateur infinitésimal Q. Montrer que dans le cas $|E| < \infty$,

$$\frac{\delta}{\delta t}P(t) = QP(t),$$

et de la même manière

$$\frac{\delta}{\delta t}P(t) = P(t)Q.$$

On les appelle équations de Kolmogorov.

Exercice 3 Soit P la matrice markovienne définie par

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{pmatrix}.$$

On considère le générateur infinitésimal $Q = P - I$ du processus markovien de saut $\{X_t, t \geq 0\}$.
1. Déterminer la matrice P' de transition de la chaîne incluse.
2. Décrire les trajectoires du processus $\{X_t, t \geq 0\}$, en précisant pour chaque état les paramètres des lois exponentielles des temps de séjour.
3. Montrer que (X_t) est irréductible, récurrente positive. Déterminer sa probabilité invariante.
4. Déterminer la probabilité invariante de la chaîne incluse.

Exercice 4 Soit $0 < p,\ q < 1$ tels que $p + q = 1$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \mathbb{N}$ de matrice de transition

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & ... \\ q & 0 & p & 0 & ... \\ 0 & q & 0 & p & ... \\ 0 & 0 & q & 0 & p.. \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ le processus markovien de sauts à valeur dans $E = \mathbb{N}$ de générateur infinitésimal

$$\mathrm{Q}=\begin{pmatrix} -p & p & 0 & 0 & ... \\ q & -1 & p & 0 & ... \\ 0 & q & -1 & p & ... \\ 0 & 0 & q & -1 & p.. \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1. La chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle la chaîne incluse du processus (X_t) ?
2. Montrer que les deux processus sont irréductibles.
3. Montrer que toute mesure invariante de (X_n) est une mesure invariante de (X_t) et vice-versa.
4. Montrer que les deux chaînes sont transitoires lorsque $p > q$ (comparer à la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, qui est transitoire pour $p = q$).
5. Montrer que les deux chaînes sont récurrentes dans le cas $p = q$. Déterminer dans ce cas une mesure invariante de masse infinie, et en déduire que le processus est récurrent nul.
6. On se place maintenant dans le cas $p < q$. On pose $\lambda = p/q$. En remarquant que $q^{-1}(\lambda - p) = \lambda^2$, montrer qu'il existe une probabilité géométrique (i.e. de la forme $(\pi_k = \alpha^k(1-\alpha), k \in \mathbb{N})$ invariante pour les deux chaînes.
7. On modifie le générateur Q en multipliant p et q par une constante $c > 0$. Montrer que ni la nature de la chaîne (récurrente nulle, récurrente positive, transitoire), ni l'éventuelle mesure invariante n'est modifiée. Qu'est-ce qui est modifié dans le processus ?
8. On se place dans le cas $p < q$. On considère le processus markovien de sauts $\{Y_t, t \geq 0\}$ de générateur infinitésimal Q' défini par

$$\mathrm{Q}=\begin{pmatrix} -p & p & 0 & 0 & ... \\ \lambda q & -\lambda & \lambda p & 0 & ... \\ 0 & \lambda^2 q & -\lambda^2 & \lambda^2 p & ... \\ 0 & 0 & \lambda^3 q & -\lambda^3 & \lambda^3 p.. \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

   où $\lambda = \frac{p}{q}$.
   Comparer les chaînes incluses de $\{X_t, t \geq 0\}$ et $\{Y_t, t \geq 0\}$. Vérifier que $\{\pi_x = 1, x \in \mathbb{N}\}$ est mesure invariante, et en déduire que $\{Y_t, t \geq 0\}$ est récurrente nulle. Expliquer pourquoi (Y_t) met en moyenne plus de temps que (X_t) pour revenir à x, en partant de x.