

# Le recuit simulé : analyse théorique et applications

proposé par Sébastien Loustau (loustau@cmi.univ-mrs.fr)

## 1 Introduction

La recherche des maxima globaux d'une fonction est un des problèmes importants des mathématiques appliquées. Si on considère une fonction différentiable sur  $\mathbb{R}^d$ , il peut paraître naturel, à partir d'un point arbitraire, de se déplacer dans la direction du gradient, tant que la fonction décroît. Malheureusement une telle méthode conduit à trouver un minimum local, et non global.

Ce projet s'intéresse à la méthode du "recuit simulé", qui introduit des perturbations aléatoires par rapport à la méthode du gradient, permettant de sortir des bassins d'attractions des minima locaux. Le principe de cet algorithme stochastique est d'introduire des perturbations qui s'atténuent au cours du temps, de telle sorte que l'on espère finalement aboutir à des minima globaux.

## 2 Modélisation

Supposons que l'on cherche à maximiser une fonction  $U : E \rightarrow ]-\infty, 0]$  telle que, pour simplifier les notations,

$$\max_{x \in E} U(x) = 0.$$

On cherche  $x \in E$  qui réalise ce maximum.

Pour tout  $\beta > 0$ , on définit la probabilité  $\pi_\beta$  sur  $E$  par :

$$\pi_{\beta,x} = Z_\beta^{-1} e^{\beta U(x)}, x \in E,$$

où  $Z_\beta = \sum_{x \in E} e^{-\beta U(x)}$ . Le paramètre  $\beta$  est appelé inverse de la température. Quand  $\beta \rightarrow +\infty$ , la probabilité  $\pi_\beta$  converge vers la probabilité uniforme sur les maxima de  $U$ .

A chaque  $\beta > 0$ , on associe la matrice de transition d'une chaîne de Markov  $\{X_n^\beta, n \geq 0\}$  irréductible apériodique de probabilité invariante  $\pi_\beta$  (on verra que cela est toujours possible). Si  $\beta$  est fixé, la loi de  $X_n^\beta$  converge vers  $\pi_\beta$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . L'idée de l'algorithme du recuit simulé est de faire varier  $\beta$  en fonction de  $n$ , de telle sorte que  $X_n^\beta$  converge vers l'ensemble des maximum de la fonction  $U$ . Cela est vrai si  $\beta := \beta(n) \rightarrow +\infty$  suffisamment lentement lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

## 3 Contenu du projet

Ce projet propose l'étude de la méthode du recuit simulé, d'un point de vue théorique et appliqué. On commencera par montrer la convergence théorique de l'algorithme, en manipulant les processus stochastiques. Parallèlement, on propose d'appliquer ces résultats à la recherche de maxima de fonctions, en programmant l'algorithme stochastique du recuit à l'aide d'un logiciel de calcul (Scilab par exemple). Si le temps le permet, on étudiera l'application d'une telle méthode en statistique.

## 4 Profil des candidats

L'étude du recuit simulé nécessite la manipulation d'outils (processus stochastiques, convergences) assez fins. Ainsi ce projet est plutôt destiné à un(e) étudiant(e) ayant suivi le cours d'OG Rouge "Processus markoviens et applications".

L'autonomie et la motivation seront les principaux atouts des candidat(e)s. Une part importante du travail sera consacrée à la lecture et la compréhension de chapitres de livres sur le recuit simulé ou de survols scientifiques du sujet, parfois en anglais.

De plus, l'utilisation d'un logiciel de calcul est indispensable à la programmation de l'algorithme.

## 5 Références

1. Processus de Markov et applications, E. Pardoux. SMAI, 2007.
2. La méthode du recuit simulé, P. Siarry et G. Dreyfus. IDSET, Paris, 1988.
3. Simulated annealing: theory and applications, P.J.M. Laarhoven and E.H.L. Aarts. Kluwer Academic Publishers, 1989.