Chaînes de Markov et Processus markoviens de sauts. Applications aux files d'attente.

Sébastien Loustau

Ecole Centrale de Marseille, Année 2008-2009.

Table des matières

Chapitre 1

Chaînes de Markov

Introduction

On considère la marche aléatoire suivante sur le réseau $\mathbb{Z}^d$: on part du point $0_{\mathbb{Z}^d} = (0,\ldots,0)$ et on se dirige avec même probabilité dans chaque direction. Cela signifie qu'avec probabilité $p = \frac{1}{2d}$, on choisit une direction. Les questions relatives à une telle marche sont nombreuses et largement étudiées en théorie des probabilités. On peut se demander :

- Quelle est la probabilité de revenir en l'origine ?
- Et en tout autre point ?
- Où finit-on par aller ?
- Quelle est la forme de la trajectoire ?

Pour répondre à ces questions, on modélisera cette marche aléatoire par une chaîne de Markov. Formellement, une chaîne de Markov vérifie la propriété de Markov, à savoir :

"Sachant le présent, le futur est indépendant du passé".

Une façon très simple de construire une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est de se donner une suite de variables aléatoires $Y_n, n \geq 1$ indépendantes, et indépendantes de X_0, et de poser :

$$X_n = f(X_{n-1},Y_n,n), n \geq 1. \tag{1.1}$$

Autrement dit, c'est le modèle le plus simple de variables aléatoires dépendantes. Dans ce chapitre, on va étudier les chaînes de Markov homogènes. Cela revient à choisir f indépendante de n dans la relation (1.2). Si on revient à la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, on a bien :

$$X_n = f(X_{n-1},Y_n),$$

où $f(X_{n-1},Y_n) = X_{n-1} + Y_n$ avec Y_n donnée par

$$Y_n = \begin{cases} e_i, i = 1 \ldots d \text{ avec probabilité } \frac{1}{2d} \\ -e_i, i = 1 \ldots d \text{ avec probabilité } \frac{1}{2d}, \end{cases}$$

où e_i, $i = 1 \ldots d$ est la base canonique de $\mathbb{Z}^d$.

1.1 Définition et propriétés

On se place sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Dans toute la suite, les variables aléatoires seront définies sur cet espace de probabilité. De plus, par convention, chaque condition faisant intervenir la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A|B)$ n'est supposée vérifiée que pour $\mathbb{P}(B) > 0$. On exclut le cas contraire où $\mathbb{P}(B) = 0$, qui revient à diviser par zéro.

Définition 1 *Le processus stochastique $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E ensemble fini ou dénombrable est une chaîne de Markov si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x_0,\dots x_n,y \in E$,*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_0 = x_0,\dots X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x_n).$$

On va tout d'abord démontrer qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ vérifiant (1.2) est bien une chaîne de Markov.

Lemme 1 *Soit E et F deux ensembles dénombrables. Soit $f : \mathbb{N}\times E\times F \to E$. Soit X_0 à valeurs dans E et $(Y_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans F, indépendantes et indépendantes de X_0. Alors le processus définit par:*

$$X_{n+1} = f(X_n,Y_{n+1},n), n \geq 1,$$

est une chaîne de Markov.

Preuve

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_0 = x_0,\dots X_n = x_n) &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = y,X_0 = x_0,\dots X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0,\dots X_n = x_n)} \\
&= \sum_{z:f(x_n,z,n)=y} \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0,\dots X_n = x_n,Y_{n+1} = z)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0,\dots X_n = x_n)} \\
&= \sum_{z:f(x_n,z,n)=y} \mathbb{P}(Y_{n+1} = z) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x_n).
\end{aligned}$$

Cette preuve permet de montrer rigoureusement que la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est bien une chaîne de Markov.

Dans le monde déterministe, cela revient à étudier les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ définies par récurrence de la manière suivante :

$$x_{n+1} = f(x_n,n).$$

Dans ce cas la fonction $f(\cdot,n)$ permet de construire pas à pas à partir de x_0 la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Dans le cadre des chaînes de Markov, ce rôle est joué par la matrice de transition, définie par :

$$P_{xy} = \mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x).$$

La quantité P_{xy} est la probabilité d'aller de l'état x à l'état y. Dans toute la suite, cette matrice P sera indépendante de l'instant n. On dit que la chaîne de Markov est homogène.

Définition 2 *Une matrice P est dite markovienne si $P = (P_{xy})_{x,y\in E}$ vérifie les propriétés suivantes :*

- $\forall x \in E$:

$$\sum_{y\in E} P_{xy} = 1;$$

- $\forall x,y \in E,\ P_{xy} \geq 0.$

Remarque 1 *On indice les lignes et les colonnes de la matrice P par les éléments de E. Une matrice markovienne est une matrice carré, avec éventuellement une infinité de lignes et de colonnes lorsque E est dénombrable infini.*

Remarque 2 *Les deux conditions de la définition reviennent à dire que chaque vecteur ligne $P_{x\cdot}$ est un mesure de probabilité sur E.*

Comme on va le voir, la loi d'une chaîne de Markov sur E est entièrement déterminé par la donnée d'une loi initiale μ sur E et d'une matrice markovienne P qui sera la matrice de transition de la chaîne.

Définition 3 *Soit μ une probabilité sur E et P une matrice markovienne. Un processus stochastique $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E et défini sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ est une chaîne de Markov (μ,P) si :*

(i) $\mathbb{P}(X_0 = x) = \mu_x,\ \forall x \in E.$

(ii) $\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots X_n = x) = P_{xy},\ \forall x_0, \dots x,y \in E.$

La probabilité μ est appelé loi initiale de la chaîne et la matrice P matrice de transition.

Proposition 1 *$(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots X_n = x_n) = \mu_{x_0} P_{x_0 x_1} \dots P_{x_{n-1} x_n}. \tag{1.2}$$

Preuve *$\Rightarrow$) Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, alors on a :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots X_n = x_n) &= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_0 = x_0,, \dots X_{n-1} = x_{n-1}) \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots X_{n-1} = x_{n-1}) \\
&= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots X_{n-1} = x_{n-1}) \\
&= \dots \\
&= P_{x_{n-1} x_n} \dots P_{x_0 x_1} \mathbb{P}(X_0 = x_0).
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Si (1.2) *est vérifiée, alors:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots X_n = x_n) &= \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots X_n = x_n, X_{n+1} = y)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots X_n = x_n)} \\
&= \frac{\mu_{x_0} P x_0 x_1 \dots P x_{n-1} x_n P x_n x_{n+1}}{\mu_{x_0} P x_0 x_1 \dots P x_{n-1} x_n} \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x_n).
\end{aligned}$$

Dans ce cours, une probabilité μ sur E sera toujours définie comme un vecteur ligne. Une application $g : E \to \mathbb{R}$ sera représentée par un vecteur colonne, de sorte que:

$$(\mu P)_y = \sum_{x \in E} \mu_x P_{xy},$$

et

$$(Pg)_x = \sum_{y \in E} P_{xy} g_y.$$

Enfin, l'intégrale d'une fonction g par rapport à une mesure μ s'écrit, lorsqu'elle existe :

$$\mu(g) = \sum_{x \in E} \mu_x g_x.$$

Proposition 2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov (μ,P). Alors :*
- $\mathbb{P}(X_n = y) = (\mu P^n)_y$.
- $\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) = \mathbb{P}(X_{n+p} = y | X_p = x) = (P^n)_{xy}$.
- $\mathbb{E}(g(X_n)|X_0 = x) = (P^n g)_x$.

Preuve *Exercice !*

Exemple 1 (Somme de variables aléatoires) *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$. $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ est une chaîne de Markov. De plus, si les variables X_n sont de même loi μ, alors (S_n) est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition $P_{ij} = \mu(j - i)$.*

Exemple 2 (Modèle de diffusion d'Ehrenfest) *On réparti N particules dans deux compartiments. Entre l'instant n et $n+1$, une particule au hasard (avec probabilité uniforme) et une seule passe d'un compartiment à un autre. On note X_n le nombres de particules dans le premier compartiment à l'instant n. Alors X_n est une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0,\ldots N\}$ de matrice de transition P_{ij} telle que pour tout i, $P_{i,i-1} = \frac{i}{N}$, $P_{i,i+1} = \frac{N-i}{N}$ et $P_{ij} = 0$ sinon.*

Exemple 3 (File d'attente en temps discret) *On considère une file d'attente à un gichet. On note $(X_n)_{n\geq 0}$ le nombre de personnes dans la file à l'instant n. Entre l'instant n et $n+1$, Y_{n+1} clients arrivent et si $X_n > 0$, Z_{n+1} clients partent. On suppose que les variables $X_0,Y_1,Z_1,Y_2,Z_2,\ldots$ sont indépendantes telles que $\mathbb{P}(Y_n = 0) < 1$ et $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Z_n = 0)$. $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.*

1.2 Propriété de Markov forte

On se donne une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E, définie sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Soit μ une probabilité sur E. On notera $\mathbb{P}_\mu$ une probabilité sur E telle que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ a pour loi initiale μ, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}_\mu(X_0 = x) = \mu_x, \forall x \in E.$$

Dans le cas où $\mu = \delta_x$, on notera $\mathbb{P}_{\delta_x} = \mathbb{P}_x$ qui représente la probabilité conditionnelle sachant $\{X_0 = x\}$. On notera $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $(X_0,\ldots X_n)$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}_n = \{\{\omega \in \Omega : (X_0(\omega),\ldots,X_n(\omega)) \in B_n\}, B_n \in \mathcal{P}(E^{n+1})\}.$$

C'est l'ensemble des évènements se produisant jusqu'à l'instant n.
Le théorème suivant est une conséquence directe de la définition des chaînes de Markov. On l'appelle parfois propriété de Markov (faible).

Théorème 1 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov (μ,P). Alors, quelquesoit $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$, conditionnellement à $\{X_n = x\}$, $(X_{n+p})_{p\geq 0}$ est une chaîne de Markov (δ_x,P) indépendante de $(X_0,\ldots,X_n)$. On peut écrire, quelquesoit $A \in \mathcal{F}_n$:*

$$\mathbb{P}(A \cap X_{n+1} = x_1,\ldots X_{n+p} = x_p | X_n = x) = \mathbb{P}(A|X_n = x)\mathbb{P}_x(X_1 = x_1,\ldots X_p = x_p).$$

Preuve *Il suffit de montrer le théorème pour $B = \{X_0 = y_0, \dots X_n = y_n\}$ puisque tout evènement $A \in \mathcal{F}_n$ est une réunion au plus dénombrable d'évènements disjoints de la forme B (on conclut par σ-additivité de $\mathbb{P}$). De plus, si $y_n \neq x$, les deux membres de l'égalité sont nuls. On a donc, en prenant $B = \{X_0 = y_0, \dots X_n = x\}$:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B \cap \{X_{n+1} = x_1, \dots X_{n+p} = x_p\} | X_n = x) &= \frac{\mathbb{P}(X_0 = y_0, \dots X_n = x, X_{n+1} = x_1, \dots X_{n+p})}{\mathbb{P}(X_n = x)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(X_n = x)} P_{xx_1} \dots P_{x_{p-1}x_p} \\
&= \mathbb{P}(B | X_n = x) \mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \dots X_p = x_p),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la Proposition 1.

Ce théorème est l'illustration de l'affirmation de l'introduction. Sachant la position à l'instant n, le passé et le futur sont conditionnellement indépendants.

La propriété de Markov forte permet d'établir ce résultat en remplaçant l'instant fixe n par un instant aléatoire vérifiant une certaine propriété.

Définition 4 *Une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup +\infty$ est appelée temps d'arrêt si pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n,$$

ou de manière équivalente $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Cela signifie qu'en observant la chaîne jusqu'à l'instant n, on peut décider si $\{T = n\}$ a lieu ou non.

Exemple 4 *On définit la variable S_x par:*

$$S_x = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = x\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. S_x représente le temps de premier passage à l'état x de la chaîne. Alors il est clair que S_x est un temps d'arrêt :

$$\{S_x = n\} = \{X_0 \neq x\} \cap \cdots \{X_{n-1} \neq x\} \cap \{X_n = x\} \in \mathcal{F}_n.$$

Exemple 5 *On définit la variable T_x par:*

$$T_x = \inf\{n > S_x : X_n = x\}.$$

T_x représente le temps du premier retour à l'état x de la chaîne. On montre aisément que T_x est un temps d'arrêt.

Exemple 6 *On définit la variable L_x par:*

$$L_x = \sup\{n \in \mathbb{N} : X_n = x\}.$$

L_x représente le temps du dernier passage à l'état x de la chaîne. L_x n'est pas un temps d'arrêt.

Théorème 2 (Propriété de Markov forte) *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une chaîne de Markov* (μ,P). *Alors, quelquesoit* $x \in E$, *conditionnellement à* $\{X_T = x\} \cap \{T < \infty\}$, $(X_{T+p})_{p\geq 0}$ *est une chaîne de Markov* (δ_x,P) *indépendante de* $(X_0,\dots,X_T)$. *On peut écrire, quelquesoit* $A \in \mathcal{F}_T$*:*

$$\mathbb{P}(A \cap X_{T+1} = x_1,\dots X_{T+p} = x_p | X_T = x, T < \infty) = \mathbb{P}(A|X_T = x, T < \infty)\mathbb{P}_x(X_1 = x_1,\dots X_p = x_p).$$

Preuve *Il suffit de montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a d'après le Théorème 1 :*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A \cap \{T = n\} \cap \{X_{T+1} = x_1,\dots X_{T+p} = x_p\} | X_T = x, T < \infty) \\ = \; & \mathbb{P}(A|X_T = x, T < \infty)\mathbb{P}_x(X_1 = x_1,\dots X_p = x_p). \end{aligned}$$

En sommant sur n, *on obtient le résultat.*

1.3 Récurrence, transcience

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux passages successifs d'une chaîne de Markov à un état $x \in E$. On note T_x le temps d'arrêt défini par:

$$T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}.$$

On défini le nombre de retour à l'état x par :

$$N_x = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}(X_n = x).$$

Définition 5 *On dit qu'un état* $x \in E$ *est récurrent si* $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$. *Sinon, il est dit transitoire (i.e.* $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1$*).*

Proposition 3 *Soit* $x \in E$. *Alors on a, pour tout* $k \geq 1$*:*

$$\mathbb{P}_x(N_x \geq k) = (\mathbb{P}_x(T_x < \infty))^k. \tag{1.3}$$

Par conséquent, les assertions suivantes sont équivalentes (LASSE) :
(i) x *est récurrent.*
(ii) $\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 1$.
(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}(P^n)_{xx} = \infty$.
(iv) $\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) > 0$.
Si x *est transitoire,* N_x *suit une loi géométrique de paramètre* $\mathbb{P}_x(T_x < \infty)$.

Preuve *On note* T_x^2 *le temps du deuxième retour en* x *:*

$$T_x^2 = \inf\{n > T_x : X_n = x\} = T_x + \inf\{n \geq 1 : X_{T_x+n} = x\}.$$

T_x^2 *est clairement un temps d'arrêt et on a, d'après le Théorème 2 :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(T_x^2 < \infty) &= \mathbb{P}_x(T_x^2 < \infty | T_x < \infty)\mathbb{P}_x(T_x < \infty) \\ &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_x(T_x^2 = T_x + k | T_x < \infty)\mathbb{P}_x(T_x < \infty) \\ &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_x(T_x = k)\mathbb{P}_x(T_x < \infty) \\ &= (\mathbb{P}_x(T_x < \infty))^2 = \mathbb{P}_x(N_x \geq 2), \end{aligned}$$

où on utilise le fait que si la chaîne revient 2 fois en x en un temps fini, le nombre de visite de l'état x est au moins 2. De la même manière, en répétant le raisonnement ci-dessus, on montre (1.3).
Alors si x est récurrent, $\mathbb{P}_x(N_x \geq k) = 1$ pour tout k, ce qui entraîne (ii). (iii) se déduit aisément de (ii) en notant que :

$$\mathbb{E}_x N_x = \sum_{n\geq 1} (P^n)_{xx}. \tag{1.4}$$

En remarquant que $\{N_x = k\} = \{N_x \geq k\} \backslash \{N_x \geq k+1\}$, et en utilisant (1.3), il est clair que :

$$\mathbb{P}_x(N_x = k) = (\mathbb{P}_x(T_x < \infty))^k (1 - \mathbb{P}_x(T_x < \infty)), \forall k \geq 1.$$

Ainsi (iii) $\Rightarrow$ (i) puisque si x est transitoire, en utilisant (1.4) :

$$\mathbb{E}_x N_x = \sum_{k\geq 1} k \mathbb{P}_x(T_x < \infty)^k (1 - \mathbb{P}_x(T_x < \infty) = \frac{\mathbb{P}_x(T_x < \infty)}{1 - \mathbb{P}_x(T_x < \infty)} < \infty.$$

Enfin (iv) $\Leftrightarrow$ (ii) puisque si $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) > 0$, alors N_x ne suit pas une loi géométrique. Ainsi x n'est pas transitoire, il est donc récurrent d'où $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$.

Définition 6 *On dit que l'état y est accessible à partir de x (noté $x \to y$) s'il existe $n \geq 0$ tel que $(P^n)_{xy} > 0$. On dit que x et y communiquent si $x \to y$ et $y \to x$ (noté $x \leftrightarrow y$).*

Lemme 2 *La relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence.*

Preuve *Exercice !*

On peut alors partitionner l'espace d'état d'une chaîne de Makov en classes d'équivalences modulo la relation $\leftrightarrow$.
Théorème 3 *Soit $C \subset E$ une classe d'équivalence pour la relation $\leftrightarrow$. Alors tous les états de C sont soit récurrents soit transitoires.*

Preuve *Il suffit de montrer que*

$$\forall x,y \in C, x \text{ transitoire } \Rightarrow y \text{ transitoire},$$

puisque par définition d'un état récurrent, la contraposé montrera le cas récurrent.
Soit $x,y \in C$ avec x transitoire. Alors on peut écrire :

$$P_{xx}^{n+r+m} \geq P_{xy}^n P_{yy}^r P_{yx}^m,$$

où $P_{xy}^n > 0$ et $P_{yx}^m > 0$. De plus,

$$\mathbb{E} N_y = \sum_{r>0} P_{yy}^r \leq \frac{1}{P_{xy}^n P_{yx}^m} \sum_{r>0} P_{xx}^{n+r+m},$$

qui est fini puisque x est transitoire (Proposition 3). En utilisant encore la Proposition 3, y est transitoire.

Définition 7 *Une chaîne de Markov est dite irréductible si E est constitué d'une seule classe d'équivalence. Elle est dite récurrente irréductible si tous ses états sont récurrents.*

Autrement dit, une chaîne est irréductible si tous les états de cette chaîne communiquent. D'après le Théorème 3, pour montrer qu'une chaîne est récurrente irréductible, il suffit de montrer qu'un état est récurrent. SInon, tous les états seront transitoires.

Proposition 4 *Une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état E fini est récurrente irréductible.*

Preuve *Puisque E est fini, il existe au moins un état visité une infinité de fois avec probabilité non nulle. Donc cet état est récurrent d'après la Proposition 3 et la chaîne est réccurente.*

1.4 Chaînes récurrentes irréductibles

On suppose $(X_n)_{n\geq 0}$ récurrente irréductible. On s'intéresse tout d'abord aux excursions successives de la chaîne entre deux retours à l'état x, notées:

$$\epsilon_k = (X_{T_x^k}, X_{T_x^k+1}, \dots, X_{T_x^{k+1}}),$$

où T_x^k est le temps du $k^{\text{ième}}$ passage en x. L'ensemble des valeurs possibles pour les excursions ϵ_k est noté $U = \{u = (x, x_1, \dots, x_n, x), x_l \neq x, 1 \leq l \leq n;\}$. Cet ensemble est dénombrable et on peut s'intéresser à la loi d'une excursion, caractérisé par les quantités :

$$\{\mathbb{P}(\epsilon_k = u), u \in U\}.$$

Proposition 5 *Sous $\mathbb{P}_x$, la suite $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots$ des excursions est i.i.d.*

Preuve *On veut montrer que $\forall\,(u_0, \dots, u_k) \in U^{k+1}$,*

$$\mathbb{P}(\epsilon_0 = u_0,\, \dots, \epsilon_k = u_k) = \Pi_{l=0}^k p_{u_l},$$

où $\{p_{u_l}, l \in \mathbb{N}\}$ loi de ϵ_0 sur U dénombrable.
On remarque que $\{\epsilon_0 = u_0\} \in \mathcal{F}_{T_x}$. De plus,

$$\{\epsilon_1 = u_1, \dots, \epsilon_k = u_k\} = \{X_{T_x+1} = x_1, \dots, X_{T_x+p} = x_p\}.$$

En appliquant la propriété de Markov forte, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\epsilon_0 = u_0, ldots, \epsilon_k = u_k) &= \mathbb{P}_x(\{\epsilon_0 = u_0\} \cap \{X_{T_x+1} = x_1, \dots, X_{T_x+p} = x_p\} | T_x < \infty) \\
&= \mathbb{P}_x(\{\epsilon_0 = u_0\})\mathbb{P}_x(\{X_{T_x+1} = x_1, \dots, X_{T_x+p} = x_p\} | T_x < \infty) \\
&= \mathbb{P}_x(\{\epsilon_0 = u_0\})\mathbb{P}_x(\{X_1 = x_1, \dots, X_p = x_p\} | T_x < \infty) \\
&= \mathbb{P}_x(\{\epsilon_0 = u_0\})\mathbb{P}_x(\{\epsilon_0 = u_1, \dots, \epsilon_{k-1} = u_k\}) \\
&\quad \dots \\
&= \Pi_{l=0}^k p_{u_l}.
\end{aligned}$$

Définition 8 *Soit P une matrice markovienne. On dit que μ mesure sur E est invariante par P si*

$$\mu P = \mu.$$

On voit alors clairement qu'une probabilité μ est invariante par une chaîne de Markov (μ,P) si et seulement si μ est la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P récurrente irréductible. Alors il existe une unique mesure invariante strictement positive à une constante multiplicative près.*

Preuve *existence : Soit γ_y^x le nombre moyen de visites à l'état x lors de ϵ_0 la première excursion entre deux retours à x. Alors :*

$$\begin{aligned}
\gamma_y^x &= \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x} 1\!\!1(X_n = y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = y, n \leq T_x) \\
&= \sum_{z\in E} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n-1} = z, X_n = y, n-1 < T_x) \\
&= \sum_{z\in E} \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n-1} = z, n-1 \leq T_x) P_{zy} \\
&= (\gamma^x P)_y.
\end{aligned}$$

De plus la chaîne étant irréductible, pour tout $y \in E$ il existe n tel que :

$$0 < P_{yx}^n = \gamma_x^x P_{xy}^n \leq (\gamma^x P^n)_y = \gamma_y^x.$$

Ainsi la mesure γ_x est strictement positive.
unicité : Soit λ mesure invariante telle que $\lambda_x = 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
\lambda_y &= \sum_{z\in E} \lambda_z P_{zy} = P_{xy} + \sum_{z_1 \neq x} \lambda_{z_1} P_{z_1 y} \\
&= P_{xy} + \sum_{z_1\neq x} P_{xz_1} P_{z_1 y} + \sum_{z_1\neq x} \sum_{z_2 \neq x} \lambda_{z_2} P_{z_2 z_1} P_{z_1 y} \\
&\geq P_{xy} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z_1, z_n \neq x} P_{xz_n} P_{z_n z_{n-1}} \ldots P_{z_1 y} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_{n+1} = y, T_x \geq n+1) \\
&= \gamma_y^x.
\end{aligned}$$

Alors on a $\mu = \lambda - \gamma^x$ mesure invariante telle que $\mu_x = 0$.
Soit $y \in E$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_{yx}^n > 0$. Alors :

$$0 = \mu_x = \mu P_x^n \geq \mu_y P_y^n x.$$

Ainsi $\mu_y = 0$ et $\lambda = \gamma^x$.

Définition 9 *On dit qu'un état x est récurrent positif si $m_x = \mathbb{E}_x T_x < \infty$. Sinon il est dit récurrent nul.*

Ainsi un état est récurrent positif lorsque le temps d'attente moyen pour un retour en x est fini.

Théorème 5 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible récurrente.*
LASSE :

(i) x est récurrent positif.
(ii) Tous les états sont récurrents positifs.
(iii) Il existe une probabilité invariante.

Dans ce cas, elle est donnée par

$$\pi_x = \frac{1}{m_x}, \forall x \in E.$$

Preuve *(ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii) On est dans le cas récurrent irréductible, alors d'après le Théorème 4, il existe une mesure invariante γ^x. Si $x \in E$ est récurrent positif, alors :*

$$m_x = \mathbb{E}_x T_x = \sum_{z\in E} \gamma_z^x < \infty.$$

Ainsi on obtient $\{\frac{\gamma_y^x}{m_x}, y \in E\}$ probabilité invariante.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) Soit π une probabilité invariante. Alors si on pose $\lambda = \{\lambda_y = \frac{\pi_y}{\pi_x}, y \in E\}$, λ est une mesure invariante qui vérifie $\lambda_x = 1$. Alors d'après le Théorème 4, λ coïncide avec γ^x et on a :

$$m_x = \sum_{z\in E} \gamma_z^x = \sum_{z\in E} \frac{\pi_z}{\pi_x} = \frac{1}{\pi_x}.$$

De plus, π est strictement positive (Théorème 4), ce qui entraîne que x est récurrent positif. Cela étant vrai quel que soit $x \in E$, (ii) a lieu.

Par conséquent, on distingue dans le cas récurrent irréductible, deux cas de figures :

- Le cas récurrent positif : tous les états sont récurrents positifs et il existe une unique probabilité invariante.
- Le cas récurrent nul : tous les états sont récurrents nuls et toutes les mesures invariantes sont de masse infinie.

Il est clair que lorsque $|E| < \infty$, le cas récurrent nul disparaît et tout état $x \in E$ récurrent est récurrent positif.

Dans le cas non irréductible, si on suppose que $|E| < \infty$, il existe au moins une classe d'équivalence récurrente. Dans ce cas il existe une probabilité invariante qui ne charge que les états de cette classe. De la même manière, à toute classe d'équivalence récurrente est associé une unique probabilité invariante. Toutes les probabilités invariantes s'obtiennent par combinaisons linéaires convexes des précédentes. Ainsi dès qu'il y a deux classes récurrentes, il existe une infinité non dénombrable de probabilités invariantes.

Théorème 6 (THÉORÈME ERGODIQUE) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible récurrente positive, de probabilité invariante π. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.*

Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \sum_{x\in E} \pi_x f(x). \tag{1.5}$$

Preuve *Soit $x \in E$. On note*

$$N_x(n) = \sum_{1\le k\le n} \mathbb{1}(X_k = x),$$

le nombre de retour à x jusqu'à l'instant n. Si on note S_x^0, S_x^1, ... les longueurs des excursions ϵ_0, ϵ_1, ..., on obtient :

$$S_x^0 + S_x^1 + \ldots + S_{N_x(n)-1}^0 \le n < S_x^0 + S_x^1 + \ldots + S_{N_x(n)}^0.$$

Donc

$$\frac{S_x^0 + S_x^1 + \ldots + S_{N_x(n)-1}^0}{N_x(n)} \le \frac{n}{N_x(n)} < \frac{S_x^0 + S_x^1 + \ldots + S_{N_x(n)}^0}{N_x(n)}.$$

On sait que sous $\mathbb{P}_x$, ϵ_0, ϵ_1, ... est une suite i.i.d., il en est donc de même pour la suite S_x^0, S_x^1, ... En appliquant la loi des grands nombres :

$$\frac{S_x^0 + S_x^1 + \ldots + S_{N_x(n)}^0}{N_x(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_x - p.s.} \mathbb{E}_x T_x = m_x.$$

Donc par l'encadrement précédent, on obtient

$$\frac{n}{N_x(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_x - p.s.} m_x,$$

ou bien

$$\frac{N_x(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_x - p.s.} \frac{1}{m_x}.$$

D'après la propriété de Markov forte, la limite de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la même que $(X_{T_x+n})_{n\in\mathbb{N}}$. Donc cette limite a lieu $\mathbb{P}_\mu - p.s.$ pour toute loi initiale μ.
Soit $F \subset E$. On note $\bar f = \sum_{x\in E} \pi_x f(x)$, et $c = \sup|f(x)|$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - \bar f\right| &= \left|\sum_{x\in E}\left(\frac{N_x(n)}{n} - \pi_x\right) f(x)\right| \\
&\le c\sum_{x\in F}\left|\frac{N_x(n)}{n} - \pi_x\right| + c\sum_{x\notin F}\left(\frac{N_x(n)}{n} + \pi_x\right) \\
&= c\sum_{x\in F}\left|\frac{N_x(n)}{n} - \pi_x\right| + c\sum_{x\in F}\left(\pi_x - \frac{N_x(n)}{n}\right) + 2c\sum_{x\notin F}\pi_x \\
&\le 2c\sum_{x\in F}\left|\frac{N_x(n)}{n} - \pi_x\right| + 2c\sum_{x\notin F}\pi_x.
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. On choisit F fini tel que $\sum_{x \notin F} \pi_x \leq \frac{\epsilon}{4c}$ et $N(\omega)$ tel que $\forall n \geq N(\omega)$,

$$\sum_{x \in F} \left| \frac{N_x(n)}{n} - \pi_x \right| \leq \frac{\epsilon}{4c}.$$

On obtient le résultat.

Ce théorème est une généralisation de la loi des grands nombres au cas où la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas indépendante. En effet on peut écrire (1.5) comme suit :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \mathbb{E}_\pi f(X),$$

où X est de loi π la probabilité invariante. Une conséquence du théorème ergodique est la suivante : si on munit la chaîne de la loi initiale π, alors la suite est identiquement distribuée et la moyenne empirique converge vers l'espérance.

Dans la section suivante, on va établir un théorème de la limite centrale dans le cas d'une chaîne de Markov irréductible récurrente positive, ayant une propriété supplémentaire.

1.5 Chaîne apériodique

Le théorème ergodique nous assure en particulier que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible récurrente positive, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(X_k = y) \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \pi_y, \forall y \in E.$$

Puisque la convergence p.s. entraîne la convergence en moyenne, on a en particulier que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (P^k)_{xy} \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi_y, \forall x,y \in E.$$

On peut se demander si dans le cas irréductible récurrent positif, on a :

$$(P^n)_{xy} \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi_y, \forall x,y \in E. \tag{1.6}$$

La réponse est non. On peut construire facilement un contrexemple en considérant une chaîne de Markov de matrice de transition P qui vérifie $P^{2k} = I$ et $P^{2k+1} = P$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

De plus, on peut remarquer que pour vérifier (1.6), il faut qu'à partir d'un certain rang, $(P^n)_{xy} > 0$ puisque π est strictement positive.

Définition 10 *Un état $x \in E$ est dit apériodique s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\forall n \geq N, (P^n)_{xx} > 0.$$

On peut remarquer que dans ce cas, si la chaîne est irréductible, on a bien à partir d'un certain rang $(P^n)_{xy} > 0$:

Lemme 3 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P irréductible. Si $x \in E$ est apériodique, alors :*

$$\forall y,z \in E, \exists M : \forall n \geq M, (P^n)_{yz} > 0.$$

En particulier, tous les états sont apériodiques.

Preuve *Il suffit de construire un chemin pour aller de y à z qui passe par x (possible par irréductibilité). On conclut par apériodicité de x.*

Définition 11 *On appelle période d'un état x le PGCD des entiers n vérifiant $(P^n)_{xx} > 0$.*

On peut remarquer que si P est irréductible, tous les états ont la même période. De plus, un état x est apériodique si et seulement si sa période vaut 1.

Théorème 7 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P irréductible récurrente positive apériodique. Soit π la probabilité invariante. Alors :*

$$\mathbb{P}(X_n = y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_y, \forall y \in E.$$

En particulier, (1.6) *a lieu.*

On peut à présent énoncer le théorème de la limite centrale.

Théorème 8 (TLC) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P irréductible récurrente positive et apériodique telle que :*

$$\sum_{y\in E} |(P^n)_{xy} - \pi_y| \leq Mt^n, \forall x \in E, n \in \mathbb{N},$$

pour $M \in \mathbb{R}$ et $t \in]0,1[$, où π est la probabilité invariante.
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que :

$$\sum_{z\in E} \pi_z f(z) = 0 \text{ et } \sum_{z\in E} \pi_z f^2(z) < \infty.$$

Alors, on a :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma_f}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z,$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et

$$\sigma_f^2 = \sum_{x\in E} \pi_x (Qf)_x^2 - \sum_{x\in E} \pi_x (PQf)_x^2 \text{ et } (Qf)_x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x f(X_n).$$

1.6 Chaîne réversible

Dans cette section on s'intéresse, à partir d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aux propriétés de la chaîne retournée $(\hat{X}_n^N)_{0\le n\le N}$. Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, elle est définie par :

$$\hat{X}_n^N = X_{N-n}, 0 \le n \le N.$$

La proposition suivante nous assure que $(\hat{X}_n^N)_{0\le n\le N}$ est bien une chaîne de Markov.

Proposition 6 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov (π,P) avec P irréductible et de probabilité invariante π. Alors $(\hat{X}_n^N)_{0\le n\le N}$ est une chaîne de Markov $(\pi,\hat{P})$ où :*

$$\hat{P}_{xy} = \frac{\pi_y}{\pi_x} P_{yx}. \tag{1.7}$$

Preuve *On utilise la Proposition 1. Ainsi on a bien :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\hat{X}_0^N = x_0,\hat{X}_1^N = x_1 \dots \hat{X}_p^N = x_p) &= \mathbb{P}(X_N = x_0,X_{N-1} = x_1 \dots X_{N-p} = x_p) \\ &= \pi_{x_0}\hat{P}_{x_0x_1} \dots \hat{P}_{x_{p-1}x_p},\end{aligned}$$

avec $\hat{P}$ qui vérifie (1.7).

Définition 12 *On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réversible si $\hat{P} = P$, c'est-à-dire si la relation suivante est vérifiée :*

$$\pi_x P_{xy} = \pi_y P_{yx}, \forall\, x,y \in E. \tag{1.8}$$

Il est clair que si (1.8) a lieu, alors π est une probabilité invariante. Par contre, la réciproque est fausse. En effet, considérons une chaîne irréductible récurrente positive de probabilité invariante π. Alors s'il existe $x,y \in E$ tels que $P_{xy} > 0$ et $P_{yx} = 0$, la relation (1.8) n'est pas vérifiée. Alors P n'est pas réversible par rapport à π.

Considérons à présent les deux problèmes suivants :

1. Etant donnée P matrice markovienne irréductible récurrente positive, trouver π probabilité invariante.
2. Etant donné π probabilité, trouver P matrice markovienne telle que $\pi P = \pi$.

Résoudre 2. est facile et admet beaucoup de solutions. Il suffit de trouver P réversible par rapport à π. Par contre, pour résoudre 1., on peut chercher P réversible par rapport à π. Mais ce n'est pas toujours possible (voir exemple ci-dessus).

Pour vérifier si π est invariante pour P, on peut utiliser l'équivalence suivante.

Proposition 7 *Soit P matrice markovienne irréductible, π probabilité strictement positive et $\hat{P}$ définie par :*

$$\hat{P}_{xy} = \frac{\pi_y}{\pi_x} P_{yx}, \forall x,y \in E.$$

LASSE :

(i) $\forall x \in E$:

$$\sum_{y\in E} \hat{P}_{xy} = 1.$$

(ii) $\hat{P}$ matrice de transition de la chaîne retournée et π probabilité invariante par rapport à P.

Chapitre 2

Processus de Poisson

Un processus de Markov est un processus stochastique possédant la propriété de Markov, c'est-à-dire que la loi du futur est indépendante de celle du passé, conditionnellement au présent. Dans le Chapitre 1, nous avons étudié les processus de Markov en temps discret, à valeurs dans un espace d'états E fini ou dénombrable. A présent on s'intéresse aux processus de Markov en temps continu, toujours à valeurs dans un espace d'états E fini ou dénombrable, qui sont constants entre leurs sauts se produisant à des instants aléatoires. On les appelle processus markoviens de sauts. Le prototype des procesus markoviens de sauts est le processus de Poisson.

2.1 Processus ponctuels et f.a. de comptage

Un processus ponctuel sur $\mathbb{R}^+$ est décrit par une suite croissante de variables aléatoires

$$0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots T_n < T_{n+1} \dots,$$

qui vérifient en outre $T_n \xrightarrow{p.s.} \infty$ lorsque $n \to \infty$. En posant $S_n = T_n - T_{n-1}$, on peut interpréter :

- T_n comme l'instant où se produit le $n^{\text{ième}}$ évènement,
- S_n comme le temps d'attente entre le $(n-1)^{\text{ième}}$ et le $n^{\text{ième}}$ évènement.

Définition 13 *Soit $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ un processus ponctuel. On appelle fonction aléatoire de comptage (notée f.a. de comptage) le processus $\{N_t, t \geq 0\}$ défini par :*

$$N_t = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{T_n \leq t\} = \sum_{j\in\mathbb{N}^*} \mathbb{1}(T_j \leq t).$$

Le processus N_t représente le nombre d'évènements qui se sont produits jusqu'à l'instant t. On a clairement $N_0 = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+, N_t < \infty$ p.s. puisque $T_n \xrightarrow{p.s.} \infty$ lorsque $n \to \infty$. Une trajectoire type d'une f.a. de comptage est donnée par une fonction en escalier. De plus, par définition, cette trajectoire est dite c.a.d.l.a.g. (continue à droite, limite à gauche). Notons enfin que la donnée de $\{N_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ est équivalente à celle de la suite $\{T_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. De plus, on a le lemme suivant :

Lemme 4 *Soit $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ un processus ponctuel de f.a. de comptage $\{N_t, t \geq 0\}$. Alors on a :*

$$\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\};\ \{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}; \{N_s < n \leq N_t\} = \{s < T_n \leq t\}.$$

La preuve est laissée en exercice.

Définition 14 *On dit que le processus ponctuel* $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ *ou sa f.a. de comptage* $\{N_t, t \geq 0\}$ *est un processus de Poisson si les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :*

1. $\forall t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, *la suite de v.a.* $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}, 1 \leq j \leq n\}$ *est indépendante.*
2. $\forall 0 < s < t$, *la loi de* $N_t - N_s$ *ne dépend de* t *et* s *que par la différence* $t - s$.

La propriété 1. est appelée l'indépendance des accroissements et la propriété 2. la stationnarité des accroissements.

Ainsi un processus de Poisson est un processus ponctuel dont les accroissements sont indépendants et stationnaires. Cela entraîne les propriétés suivantes, justifiant l'appelation de processus de Poisson.

Proposition 8 *Soit* $\{N_t, t \geq 0\}$ *un processus de Poisson. Alors il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $\forall 0 \leq s < t$ *:*

$$N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\lambda(t-s)). \tag{2.1}$$

De plus, on a :

$$T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda) \sim T_{N_s+1} - s. \tag{2.2}$$

Preuve *On va montrer que la fonction génératrice de* N_t *est celle d'une loi de Poisson. Pour cela, on remarque que d'après la définition du processus :*

$$f_t(u) = \mathbb{E}[u^{N_t}] = f_{t-s}(u) f_s(u), \forall t > s.$$

Ainsi, on peut montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+$ *:*

$$f_t(u) = (f_1(u))^t.$$

De plus, il est clair que $f_1(u) > 0$. *Alors il existe* $\lambda(u) > 0$ *tel que* $f_1(u) = e^{-\lambda(u)}$ *et ainsi*

$$f_t(u) = e^{-t\lambda(u)}.$$

Etant donné que la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre θ *vaut* $f(u) = e^{-\theta(1-u)}$, *il reste à montrer que*

$$\lambda(u) = \lambda(0)(1-u).$$

Pour cela, on remarque que :

$$\lambda(u) = -\frac{\delta}{\delta t}(f_t(u))_{|0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1 - f_t(u)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \sum_{k \geq 1} (1 - u^k) \mathbb{P}(N_t = k).$$

De plus,

$$0 \leq \frac{1}{t} \sum_{k \geq 2} (1 - u^k) \mathbb{P}(N_t = k) \leq \frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t \geq 2).$$

Si on montre à présent que

$$\frac{1}{t}\mathbb{P}(N_t \geq 2) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0, \tag{2.3}$$

la preuve est terminé en notant que dans ce cas :

$$\lambda(u) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathbb{P}(N_t = 1)(1-u).$$

Reste à prouver (2.3)*. Or :*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{N_{nt} = 0, N_{(n+1)t} \geq 2\} \subset \{T_2 < T_1 + t\}.$$

Ainsi, en remarquant que $\mathbb{P}(N_t = 0) = f_t(0)$*, on a par définition du processus :*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N_{nt} = 0, N_{(n+1)t} \geq 2) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N_{(n+1)t} \geq 2 | N_{nt} = 0)\mathbb{P}(N_{nt} = 0) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N_{(n+1)t} - N_{nt} \geq 2 | N_{nt} = 0) e^{-\lambda(0)nt} \\
&= \mathbb{P}(N_t \geq 2) \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda(0)nt} \\
&= \mathbb{P}(N_t \geq 2) \frac{1}{1 - e^{-\lambda(0)t}} < \mathbb{P}(T_2 < T_1 + t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0.
\end{aligned}$$

Or, pour t *suffisamment petit,*

$$\frac{1}{t\lambda(0)}\mathbb{P}(N_t \geq 2) \leq \frac{1}{1 - e^{-\lambda(0)t}}\mathbb{P}(N_t \geq 2),$$

ce qui conlut la preuve de (2.1)*.*
La preuve de (2.2) *est conséquence immédiate de* (2.1)*. En effet :*

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t},$$

caractérisant la loi exponentielle de paramètre λ*.*
De la même manière, on a :

$$\mathbb{P}(T_{N_s+1} - s > t) = \mathbb{P}(N_{s+t} - N_s = 0) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}.$$

La dernière partie de la proposition assure que si on considère un processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$, la loi du premier saut T_1 est une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Si on fixe $s > 0$, alors la loi de $T_{N_s+1} - s$ est celle de T_1. Or, pour $s > 0$ fixé, T_{N_s+1} représente le premier saut depuis l'instant s. Ainsi, le processus $\{N_t^s = N_{t+s} - N_s, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ. De plus, les accroissements étant indépendants, il est clair que le futur après l'instant s, à savoir $\{N_{t+s}, t \geq 0\}$ ne dépend du passé $\{N_t, 0 \leq t \leq s\}$ que par l'intermédiaire du présent N_s, ou encore *le futur et le passé sont conditionnellement indépendants, sachant le présent.* C'est la propriété de Markov faible.

2.2 Propriété de Markov forte

Nous allons généraliser la remarque ci-dessus à un certain type de temps aléatoire. Pour cela, il faut définir les temps d'arrêt d'un processus de Poisson, comme nous avons défini les temps d'arrêt des chaînes de Markov dans le chapitre précédent.

Tout d'abord on introduit les notations suivantes. Etant donné une famille de variables aléatoires $\{X_i, i \in I\}$ où I est quelconque, on notera $\sigma\{X_i, i \in I\}$ la tribu engendrée par la famille $\{X_i, i \in I\}$. C'est la plus petite famille contenant tous les $\sigma(X_i)$, $i \in I$. On notera ainsi $\mathcal{F}_t^N = \sigma\{N_s, 0 \leq s \leq t\}$ la tribu engendrée par le processus N_t jusqu'à l'instant t. On a alors de manière équivalente :

$$\mathcal{F}_t^N = \sigma\{T_1, T_2, \ldots, T_{N_t}, N_t\}.$$

Définition 15 *Etant donné un processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$, on appelle temps d'arrêt de N_t une variable aléatoire S à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que pour tout $t \geq 0$:*

$$\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t^N.$$

Cela signifie qu'on peut décider si l'évènement $\{S \leq t\}$ a lieu ou non en observant la trajectoire du processus jusqu'à l'instant t.

Exemple 7 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un temps d'arrêt.*

Exemple 8 *Par contre, on peut vérifier que T_{N_s} n'est pas un temps d'arrêt (prendre $t < s$ et réécrire l'évènement $\{T_{N_s} \leq t\}$).*

On peut associer à tout temps d'arrêt S la tribu $\mathcal{F}_S^N$ engendrée par la trajectoire de $\{N_{t\wedge S}, 0 \leq t\}$, c'est-à-dire la trajectoire de N_t arrêtée à S. Elle est définie de manière rigoureuse par :

$$\mathcal{F}_S^N = \{A \in \mathcal{F}_\infty^N; A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t^N, \forall t \geq 0\}.$$

On peut à présent énoncer la propriété de Markov forte.

Proposition 9 *Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ, et S un temps d'arrêt de N_t. conditionnellement à l'évènement $\{S < \infty\}$, le processus $\{N_t^S = N_{S+t} - N_S, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ indépendant de la tribu $\mathcal{F}_S^N$.*

Le résultat est vrai pour S constant. On généralise à S à valeurs dans $(s_j)_{j\geq 1}$ suite croissante puis à tout temps d'arrêt en remarquant que tout temps d'arrêt peut être approché par une suite décroissante de temps d'arrêt de cette forme.

2.3 Théorèmes limites

Si on considère un processus de Poisson d'intensité λ, alors il est clair que d'après la Proposition 8 :

$$\mathbb{E}\left[\frac{N_t}{t}\right] = \lambda \text{ et } \operatorname{var}\left[\frac{N_t}{t}\right] = \frac{\lambda}{t}.$$

Cela entraîne que $\frac{N_t}{t}$ converge en moyenne quadratique vers λ, lorsque $t \to \infty$. On a aussi la loi forte des grands nombres.

Proposition 10 (Loi Forte des Grands Nombres) *Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ. Alors*

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} \lambda.$$

Preuve *On applique la loi des grands nombres à la suite de variables i.i.d. $\{N_i - N_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$ pour montrer que*

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \lambda.$$

En remarquant que :

$$N_t = \frac{N_[t]}{[t]} \times \frac{[t]}{t} + \frac{N_t - N_{[t]}}{t},$$

il suffit alors de montrer que

$$\sup_{n<t<n+1} \frac{N_t - N_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

On a aussi un théorème de la limite centrale.

Proposition 11 (Théorème de la Limite Centrale) *Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ. Alors*

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} Z,$$

où Z est une loi normale centrée réduite.

Preuve *On raisonne comme dans la preuve de la loi des grands nombres. On montre que d'après le théorème de la limite centrale classique :*

$$\frac{N_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z.$$

En remarquant que :

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} = \frac{N_{[t]} - \lambda[t]}{\sqrt{\lambda[t]}} \times \sqrt{\frac{[t]}{t}} + \frac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda t}} \times \sqrt{\frac{[t]}{t}} + \sqrt{\lambda}\frac{[t] - t}{\sqrt{t}},$$

et que $\frac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda t}} \to 0$ en probabilité, on conclut.

Chapitre 3

Processus markoviens de sauts

Dans ce chapitre on s'intéresse aux processus de Markov en temps continu, à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable E. Ces processus généralisent la notion de processus de Poisson au cas où le saut (se produisant à un instant aléatoire) est lui-même aléatoire. En quelque sorte, un processus markovien de saut, ou encore chaîne de Markov en temps continu, combine un processus de Poisson et une chaîne de Markov, appelé la chaîne incluse.

3.1 Définition et premières propriétés

On considère un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ constant entre des sauts aléatoires se produisant à des instants aléatoires. La donnée d'une telle trajectoire (toujours supposée cadlag) X_t est équivalente à celle de la double suite $\{T_n,Z_n, n \geq 0\}$ telle que :
- T_n représente le temps du $n^{\text{ième}}$ saut,
- Z_n représente la valeur prise au temps T_n.

On supposera par la suite que la suite des instants de sauts vérifie :

$$0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \ldots \leq T_n \ldots$$

avec T_n à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et $T_n < T_{n+1}$ si $T_n < \infty$. Cela signifie que l'on n'exclut pas le cas d'un état $x \in E$ absorbant, c'est-à-dire qui vérifie

$$\{X_{T_n} = x\} \subset \{T_{n+1} = +\infty\}.$$

On suppose toujours la non explosion du processus, c'est-à-dire que $T_n \to +\infty$ p.s.

Définition 16 *On appelle fonction aléatoire de sauts de la double suite $\{T_n,Z_n, n \geq 0\}$ la fonction $\{X_t, t \geq 0\}$ définie par :*

$$X_t = \sum_{n \geq 0} Z_n \; \mathbb{1}_{[T_n;T_{n+1}[}(t).$$

On peut aisément vérifier que la fonction aléatoire de saut est la trajectoire décrite précédemment.

Définition 17 *Une fonction aléatoire de saut $\{X_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans E est appelée processus markovien de sauts (ou chaîne de Markov en temps continu) si $\forall 0 < s < t$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_0 < t_1 \ldots t_n < s$, $\forall x_0,x_1,\ldots x_n,x,y \in E$:*

$$\mathbb{P}(X_t = y | X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n, X_s = x) = \mathbb{P}(X_t = y | X_s = x).$$

Cela signifie que la loi de X_t sachant $\{X_u, 0 \leq u \leq s\}$ ne dépend que de X_s. Cela généralise la notion de chaîne de Markov au temps continu.
De plus, si la quantité $\mathbb{P}(X_t = y | X_s = x)$ ne dépend de s et t que par la différence $t - s$, alors le processus markovien de sauts X_t est dit homogène. Par la suite, on n'étudiera que les processus homogènes et on notera

$$P_{xy}(t-s) = \mathbb{P}(X_t = y | X_s = x).$$

Pour $t > 0$, $P(t)$ est une matrice markovienne à valeurs dans $E \times E$. On l'appelle matrice de transition du processus au temps t. Chaque composante $P_{xy}(t)$ représente la probabilité d'aller en y en un temps t, en partant de x.
De la même manière, on notera $\mu(t)$ la loi de probabilité sur E de la variable aléatoire X_t. Dans ce cas $\mu(0)$ est appelée loi initiale du processus $\{X_t, t \geq 0\}$.

Proposition 12 *Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de sauts de loi initiale μ et de matrices de transition $\{P(t), t \geq 0\}$. Alors, $\forall 0 < s < t$:*

(i) $\mu(t) = \mu P(t)$.

(ii) $\mathbb{E}[g(X_t) | X_0 = x] = (P(t)g)_x$.

(iii) L'ensemble des matrices de transition $\{P(t), t \geq 0\}$ vérifie la relation de semi-groupe :

$$P(s+t) = P(s)P(t), \forall s,t > 0.$$

Preuve *(i) D'après la définition du processus markovien, on a clairement une relation équivalente à la Proposition 1 du Chapitre 1 :*

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_{t_1} = x_1, \ldots X_{t_n} = x_n) = \mu_{x_0} P_{x_0 x_1}(t_1) P_{x_1 x_2}(t_2 - t_1) \ldots P_{x_{n-1} x_n}(t_n - t_{n-1}). \tag{3.1}$$

En utilisant cette relation pour $n = 1$, on obtient :

$$\mathbb{P}(X_0 = x, X_t = y) = \mu_x P_{xy}(t).$$

En sommant sur $x \in E$, on obtient :

$$\sum_{x \in E} \mathbb{P}(X_0 = x, X_t = y) = \mu(t)_y = \sum_{x \in E} \mu_x P_{xy}(t) = (\mu P(t))_y.$$

(ii) Par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}[g(X_t | X_0 = x] = \sum_{y \in E} g(y) P_{xy}(t) = (P(t)g)_x.$$

(iii) On applique (3.1) *pour $n = 2$. En posant $t_1 = s$ et $t_2 - t_1 = t$, on obtient :*

$$\mathbb{P}(X_s = x, X_{t+s} = y | X_0 = x_0) = P_{x_0 x}(s) P_{xy}(t)$$

En sommant sur x, on obtient le résultat.

Exemple 9 *Un processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ est un processus markovien de sauts à valeurs dans $\mathbb{N}$, de matrices de transition :*

$$P_{xy}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{y-x}}{(y-x)!}, \textit{si } y \geq x, \\ 0 \textit{ sinon.} \end{cases}$$

Exemple 10 *Etant donné $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ, et X_0 une variable aléatoire à valeur dans $E = \{-1, +1\}$ indépendante de N_t, on pose :*

$$X_t = X_0(-1)^{N_t}.$$

Alors $\{X_t, t \geq 0\}$ est un processus markovien de saut de matrices de transition :

$$P_{11}(t) = P_{-1-1}(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!}$$

et

$$P_{1-1}(t) = P_{-11}(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Exemple 11 *Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov. On peut montrer que*

$$X_t = \sum_{n \geq 0} Z_n \ \mathbb{1}_{[T_n ; T_{n+1}[}(t)$$

est un processus markovien de saut (Exercice 1).

3.2 Générateur infinitésimal

D'après la définition des processus markoviens de sauts, il est clair que la matrice de transition $P(t)$ au temps t est connue pour t quelconque dès qu'elle est connue pour t petit. Cela est confirmé par la propriété de semi-groupe de la Proposition 12. On va voir que l'ensemble des matrices de transition $\{P(t), t \geq 0\}$ sera déterminée par la dérivée à droite de $P(t)$ au temps $t = 0$, appelée générateur infinitésimal.

Théorème 9 *Soit $\{P(t), t \geq 0\}$ le semi-groupe des matrices de transition d'un processus markovien de saut $\{X_t, t \geq 0\}$. Alors il existe $\{Q_{xy}, x, y \in E\}$ appelé générateur infinitésimal du semi-groupe $\{P(t), t \geq 0\}$ qui vérifie :*

(i) $Q_{xy} \geq 0$ *si* $x \neq y$,

(ii) $Q_{xx} = -\sum_{y \neq x} Q_{xy} \leq 0$,

et tel que lorsque $h \to 0$,

(iii) $P_{xy}(h) = hQ_{xy} + \circ(h)$ *si* $x \neq y$,

(iv) $P_{xx}(h) = 1 + hQ_{xx} + \circ(h)$.

Les relations (iii) et (iv) permettent d'interpréter Q_{xy} comme la dérivée par rapport à t de $P_{xy}(t)$ au point $t = 0$. En effet d'après (iii) :

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{xy}(h) - P_{xy}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{P_{xy}(h)}{h} = Q_{xy}.$$

alors que (iv) assure que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{xx}(h) - P_{xx}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{P_{xx}(h) - 1}{h} = Q_{xx},$$

On verra dans la section suivante qu'on peut calculer la dérivée de $P(t)$ pour tout t à l'aide du générateur infinitésimal.

Preuve *Soit $t > 0$. Alors on a :*

$$\{T_1 > nh\} \subset \{X_0 = X_h = \dots X_{nh}\} \subset \{T_1 > nh\} \cup \{T_2 - T_1 \leq h\}.$$

Ainsi lorsque $h \to 0$ tel que $nh \to t$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > t | X_0 = x) &= \lim_{h\to 0, nh\to t} \mathbb{P}(X_0 = X_h = \dots X_{nh} | X_0 = x) \\ &= \lim_{h\to 0, nh\to t} P_{xx}(h)^n \in [0,1]. \end{aligned}$$

On obtient alors, en remarquant que $\log P_{xx}(h) \sim P_{xx}(h) - 1$ pour $h \to 0$, qu'il existe $q_x \in [0, +\infty]$ tel que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(1 - P_{xx}(h)) = q_x,$$

et tel que

$$\mathbb{P}(T_1 > t | X_0 = x) = e^{-q_x t}.$$

En posant $Q_{xx} = -q_x$, on obtient (iv).
De plus, on a :

$$\{T_1 < nh, Z_1 = y\} \subset \bigcup_{m=1}^{n} \{X_0 = X_h = \dots X_{(m-1)h}, X_{mh} = y\} \subset \{T_1 < nh, Z_1 = y\} \cup \{T_2 - T_1 < h\}.$$

Ainsi on obtient de la même manière que précédemment :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 \leq t, Z_1 = y | X_0 = x) &= \lim_{h\to 0, nh\to t} \frac{1 - P_{xx}(h)^n}{1 - P_{xx}(h)} P_{xy}(h) \\ &= \frac{1 - e^{-q_x t}}{q_x} \lim_{h\to 0} \frac{P_{xy}(h)}{h}. \end{aligned}$$

Ainsi, $Q_{xy} = \lim_{h\to 0} \frac{P_{xy}(h)}{h}$ existe pour $y \neq x$ et (iii) et (ii) sont vérifiées.

On peut vérifier le corollaire suivant :

Corollaire 1 *Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de sauts. On note T_1 l'instant du premier suat et Z_1 la valeur prise après le premier saut. Alors on a, conditionnellement à $\{X_0 = x\}$:*

- *T_1 et Z_1 sont indépendantes,*
- *$T_1 \sim \mathcal{E}(q_x)$,*
- *$Z_1 \sim \{\frac{\{Q_{xy}}{q_x}, y \neq x\}$.*

La preuve se déduit aisément de celle du Théorème 12.

3.3 Propriété de Markov forte

Pour énoncer la propriété de Markov forte, on considère un certain type de variables aléatoires appelées temps d'arrêt du processus markovien de sauts $\{X_t,t \geq 0\}$. Cette définition est similaire au chapitre précédent, où l'on a défini un temps d'arrêt d'un processus de Poisson. De la même manière, on peut définir la tribu $\mathcal{F}_S^X$ engendrée par les trajectoires du processusX_t jusqu'à l'instant aléatoire S.

Théorème 10 (Propriété de Markov forte) *Soit S un temps d'arrêt du processus markovien de sauts $\{X_t,t \geq 0\}$. Conditionnellement à $\{S < +\infty\}$ et $\{X_s = x\}$, le processus $\{X_{t+S},t \geq 0\}$ est un processus markovien de sauts indépendant de $\mathcal{F}_S^X$ et sa loi est celle de $\{X_t,t \geq 0\}$ sachant que $X_0 = x$.*

Preuve *On utilise la relation (3.1) pour montrer le résultat pour le temps d'arrêt $S = s$ constant. Le cas général se déduit comme dans la preuve de la propriété de Markov forte des processus de Poisson.*

Théorème 11 *Pour tout $x,y \in E$, la fonction $t \mapsto P_{xy}(t)$ est dérivable et on a :*

$$\frac{d}{dt}P_{xy}(t) = (QP)_{xy}(t).$$

Preuve *Cas $|E| < \infty$*
D'après la relation de semi-groupe de $\{P(t),t \geq 0\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P_{xy}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(P_{xy}(t+h) - P_{xy}(t)\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{z\in E} P_{xz}(h)P_{zy}(t) - P_{xy}(t)\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{P_{xx}(h)-1}{h}P_{xy}(t) + \lim_{h\to 0}\sum_{z\in E,z\neq x}\frac{1}{h}P_{xz}(h)P_{zy}(t) \\
&= Q_{xx}P_{xy}(t) + \sum_{z\in E,z\neq x}\lim_{h\to 0}\frac{P_{xz}(h)}{h}P_{zy}(t) \\
&= Q_{xx}P_{xy}(t) + \sum_{z\in E,z\neq x} Q_{zx}P_{zy}(t) \\
&= (QP)_{xy}(t),
\end{aligned}$$

où on a utilisée l'hypothèse $|E| < \infty$ pour intervertir la limite et la somme.
Le cas $|E| = \infty$ se montre en utilisant la propriété de Markov forte.

3.4 La chaîne incluse

Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de sauts satisfaisant la condition de non-explosion (i.e. $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} +\infty$). Dans cette section, on s'intéresse à la suite $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ définie par

$$Z_n = X_{T_n}, n \in \mathbb{N}.$$

D'après la propriété de Markov forte appliquée au processus (X_t), il est clair que (Z_n) est une chaîne de Markov. Cette chaîne à la particularité que $Z_{n+1} \neq Z_n$ *p.s.*. On peut montrer que sa matrice de transition est donnée par

$$P_{xy} = \begin{cases} \frac{Q_{xy}}{q_x}, \text{si } x \neq y, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

avec la convention $\frac{0}{0} = 0$ pour un état $x \in E$ absorbant puisque dans ce cas, $P_{xy} = 0, \forall y \in E$. Si on pose $S_k = q_{Z_{k-1}}(T_k - T_{k-1})$, alors on peut montrer que le processus ponctuel $\{T'_n, n \geq 0\}$ ou sa fonction aléatoire de comptage $\{N_t, t \geq 0\}$ définis par :

- $T'_n = \sum_{k=1}^n S_k$,
- $N_t = \sup\{n \geq 1 : \sum_{k=1}^n S_k \leq t\}$,

est un processus de Poisson d'intensité 1. On utilise le fait que $\lambda\mathcal{E}(\lambda) \sim \mathcal{E}(1)$ et la propriété de Markov forte de (X_t).

On s'intéresse à présent à la réciproque. On se demande comment, à partir d'un générateur infinitésimal Q construit-on un processus markovien de sauts ? Ce processus satisfait-il la condition de non-explosion ?

Soit Q un générateur infinitésimal de $E \times E$, c'est-à-dire vérifiant :

$$Q_{xy} \geq 0 \forall x \neq y \text{ et } Q_{xx} = -\sum_{y \neq x} Q_{xy}.$$

On construit à partir de Q une chaîne de Markov $\{Z_n, n \geq 0\}$ de matrice de transition

$$P_x y = \begin{cases} \frac{Q_{xy}}{-Q_{xx}} \text{ si } x \neq y, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On pose :

- $S_k = \frac{T_k - T_{k-1}}{q_{Z_{k-1}}}$,
- $T'_n = \sum_{k=1}^n S_k$.

Alors on peut montrer que la f.a. de comptage de la double suite $\{Z_n, T'_n,\}$ définie par

$$X_t = \sum_{k=1}^n Z_n \ \mathbb{1}_{[T'_n, T'_{n+1}[}(t)$$

est un processus markovien de saut de générateur infinitésimal Q. Il reste à répondre à la question suivante : a-t'on nécessairement $T'_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} +\infty$?

Proposition 13 *LASSE :*

(*i*) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{q_{Z_n}} = +\infty$ *p.s.*

(*ii*) $T'_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} +\infty$.

Pour vérifier la condition (i), on utilise souvent le résultat suivant.

Corollaire 2 *Pour que la condition de non-explosion soit satisfaite, il suffit q'une des deux assertions suivantes soit vérifiée :*

(*i*) $\sup_{x \in E} q_x < +\infty$.

(ii) P est récurrente.

On peut montrer (exercice) que ces deux assertions entraînent $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{q_{Z_n}} = +\infty$.
On peut donc, grâce à la chaîne incluse, à partir d'un générateur infinitésimal, définir un processus markovien de sauts et vérifier que la condition de non-explosion est satisfaite assez facilement. On va voir dans la section suivante que la nature d'un processus markovien est reliée à la nature de sa chaîne incluse.

3.5 Classification des états

Dans ce qui suit, on notera, comme dnas le Chapitre 1, $\mathbb{P}_x$ la probabilité conditionnelle au départ de la chaîne en x et $\mathbb{E}_x$ l'espérance conditionnelle associée. Comme dans le cadre des chaînes de Markov en temps discret, on peut définir des états récurrents ou transitoires, et des classes d'équivalences. Pour cela on se ramène à la chaîne incluse.
Les classes d'équivalences d'un processus de Markov $\{X_t, t \geq 0\}$ sont celles de la chaîne incluse. De plus, on peut vérifier que si X_t est irréductible, alors

$$P_{xy}(t) > 0, \forall x,y \in E, \forall t > 0.$$

En effet par l'irréductibilité de la chaîne incluse, $\forall x,y \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = x, \dots x_n = y$ tels que $P_{x_0x_1}P_{x_1x_2}\dots P_{x_{n-1}x_n} > 0$, où P est la patrice de transition de la chaîne incluse. Ainsi on a $Q_{x_0x_1}Q_{x_1x_2}\dots Q_{x_{n-1}x_n} > 0$ et Q étant la dérivée de $P(t)$ en zéro à droite, on a aussi, $\forall t > 0$, $P_{x_0x_1}(\frac{t}{n})P_{x_1x_2}(\frac{t}{n})\dots P_{x_{n-1}x_n}(\frac{t}{n}) > 0$. D'où la conclusion.

Définition 18 *Un état $x \in E$ est dit récurrent (resp. transitoire) pour $\{X_t, t \geq 0\}$ s'il est récurrent (resp. transitoire) pour la chaîne incluse.*

Comme dans le cas discret, on a l'existence d'une unique mesure invariante dans le cas récurrent irréductible.

Théorème 12 *Soit un processus markovien de sauts $\{X_t, t \geq 0\}$ irréductible récurrent, de générateur infinitésimal Q et de semi-groupe de transition $\{P(t), t \geq 0\}$. Alors il existe une unique mesure strictement positive π, à une constante près, qui vérifie $\pi Q = 0$ et qui est invariante pour le semi-groupe $\{P(t), t \geq 0\}$, i.e. qui vérifie $\pi P(t) = \pi, \forall t \geq 0$.*

Preuve *Soit P la matrice de transition de la chaîne incluse (Z_n). P est irréductible récurrente, alors d'après le Chapitre 1 (Théorème 4) il existe une mesure invariante γ^x pour P. De plus on a :*

$$Q = q(P - I),$$

où q est la matrice diagonale définie par

$$q_{xy} = \delta_{xy} q_x.$$

Par irréductibilité, il n'existe pas d'état absorbant et q est inversible. Alors $\pi = \gamma^x q^{-1}$ vérifie $\pi Q = 0$.
Pour l'unicité, si $\pi' Q = 0$, alors $\pi' q$ est invariante par P d'où $\pi' q = c\gamma^x$.
Il reste à montrer que π est invariante par $P(t)$.

On a γ_y^x nombre moyen de visites en y entre deux retours à x et $\frac{1}{q_y}$ temps de séjour moyen en y, d'où par indépendance,

$$\pi_y = \frac{\gamma_y^x}{q_y}$$

représente le temps moyen passé en y entre deux retours à x. On a donc, en notant $R_x = \inf\{t \geq T_1 : X_t = x\}$ et en utilisant la propriété de Markov forte :

$$\begin{aligned}
\pi_y = \mathbb{E}_x \int_0^{R_x} 1\!\!1(X_s = y)ds &= \mathbb{E}_x \int_t^{R_x+t} 1\!\!1(X_s = y)ds \\
&= \mathbb{E}_x \int_0^{R_x} 1\!\!1(X_{s+t} = y)ds \\
&= \int_0^{R_x} \sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_{s+t} = y, X_s = z)ds \\
&= \int_0^{R_x} \sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_s = y)P_{zy}(t)ds \\
&= \sum_{z\in E} \int_0^{R_x} \mathbb{P}_x(X_s = y)dsP_{zy}(t) = (\mu P(t))_y.
\end{aligned}$$

3.6 Cas irréductible récurrent

On se place dans le cas d'un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ irréductible récurrent. On va prouver dans cette section l'existence d'une unique probabilité invariante dans le cas particulier récurrent positif. Pour distinguer entre récurrence nulle et récurrence positive, on ne peut pas regarder seulement les propriétés de la chaîne incluse. On verra qu'il existe des processus markoviens de sauts récurrents nuls dont la chaîne incluse est récurrente positive, et inversement.
Pour définir la récurrence positive ou nulle, on rappelle la notation du temps d'arreṫ R_x qui représente le temps d'attente avant le premier retour à l'état x :

$$R_x = \inf\{t \geq T_1 : X_t = x\}.$$

Définition 19 *On dit q'un état $x \in E$ est récurrent positif (resp. récurrent nul) si x est récurrent et s'il vérifie $\mathbb{E}_x R_x < +\infty$ (resp. $\mathbb{E}_x R_x = +\infty$).*

A nouveau, comme dans le cas discret, si $x \in E$ est récurrent positif, alors tous les états sont récurrents positifs et le processus est dit récurrent positif. Dans ce cas, il existe une unique probabilité invariante.

Théorème 13 *Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de sauts irréductible récurrent. LASSE :*

(i) $x \in E$ est récurrent positif.

(ii) tous les états sont récurrents positifs.

(iii) il existe une unique probabilité invariante π.

Dans ce cas, elle est donnée par

$$\mathbb{E}_x R_x = \frac{1}{\pi_x q_x}, x \in E.$$

Preuve *$(i) \Rightarrow (iii)$ Il suffit de remarquer que*

$$\mathbb{E}_x R_x = \sum_{y \in E} \frac{\gamma_y^x}{q_y}.$$

Alors d'après le théorème précédent, puisque x est récurrent positif, on peut normaliser la mesure invariante pour obtenir une probabilité invariante, unique et strictement positive.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Soit π probabilité invariante. Alors π est strictement positive (théorème précédent) et on a :

$$\mathbb{E}_x R_x = \sum_{y \in E} \frac{\gamma_y^x}{q_y} = \sum_{y \in E} \frac{\pi_y}{q_x \pi_x} = \frac{1}{q_x \pi_x}.$$

On a donc x récurrent positif puisque la chaîne est irréductible et que π est strictement positive. Cela étant vrai pour tout x, (ii) a lieu.

Remarque 3 *Une mesure invariante π pour le processus markovien $\{X_t, t \geq 0\}$ vérifie $\pi Q = 0$. Cela implique que πq est invariante pour P, matrice de transition de la chaîne incluse. Réciproquement, si μ est invariante par P, alors $\mu(P - I) = 0$ et donc $\mu q^{-1} Q = 0$. Ainsi π est invariante pour (X_t) si et seulement si $\mu = \pi q$ est invariante pour la chaîne incluse. Il est alors facile de choisir q la matrice diagonale des temps de séjours en chaque état telle que (X_t) soit récurrente nulle et P récurrente positive, et vice-versa. Il faut pour cela jouer sur les temps de séjours en chaque point.*

Dans le cas d'un processus irréductible récurrent positif, on peut énoncer le théorème ergodique de la manière suivante.

Théorème 14 *Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de sauts irréductible récurrent positif. On note π sa probabilité invariante. Alors, pour $f : E \to \mathbb{R}$ bornée, on a :*

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds \xrightarrow[t \to +\infty]{p.s.} \sum_{x \in E} f(x) \pi_x.$$

Preuve *D'après le Chapitre 1, il suffit de montrer le résultat pour $f(y) = 1\!\!1(y = x)$ en travaillant sous $\mathbb{P}_x$. On note $N_x(t)$ le temps de séjour en x de la chaîne jusqu'à l'instant t, et T_x^k les temps de séjour en x lors de la $k^{\text{ième}}$ visite en x. Ainsi on a :*

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{N_x(t)-1} T_x^k \leq \frac{1}{t} \int_0^t 1\!\!1(X_s = t) ds < \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{N_x(t)} T_x^k.$$

De plus, on a :

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{N_x(t)} T_x^k = \frac{N_x(t)}{t} \frac{1}{N_x(t)} \sum_{k=1}^{N_x(t)} T_x^k \to \pi_x.$$

En effet, la suite de v.a. T_x^k étant i.i.d., d'après la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{N_x(t)} \sum_{k=1}^{N_x(t)} T_x^k \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} \mathbb{E}_x T_x^1 = \frac{1}{q_x}.$$

De plus, en suivant la preuve du cas discret, on a :

$$\sum_{k=0}^{N_x(t)-1} S_x^k \leq t < \sum_{k=0}^{N_x(t)} S_x^k,$$

où S_x^k suite i.i.d. des temps des excursions entre deux retours à l'état x. En appliquant la loi des grands nombres, on a de la même manière :

$$\frac{t}{N_x(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} \mathbb{E}_x R_x = \frac{1}{\pi_x q_x}.$$

Dans le cas continu, la convergence en loi de X_t vers la probabilité invariante lorsque $t \to +\infty$ est vrai dans le cas irréductible récurrent positif, sans hypothèse supplémentaire.

Proposition 14 *Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de sauts irréductible récurrent positif. On note π sa probabilité invariante. Alors, pour toute probabilité μ sur E, on a, $\forall x \in E$:*

$$(\mu P(t))_x \to \pi_x.$$

Chaînes de Markov
TD

Echauffement

1. Représenter les chaînes de Markov de matrices de transition

$$R=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix} ;\ Q=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} ;\ P=\begin{pmatrix}0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0\\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice de transition du modèle d'Ehrenfest (Exemple 2 du cours).

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ de matrice de transition donnée par

$$P=\begin{pmatrix}. & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0\\ 1/4 & . & 0 & 0 & 1/5 & 2/5\\ 0 & 0 & . & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2/3 & . & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & .\end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les termes diagonaux de P.
2. Montrer que E est constitué de trois classes d'équivalence que l'on précisera, l'une T étant transitoire, et les deux autres R_1 et R_2 récurrentes.
3. Déterminer une probabilité invariante admettant R_1 comme support, et une probabilité invariante admettant R_2 comme support. En déduire toutes les probabilités invariantes.

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{1,2,3,4,5\}$ de matrice de transition donnée par

$$P=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

Déterminer les classes d'équivalences, les états transitoires et récurrents, et les mesures invariantes de (X_n).

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E. Soit $x \in E$. On note $N_x = \{n \in \mathbb{N} : (P^n)_{xx} > 0\}$.

1. Montrer que si N_x contient deux entiers successifs, alors le PGCD des éléments de N_x est égal à 1.
2. Montrer que si n, $n + 1 \in N_x$, alors $\{n^2, n^2 + 1, n^2 + 2, \ldots\} \subset N_x$.
3. Montrer que si le PGCD des éléments de N_x est 1, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{n, n+1\} \subset N_x$.
4. Conclure sur l'équivalence des deux définitions de l'apériodicité d'un état x.

Exercice 4 [Preuve du théorème ergodique] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible récurrente positive à valeurs dans E, de probabilité invariante π. On considère $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On veut déterminer la convergence suivante :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \sum_{x\in E} \pi_x f(x).$$

1. Soit $x \in E$. On note $N_x(n) = \sum_{1\le k\le n} \mathbb{1}(X_k = x)$.
   (a) Déterminer $Y_0, Y_1 \ldots Y_{N_x(n)}$ i.i.d. telle que

   $$Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_{N_x(n)-1} \le n < Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_{N_x(n)}.$$

   (b) En déduire que

   $$\frac{n}{N_x(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_x - p.s.} m_x = \mathbb{E}_x T_x,$$

   et que cette convergence a lieu $\mathbb{P}_\mu - p.s.$, pour toute loi initiale μ.
2. Soit $F \subset E$. On note $\bar{f} = \sum_{x\in E} \pi_x f(x)$.
   (a) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

   $$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - \bar{f}\right| \le 2c\sum_{x\in F}\left|\frac{N_x(n)}{n} - \pi_x\right| + 2c\sum_{x\notin F}\pi_x.$$

   (b) En choisissant F fini tel que $\sum_{x\notin F}\pi_x \le \frac{\epsilon}{4c}$ et en utilisant la partie 1., conclure.

Exercice 5 [Statistiques des chaînes de Markov] Le but de cet exercice est d'estimer la loi initiale μ et la matrice de transition P d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir des observations $X_0, X_1, \ldots X_n$. Pour cela on se place dans le cas irréductible récurrent positif et on suppose que μ coïncide avec la probabilité invariante.

1. Soit $x \in E$. Proposer un estimateur consistant pour μ_x.
2. Soit $x, y \in E$.On considère l'estimateur

   $$\hat{P}_{xy} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}(X_i = x, X_{i+1} = y)}{\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}(X_i = x)}.$$

   Montrer que $\hat{P}_{xy}$ est un estimateur consistant de P_{xy} (on appliquera le théorème ergodique à la chaîne $\tilde{X}_n = (X_n, X_{n+1})$).

Exercice 6 [File d'attente] On considère une file d'attente à un guichet, modéliser de la manière suivante. A chaque instant $n \in \mathbb{N}$, il arrive un client avec probabilité p $(0 < p < 1)$, et aucun client avec probabilité $1 - p$. Lorsqu'il y a au moins un client dans la file, à chaque instant un client est servi et quitte la file avec probabilité q $(0 < q < 1)$, alors que personne ne quitte la file avec probabilité $1 - q$ (un client qui arrive à l'instant n repart au plus tôt à l'instant $n + 1$). On suppose l'indépendance de tous ces phénomènes aléatoires. On note X_n le nombre de clients dans la file à l'instant n.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer qu'elle est irréductible et préciser sa matrice de transition.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que la chaîne (X_n) possède une probabilité invariante. On supposera dans toute la suite que cette condition est satisfaite et on notera π l'unique probabilité invariante que l'on déterminera.
3. Calculer $\mathbb{E}_\pi(X_n)$.
4. On précise maintenant que les clients sont servis dans l'ordre de leur arrivée. On désigne par T le temps d'attente d'un client que l'on introduit à un instant arbitraire. Si on suppose que la loi initiale du système est π, quelle est l'espérance de T ?

Chaînes de Markov - Processus de Poisson
Devoir Maison

Problème :Base de données

Supposons qu'une mémoire d'ordinateur possède n données $1,2\dots n$. Cette mémoire reçoit des requêtes successives, qui consistent en une des données. Plus la donnée requise est proche de la tête de liste, plus l'accès à la requête est rapide, plus elle se situe en queue de liste, plus l'accès prend du temps. On suppose que les requêtes successives sont des variables aléatoires i.i.d.. Si la loi commune des requêtes était connue, on aurait intérêt à ranger par ordre décroissant de probabilité d'être requis. Bien entendu, cette probabilité $p = (p_1,p_2,\dots,p_n)$ est inconnue. On suppose que $p_k > 0$, $k \in \{1,\dots n\}$.

Le but est de choisir une façon de replacer la donnée après consultation, de telle sorte qu'à long terme, le rang moyen des données requises soit le plus petit possible.

On va considérer deux méthodes différentes. La première consiste à replacer en tête de liste la donnée qui vient d'être requise. La seconde consiste à faire progresser celle-ci d'un rang en la replaçant dans la mémoire. Dans chacun des deux cas, on a une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans E l'ensemble de toutes les permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. On notera Q la matrice de transition de la première chaîne de Markov et π sa mesure invariant associée, et P la matrice de transition issue de la deuxième méthode de mesure invariante μ.
A la chaîne de matrice Q on associe

$$J_Q = \sum_{k=1}^{n} \pi(\text{position de k})p_k,$$

où π(position de k) est l'espérance sous π de la position de l'élément k.
A la chaîne de matrice P on associe

$$J_P = \sum_{k=1}^{n} \mu(\text{position de k})p_k.$$

On peut alors vérifier que les quantités J_Q et J_P permettent de comparer la qualité des deux méthodes de replacement. On se propose de montrer que $J_P < J_Q$, ce qui implique que la deuxième méthode est meilleure que la première.

Partie 1

1. Montrer que la chaîne de matrice Q n'est pas réversible.
2. Montrer que la matrice de transition P vérifie
$$P_{kl} > 0 \Leftrightarrow P_{lk} > 0, \forall k,l \in \mathbb{N}.$$
3. Montrer que la matrice de transition P vérifie, quelquesoit $k,k_1,k_2,\dots k_m,k$:
$$P_{kk_1}\Pi_{i=2}^{m}P_{k_{i-1}k_i}P_{k_m k} = P_{kk_m}\Pi_{i=m-1}^{1}P_{k_{i+1}k_i}P_{k_1 k}.$$
4. En déduire que P est réversible.

Partie 2

A toute permutation $(i_1,\dots,i_n)$ de $(1,\dots,n)$ on associe les quantités

$$I_{kl} = \mathbb{1}_{\{i_l < i_k\}},$$

où $\mathbb{1}_{\{A\}} = 1$ si A a lieu et 0 sinon. Ainsi $I_{kl} = 1$ si l précède k et 0 sinon.

1. En remarquant que $i_k = 1 + \sum_{l \neq k} I_{kl}$, montrer que

$$J_Q = 1 + \sum_{k<l} (p_k - p_l)\pi(l \text{ précède } k) + \sum_{k<l} p_l.$$

2. Montrer que

$$\pi(l \text{ précède } k) = \frac{p_l}{p_l + p_k}.$$

3. En utilisant la réversibilité de la chaîne de matrice P, montrer que

$$\mu(l \text{ précède } k) > \frac{p_l}{p_l + p_k}.$$

Conclure.

Travaux Pratiques : Processus de Poisson

Dans ce TP, on utilisera le logiciel Scilab pour répondre aux questions. Le but est de générer de plusieurs façons un processus de Poisson et d'utiliser les théorèmes limites présentés en cours pour estimer son intensité. La dernière partie détaille la marche à suivre pour m'envoyer vos résultats.

PARTIE 1 : SIMULATION D'UN PROCESSUS DE POISSON

Proposition 1 *Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ la f.a. de comptage d'un processus de Poisson. Sachant $N_t = k$ (avec $k \geq 1$), la suite $T_1, T_2, \ldots T_k$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur l'intervalle* $[0,t]$.

1. Ecrire une fonction "poisson" qui simule et affiche la f.a. de comptage $\{N_t, t \geq 0\}$ d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$ jusqu'au $20^{\text{ième}}$ saut.
2. Ecrire deux fonctions qui simulent une trajectoire d'un processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ d'intensité $\lambda = 1$ jusqu'à l'instant $t = 20$:
   - avec une boucle *while* (fonction "methode1"),
   - avec la proposition ci-dessus (fonction "methode2").
3. Comparer les deux méthodes en générant 1000 trajectoires avec chacune d'entre elle (utiliser la fonction *timer()*).

PARTIE 2 : COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

On a établit en cours les deux résultats suivants :

- Loi des Grands Nombres :

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} \lambda.$$

- Théorème de la Limite Centrale :

$$\sqrt{\frac{t}{\lambda}}\left(\frac{N_t}{t} - \lambda\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} N(0,1).$$

1. Ecrire une fonction "poissonrandom" qui tire au hasard (loi uniforme sur $[0,10]$) une intensité λ et qui génère une trajectoire d'un processus de Poisson d'intensité λ.
2. En déduire une estimation de λ (utiliser la LGN avec $n = 1000$).
3. Proposer un intervalle de confiance asymptotique pour λ au niveau de confiance 95% (utiliser le TLC).

PARTIE 3 : SAUVEGARDE DES RÉSULTATS

*Sauvegarder dans un fichier "simulation.jpg" la trajectoire d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$ généré avec la fonction *methode2*.

*Sauvegarder les réponses aux questions 1.3, 2.2 et 2.3 dans un fichier "resultat.txt". Expliquer la construction de l'estimateur (2.2) et de l'intervalle de confiance (2.3).

*Sauvegarder l'ensemble de votre code scilab dans un fichier "code.sce". Soigner la présentation du code et ajouter des commentaires.

*Envoyer les 3 fichiers ainsi créés par mail (objet du mail : "TL : nom du groupe") à l'adresse suivante : loustau@cmi.univ-mrs.fr , avant le 27/01, minuit.

Processus markoviens de sauts
TD

Exercice 1 Soit $\{T_n,n \in \mathbb{N}\}$ un processus ponctuel de Poisson d'intensité λ, et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov indépendante de $\{T_n,n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans E, de matrice de transition P. On pose

$$X_t = \sum_{n\geq 0} Z_n \ \mathbb{1}_{[T_n;T_{n+1}[}(t), t \geq 0.$$

1. Montrer que $\{X_t, t \geq 0\}$ est un processus markovien de sauts.
2. Déterminer ses matrices de transition et le générateur infinitésimal associé.
3. Déterminer la loi de l'instant du premier saut.

Exercice 2 Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de sauts à valeurs dans E de semi-groupe de transition $\{P(t), t \geq 0\}$ et de générateur infinitésimal Q. Montrer que dans le cas $|E| < \infty$,

$$\frac{\delta}{\delta t} P(t) = QP(t),$$

et de la même manière

$$\frac{\delta}{\delta t} P(t) = P(t)Q.$$

On les appelle équations de Kolmogorov.

Exercice 3 Soit P la matrice markovienne définie par

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{pmatrix}.$$

On considère le générateur infinitésimal $Q = P - I$ du processus markovien de saut $\{X_t,t \geq 0\}$.

1. Déterminer la matrice P' de transition de la chaîne incluse.
2. Décrire les trajectoires du processus $\{X_t,t \geq 0\}$, en précisant pour chaque état les paramètres des lois exponentielles des temps de séjour.
3. Montrer que (X_t) est irréductible, récurrente positive. Déterminer sa probabilité invariante.
4. Déterminer la probabilité invariante de la chaîne incluse.

Exercice 4 Soit $0 < p,\ q < 1$ tels que $p + q = 1$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \mathbb{N}$ de matrice de transition

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & ... \\ q & 0 & p & 0 & ... \\ 0 & q & 0 & p & ... \\ 0 & 0 & q & 0 & p.. \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ le processus markovien de sauts à valeur dans $E = \mathbb{N}$ de générateur infinitésimal

$$\mathrm{Q}=\begin{pmatrix} -p & p & 0 & 0 & ... \\ q & -1 & p & 0 & ... \\ 0 & q & -1 & p & ... \\ 0 & 0 & q & -1 & p.. \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1. La chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle la chaîne incluse du processus (X_t) ?
2. Montrer que les deux processus sont irréductibles.
3. Montrer que toute mesure invariante de (X_n) est une mesure invariante de (X_t) et vice-versa.
4. Montrer que les deux chaînes sont transitoires lorsque $p > q$ (comparer à la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, qui est transitoire pour $p = q$).
5. Montrer que les deux chaînes sont récurrentes dans le cas $p = q$. Déterminer dans ce cas une mesure invariante de masse infinie, et en déduire que le processus est récurrent nul.
6. On se place maintenant dans le cas $p < q$. On pose $\lambda = p/q$. En remarquant que $q^{-1}(\lambda - p) = \lambda^2$, montrer qu'il existe une probabilité géométrique (i.e. de la forme $(\pi_k = \alpha^k(1-\alpha), k \in \mathbb{N})$ invariante pour les deux chaînes.
7. On modifie le générateur Q en multipliant p et q par une constante $c > 0$. Montrer que ni la nature de la chaîne (récurrente nulle, récurrente positive, transitoire), ni l'éventuelle mesure invariante n'est modifiée. Qu'est-ce qui est modifié dans le processus ?
8. On se place dans le cas $p < q$. On considère le processus markovien de sauts $\{Y_t, t \geq 0\}$ de générateur infinitésimal Q' défini par

   $$\mathrm{Q}=\begin{pmatrix} -p & p & 0 & 0 & ... \\ \lambda q & -\lambda & \lambda p & 0 & ... \\ 0 & \lambda^2 q & -\lambda^2 & \lambda^2 p & ... \\ 0 & 0 & \lambda^3 q & -\lambda^3 & \lambda^3 p.. \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

   où $\lambda = \frac{p}{q}$.
   Comparer les chaînes incluses de $\{X_t, t \geq 0\}$ et $\{Y_t, t \geq 0\}$. Vérifier que $\{\pi_x = 1, x \in \mathbb{N}\}$ est mesure invariante, et en déduire que $\{Y_t, t \geq 0\}$ est récurrente nulle. Expliquer pourquoi (Y_t) met en moyenne plus de temps que (X_t) pour revenir à x, en partant de x.

TP DE CLÔTURE : MODÉLISATION DE FILES D'ATTENTE.

1 Introduction

Les files d'attente apparaissent naturellement dans beaucoup de situations de la vie courante : un guichet desservant des usagers, une piste d'aéroport sur laquelle des avions attérissent, un serveur informatique répondant à des requêtes. Les clients arrvient à des temps aléatoires et attendent leur tour devant le(s) guichet(s). Le serveur met un temps aléatoire pour servir chaque client. Enfin la file a une certaine capacité d'accueil éventuellement limitée. Une file d'attente est donc déterminée par les quatres paramètres suivants : A/B/s/K où

- A indique la loi des temps inter-arrivées des clients,
- B indique la loi des temps de services,
- s indique le nombre de serveurs,
- K indique la capacité de la salle d'attente ($+\infty$ si il n'y a pas de précisions).

L'objet de ce TP est d'étudier les files sans M/M/1 et M/M/s, où M représente la loi exponentielle (ou sans mémoire, Memoryless en anglais).

2 File M/M/1 : Définition et premières propriétés

Une file d'attente M/M/1 est défnie par le processus stochastique suivant. On suppose que les instants d'arrivées des clients sont distribués selon un processus de Poisson d'intensité λ et que les temps de service sont indépendants (et indépendants du processus d'arrivée) et suivent la loi exponentielle de paramètre μ. On note $\{X_t, t \geq 0\}$ le processus qui compte le nombre de personnes dans la file. On peut montrer que (X_t) est un processus markovien de sauts à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pourra calculer par la suite son générateur infinitésimal.
On note $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $T_0 = 0$) la suite des sauts et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov incluse par le processus (X_t).

1. On se donne $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$. Montrer que $V = \min(X,Y) \sim \mathcal{E}(\lambda+\mu)$, $W = \mathbb{1}(V = X) \sim B(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})$. On peut montrer aussi que W et V sont indépendantes.
2. En déduire les affirmations suivantes :
   - $Z_n = 0 \Rightarrow S_n = T_{n+1} - T_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
   - Si $Z_n > 0$, $S_n \sim \mathcal{E}(\lambda+\mu)$ et $Z_{n+1} = Z_n + Y_n$, où Y_n est à valeurs dans $\{-1, +1\}$ telle que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

   De plus, il est clair que (Z_n) et (S_n) sont indépendantes.
3. En déduire une façon de représenter (X_t) à partir de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a. indépendantes de lois respectives uniforme sur [0,1] et exponentielle de paramètre 1.
4. Ecrire une fonction *mm1* qui permet de simuler une trajectoire de la file d'attente M/M/1 prenant comme paramètre λ, μ et t l'instant final, et qui donne la matrice des temps de saut et des positions.
   NB : Une v.a. exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ est générée à l'aide de la fonction grand(1,1,"exp",1/λ).
5. Remarquez que (X_t) semble avoir trois comportement différents selon que $\lambda < \mu$, $\lambda = \mu$ ou $\lambda > \mu$.

3 Cas transient

On suppose ici que $\lambda > \mu$.

1. Déterminer grâce aux simulations l'expression de la limite $a(\lambda,\mu)$ de $\frac{X_t}{t}$ quand $t \to +\infty$. Ecrire une fonction *limit* qui prend en paramètres λ, μ et t et trace la trajectoire de $t \mapsto \frac{X_t}{t}$.
2. Ecrire une fonction *quasigauss* qui illustre le fait que, pour t grand, la loi de $Y_t = \sqrt{t}(\frac{X_t}{t} - a(\lambda,\mu))$ est quasiment gaussienne.
   NB : Pour cela il faudra simuler un grand nombre de variables Y_t et comparer l'histogramme de l'échantillon à celui d'une loi Normale.
3. Peut-on grâce aux simulations se faire une idée de l'expression de la variance asymptotique $\sigma^2(\lambda,\mu)$ en fonction de λ et μ?

4 Cas récurrent positif

On se place à présent dans le cas où $\lambda < \mu$. On sait que dans ce cas le processus (X_t) admet pour mesure invariante la probabilité π définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

De plus, d'après le cours, la loi de (X_t) converge vers π. On veut illustrer cette convergence grâce aux simulations.
Ecrire une fonction *repart* qui prend en paramètres λ, μ, t et un entier p, qui génère p réalisations indépendantes de X_t puis compare la fonction de répartition empirique de cet échantillon à celle de la mesure π.
Rappel : la fonction de répartition empirique de l'échantillon $(X_1, \ldots X_n)$ est définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_i \leq x).$$

5 Files M/M/s

On considère à présent la file d'attente M/M/s où les instants d'arrivée sont toujours poissoniens, les temps de services exponentiels mais il y a s guichets ou "serveurs" disponibles. Les temps de services aux guichets sont bien sûr mutuellement indépendants. On note $\{X_t, t \geq 0\}$ le processus qui compte le nombre de personnes dans le système. On peut montrer que (X_t) est un processus markovien de sauts à valeurs dans $\mathbb{N}$ de générateur infinitésimal donnée par les relations suivantes :
pour la première ligne :

$$Q_{01} = \lambda, Q_{0x} = 0, x > 1,$$

pour $1 \leq x \leq s$:

$$Q_{x,x+1} = \lambda, Q_{x,x-1} = x\mu, Q_{x,y} = 0, |x-y| > 1,$$

et enfin :

$$Q_{x,x+1} = -\lambda, Q_{x,x-1} = s\mu, Q_{x,y} = 0, |x-y| > 1.$$

Comme précédemment, on note $S_n = T_{n+1} - T_n$.

1. En remarquant que $\min(S_1, \ldots, S_x) \sim \mathcal{E}(\mu x)$, en déduire comme dans le cas $s = 1$ la loi de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de Z_n, ainsi que l'expression de Z_{n+1} en fonction de Z_n.
2. En déduire une façon de représenter (X_t) à partir de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a. indépendantes de lois respectives uniforme sur [0,1] et exponentielle de paramètre 1.

3. Ecrire une fonction *mm1s* qui permet de simuler une trajectoire de la file d'attente M/M/1/s prenant comme paramètre λ, μ, s et t l'instant final, et qui donne la matrice des temps de saut et des positions.
4. Remarquez que (X_t) semble avoir trois comportements différents selon que $\lambda < \mu s$, $\lambda = \mu s$ ou $\lambda > \mu s$.
5. Dans le cas récurrent positif, on peut calculer la probabilité invariante π donnée par :

$$\frac{\pi_k}{\pi_0} = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \text{ si } 0 \leq k \leq s$$

et

$$\frac{\pi_k}{\pi_0} = \frac{(\lambda/\mu)^k}{s^{k-s}s!} \text{ si } k > s.$$

Les deux cas qui conduisent à une formule simple sont les cas $s = 1$ (déjà traité, loi géométrique), et $s = +\infty$, auquel cas π est la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{\mu}$. On veut illustrer cela grâce aux simulations.
Ecrire une fonction *poisson* qui prend en paramètres λ, μ, t et un entier p, qui génère p réalisations indépendantes de X_t pout t grand, puis compare la fonction de répartition empirique de cet échantillon à celle de la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{\mu}$.

6 Processus de départ des usagers

On s'intéresse au processus qui compte le nombre de personnes qui sont sorties du système.

Théorème 1 (Burke) *Si $\lambda < \mu s$, à l'équilibre le processus des départs est un processus de Poisson d'intensité λ.*

La preuve utilise le fait que la probabilité invariante du processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est solution de l'équation d'équilibre ponctuel :

$$\pi_x Q_{x,x+1} = \pi_{x+1} Q_{x+1,x}.$$

Autrement dit, le générateur infinitésimal Q est réversible par rapport à π. Ainsi, si on munit (X_t) de la loi initiale π, la chaîne est réversible et $\{X_{T-t}, 0 \leq t \leq T\}$ a même loi que $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$. Ainsi les départs de (X_t) sont les arrivées de (X_{T-t}) : un processus de Poisson d'intensité λ !

1. Ecrire une fonction *depart* qui génère une file d'attente M/M/1 et trace la trajectoire du processus des départs. Cela confirme-t'il le Théorème de Burke ?
2. Vérifier le Théorème de Burke dans le cas $s > 1$.

Processus markoviens de sauts
Examen (*2 heures*)

Exercice 1 (4 points)

On considère un processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ d'intensité λ. Le but de cet exercice est de montrer de manière intuitive que la loi des accroissements est une loi de Poisson.

1. D'après le cours, on sait que pour $h \to 0$, on a :
   - $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - \lambda h + \circ(h)$,
   - $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + \circ(h)$,
   - $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2) = \circ(h)$,

   où on rappelle que $\frac{\circ(h)}{h} \to 0$ lorsque $h \to 0$.
   Montrer que pour h petit, $N_{t+h} - N_t$ suit approximativement une loi de Bernoulli dont vous préciserez le paramètre.
2. En déduire que pour $s > 0$, $N_{t+s} - N_t$ suit approximativement une loi Binomiale dont vous préciserez les paramètres.
3. Conclure en utilisant le résultat suivant : la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est la limite d'une suite de variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où Y_n sont des lois binomiales $\mathcal{B}(n,\frac{\lambda}{n})$.

Exercice 2 (10 points)

On considère la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$X_0 = x_0 \in \mathbb{N} \text{ et } X_{n+1} = \begin{cases} (X_n + Y_{n+1})_+, \text{ si } V_{n+1} = 1; \\ 0 \text{ si } V_{n+1} = 0, \end{cases}$$

où $(x)_+ = x$ si $x \geq 0$ et $(x)_+ = 0$ si $x < 0$ et la suite $(Y_1,V_1,Y_2,V_2,\ldots)$ est une suite de v.a. indépendante vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(V_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(V_n = 0),$$

avec $p > 0$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Calculer sa matrice de transition P et montrer qu'elle est irréductible.
2. Soit T le temps du premier retour en 0, partant de 0. Majorer $\mathbb{P}(T > k)$ et en déduire que l'état 0 est récurrent positif. Conclure pour la nature de la chaîne (X_n).
3. Montrer que si α est la solution de l'équation $p(1 - \alpha^2) = 2\alpha$ située dans l'intervalle $]0,1[$, alors la probabilité géométrique π donnée par $\pi_x = \alpha^x(1 - \alpha)$, $x \in \mathbb{N}$ est l'unique probabilité invariante de (X_n).
4. On considère maintenant un processus markovien de sauts $\{X_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, de générateur infinitésimal

$$Q=\begin{pmatrix} -p/2 & p/2 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1-p/2 & -1 & p/2 & 0 & 0 & \ldots \\ 1-p & p/2 & -1 & p/2 & 0 & \ldots \\ 1-p & 0 & p/2 & -1 & p/2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

   Préciser la matrice de transition de sa chaîne incluse. Comparer avec la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Montrer que $\{X_t, t \geq 0\}$ est irréductible récurrent. Montrer que π définie à la question 3. est invariante pour X_t. En déduire que $\{X_t, t \geq 0\}$ est récurrent positif.

Exercice 3 (6 points)

On va étudier la fonction Scilab suivante :

```
function A=mms(l,m,s,t)
N=[0];
T=[0];
D=[0];
cpt=0;
alpha=0;
while (T($)<t)
b=1/(l+m*alpha*(N($)>0));
T=[T T($)+grand(1,1,"exp",b)];
if (rand(1,1)<l*b)
N=[N N($)+1];
alpha=alpha+1*(alpha<s);
else
N=[N N($)-1];
alpha=alpha-1*(N($)<s);
D=[D T($)];
cpt=cpt+1;
end;
end;
T($)=[];
N($)=[];
xbasc();
y=1:cpt;
xbasc();
plot2d2([D t],[0,y,y($)],3);
A=[T;N]; endfunction;
```

1. Que représentent les variables *alpha* et *cpt* dans la boucle *while* ?
2. Que retourne la fonction *mms* ?
3. Que trace la fonction *mms* ?
4. Dessiner une réalisation de fenêtre graphique lorsqu'on effectue la commande suivante : –>mms(2,3,1,100).