TD : ENSEMBLES DE NOMBRES

Exercice 1

On considère 2 nombres $\frac{28}{55}$ et $\frac{39}{75}$.

a. Sont-ils des nombres décimaux ?

b. Comparer ces nombres.

c. Trouver un nombre décimal strictement compris entre ces 2 nombres.

d. Trouver une fraction, qui ne soit pas un décimal, strictement comprise entre ces 2 nombres.

Exercice 2

1. Trouver une fraction appartenant et n'appartenant pas à $\mathbf{D}$ et un irrationnel qui s'intercalent entre $\frac{15}{21}$ et $\frac{16}{21}$.
2. Trouver une fraction et un irrationnel qui s'intercalent entre $\frac{9}{7}$ et $\frac{19}{13}$.

Exercice 3

Les nombres suivants sont-ils décimaux ? $\frac{35}{56}$ $\frac{183}{27}$ $\frac{47}{163}$ $\frac{1805}{31}$ $\frac{324}{144}$

Exercice 4

Soit un entier n non nul. Le nombre $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ est-il décimal ?

Exercice 5

Trouver les décimaux s'écrivant $\frac{a}{b}$ avec $ab = 780$.

Exercice 6

Déterminer les nombres rationnels dont le développement décimal illimité est :
0,15212.....12... 12,24444...4.... 0,7464...46...

Exercice 7

Déterminer tous les nombres décimaux dont l'inverse est également décimal.

Exercice 8

Les égyptiens utilisaient les fractions de la forme $\frac{1}{b}$ et les sommes de telles fractions.

1. Montrer que les égyptiens pouvaient définir tout nombre rationnels avec leurs fractions unitaires.

On admettra le théorème suivant :
Soit un rationnel x, 0<x<1. Il existe alors un entier p et p entiers $n_1 < \ldots < n_p$ tel que :

$$x = \frac{1}{n_1} + \ldots + \frac{1}{n_p}$$

2. Montrer que cette décomposition n'est pas unique (prendre $x = \frac{1}{2}$).
3. Décomposer $\frac{5}{17}$ $\frac{56}{107}$
4.

Exercice 9

Soit un rationnel non décimal $\frac{a}{b}$. On veut déterminer les entiers N et p tels que la partie décimale périodique de $\frac{a}{b}$ soit de longueur p et commence à partir de la N+1 ième décimale.

On écrira $b=2^{\alpha}\ 5^{\beta}\ q$, q non multiple de 2 ou de 5.

1. Montrer que b doit diviser $10^{N}\left(10^{p}-1\right)$.
2. En déduire que N=max(α,β).
3. En déduire que p est le plus petit entier tel que $10^{p}\ \equiv\ 1\ (q)$.
4. Qu'en déduit-on si b premier avec 10?
5. a détermine-t-il N et p?

Exercice 10

1. Calculer le développement décimal illimité de $\frac{1}{7}\ \frac{2}{7}\ \cdots\ \frac{6}{7}$.
2. Expliquer le résultat obtenu.
3. En déduire le développement décimal de toute fraction $\frac{a}{7}$, par exemple $\frac{8}{7}$ et $\frac{55}{7}$.
4. Expliquer pourquoi il y a un décalage de 1 rang entre $\frac{1}{7}$ et $\frac{3}{7}$ (penser à $\frac{10}{7}$).

Exercice 11

Un ensemble est dit dénombrable si on peut déterminer une bijection avec $\mathbb{N}$. On a alors :

- La réunion d'ensemble est dite dénombrable si le nombre des ensembles est dénombrable.
- La réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Un sous ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

1. Déterminer une bijection entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$. Qu'en déduit-on pour le cardinal de $\mathbb{Z}$?
2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
3. Montrer que l'ensemble des entiers premiers avec un entier b est dénombrable. On note $\mathbb{Q}_b$ cet ensemble.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. On pourra utiliser les fractions irréductibles de dénominateurs b et les sous ensembles de N, $\mathbb{Q}_b$.
5. Supposons $\mathbb{R}$ dénombrable, alors [0,1[est dénombrable. Soit $\left(x_i\right)$ la suite de ces nombres dans [0,1[. Soit le nombre a=0, $a_1\ a_2\ \ a_n$.. tel que la décimale a_n soit différente de la nième décimale de x_n et de 9.
   a) Montrer que a ∞ [0,1[et justifier que ainsi que 9 doit être omis.
   b) Ce nombre appartient-il à la suite $\left(x_i\right)$?
   c) Conclure.

Exercice 12

Démonstration de l'égalité 0,99999...= 1

1. Méthode 1 : Introduire une suite convergent vers 0,99999... et calculer la limite de cette suite.
2. Méthode 2 : Montrer que x=0,9999.... vérifie l'équation 9x=9.
3. Méthode 3 : Calculer le développement décimal illimité de $\frac{1}{3}$.
4. 0,9999... est-il le développement décimal illimité de 1?

Exercice 13 Fractions continues et $\mathbb{R}$

Soit un nombre réel x. On construit alors les suites (α_n) et (a_n) par

- $\alpha_0 = x$,
- $a_n = E[\alpha_n]$ (partie entière de α_n),
- Si $\alpha_n \in \mathbb{N}$, α_{n+1}=0, sinon $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n}$

La suite (a_n) s'appelle le développement en fraction continue de x. On note x=[$a_0, a_1, ..., a_n, ...$] et on a :

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{(a_n - 1) + \cfrac{1}{a_n} \ldots}}}$$

1. Montrer que $x = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$, $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}$, $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ldots a_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n}}}$
2. Que se passe-t-il si x est rationnel ?
3. Déterminer le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $3^{\frac{1}{3}}$ et π.
4. En déduire les approximations rationnelles de $\sqrt{2}$: $\dfrac{2}{1}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{3}, ...$

   Tracer exactement dans un repère la droite d'équation $y = \sqrt{2}\, x$ et placer les points de coordonnées (1,2), (2,3), (3,5) …
   Interpréter le résultat.
5. Montrer que $x = \sqrt{2}$ vérifie l'équation $x = 1 + \dfrac{1}{1+x}$. Retrouver le résultat ci-dessus.
6. Trouver une relation similaire pour $\sqrt{3}$.

On peut montrer que le développement en fraction continue est périodique ssi x est irrationnel et vérifie une équation de la forme ax^2+bx+a=0 avec a,b,c entiers. x Est appelé irrationnel quadratique.

7. Déterminer le nombre $x = [4{,}5\ ,4\ ,5\ , \ldots\ 4{,}5\ , \ldots]$

Exercice 14 Extraction d'une racine carrée

REGLE PRATIQUE

1. Ecrire le nombre dont on veut extraire la racine comme le dividende d'une division.

2. Séparer en tranches de deux chiffres à partir de la droite ; la dernière tranche à gauche peut n'avoir qu'un chiffre.

3. Extraire la racine de la première tranche à gauche ; on obtient ainsi le premier chiffre de la racine cherchée qu'on écrit à la place du diviseur habituel.

4. Retrancher le carré de ce nombre d'un chiffre de la première tranche à gauche.

5. Abaisser à droite du résultat de la soustraction précédente (premier reste partiel), la tranche suivante.

6. Séparer dans le nombre obtenu le dernier chiffre à droite et diviser le nombre restant par le double du nombre d'un chiffre écrit à la place du diviseur ; on écrit le double de ce nombre à la place du quotient.

7. Si le quotient est inférieur à 10 l'essayer, sinon commencer par essayer 9 ; l'essai se fait en écrivant ce quotient à droite du double de la racine de la première tranche et en multipliant le nombre obtenu par le quotient considéré. Si le produit peut être retranché du nombre formé au 5, le quotient convient, sinon on essaie un nombre inférieur jusqu'à ce que la soustraction soit possible.

8. Le résultat de la soustraction est le deuxième reste partiel. Ecrire le nombre essayé à droite du premier chiffre écrit à la place du diviseur.

9. Recommencer avec le deuxième reste partiel comme avec le premier et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait utilisé toutes les tranches. Le dernier reste partiel est le reste de la racine carrée.

Appliquer cette méthode pour extraire $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{1250}$